

TURING 图灵原创

宋浩 主 编

高等数学

(上册)

精选750题

中国工信出版集团

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

作者简介

宋浩

博士、副教授，数学视频 UP 主，全网粉丝超过 660 万，视频播放量超过 2.9 亿次。宋浩讲授的高等数学、线性代数、概率论与数理统计、微积分、数学分析等课程，成为大学生期末考试、考研、专升本复习的重要视频资源，其中，高等数学教学视频成为 B 站播放时长最长的专辑。此外，宋浩还主编了《高等数学讲义》《线性代数辅导讲义》《396 经济类联考数学讲义》《中学数学高等数学衔接教程》等作品。

编委 周玉珠 丁伟华 刘 建
李秀红 董新梅 时玉敏
孙培培 姜庆华

宋浩 主 编
高等数学 (上册)
精选750题



人民邮电出版社
北 京

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学 (上册) 精选750题 / 宋浩主编. -- 北京 :
人民邮电出版社, 2023.12
ISBN 978-7-115-63003-2

I. ①高… II. ①宋… III. ①高等数学—高等学校—
习题集 IV. ①O13-44

中国国家版本馆CIP数据核字(2023)第203320号

内容提要

本书针对大学高等数学上学期的课程内容, 涵盖: 函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程, 全书总结了 750 道经典与创新题目, 并给出了相应的解题思路。书中题型规划合理, 覆盖题型全面, 解题思路讲解清晰, 非常适合想要打牢高等数学基础的学生, 以及研究生考试备考考生使用。

◆ 主 编 宋 浩

责任编辑 赵 轩

责任印制 胡 南

◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市丰台区成寿寺路 11 号

邮编 100164 电子邮件 315@ptpress.com.cn

网址 <https://www.ptpress.com.cn>

三河市中原雅豪印务有限公司印刷

◆ 开本: 787×1092 1/16

印张: 18.75

2023 年 12 月第 1 版

字数: 368 千字

2023 年 12 月河北第 1 次印刷

定价: 69.80 元

读者服务热线: (010) 84084456-6009 印装质量热线: (010) 81055316

反盗版热线: (010) 81055315

广告经营许可证: 京东市监广登字 20170147 号

《高等数学》是高等院校的数学基础课。相对于初等数学，大学数学课程更抽象，对逻辑要求更高，且教学进度快，学习周期长，导致学生在学习的过程中时常感到力不从心，缺乏解题思路，从而产生畏难情绪。

为了更好地指导学生学高等数学，帮助学生有效复习备考，作者根据高等数学课程要求和多年来的教学经验，精心编写了这本习题集。

本书具有以下特点：

一、与教材同步

本书与《高等数学》同济版、《高等数学讲义》(宋浩主编)保持同步，分7章，分别为：函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程。

二、习题精选精解

1. 知识要点：本书包含750道习题及其解答。每一节的题目按照知识点分类，先对每一个知识点所涉及的基本概念、基本定理和基本公式做一个简单梳理，便于学生明确解题思路，有的放矢。

2. 题目按难度分类：书中习题按照难度做了分类：基础题可以作为同步练习和章节复习，学生通过做题复习和巩固基本知识；中等题可以作为章节练习也可以作为期末备考的复习题，进一步巩固基本知识，提高解题能力；综合题，难度有所增加，可以作为期末备考的复习题，也可以作为考研学子第一轮复习的基础练习题。

三、题目与答案分开排版

本书分两部分，第一部分是精选习题，第二部分是答案和详细的习题解答过程。建议读者在使用本书时，先自己做习题，再查看答案和书中给出的详解，这样更容易了解自己知识点的掌握，从而找出自己的薄弱环节，更加深刻地理解基本概念，掌握基本理论，熟悉常用的解题方法和技巧，并避免一些常见的错误。

本书适合于：

1. 大一同学，学习《高等数学》和《微积分》的同步参考，期末考试复习；
2. 专升本同学，复习《高等数学》的练习册；

3. 考研数学（数学一、数学二、数学三）的第一轮教材梳理；

4. 考研数学（396 经济类联考）复习。

本书由宋浩老师主编，参加编写的有姜庆华、周玉珠、刘建、李秀红、丁伟华、时玉敏、孙培培老师。全书由宋浩老师负责统稿定稿。

尽管团队精心打磨，反复修改，不足之处也在所难免，欢迎广大读者批评指正。

编者

二〇二三年十月

第 1 章 函数与极限

第一节	函数	1
第二节	数列的极限	3
第三节	函数的极限	4
第四节	无穷小与无穷大	6
第五节	极限的运算法则	8
第六节	极限存在准则 两个重要极限	10
第七节	无穷小的比较	13
第八节	函数的连续性与间断点	15
第九节	连续函数的运算与初等函数的连续性	18
第十节	闭区间上连续函数的性质	18

第 2 章 导数与微分

第一节	导数的基本概念	20
第二节	函数的求导法则	24
第三节	高阶导数	26
第四节	隐函数及由参数方程所确定的函数的导数	28
第五节	函数的微分	30

第 3 章 微分中值定理与导数的应用

第一节	中值定理	35
-----	------	----

第二节	洛必达法则	39
第三节	泰勒公式	42
第四节	函数的单调性与曲线的凹凸性	44
第五节	函数的极值和最值	47
第六节	函数图形的描绘	50
第七节	曲率	52

第4章 不定积分

第一节	不定积分的概念与性质	54
第二节	换元积分法	56
第三节	分部积分法	61
第四节	有理函数的积分	63

第5章 定积分

第一节	定积分的概念与性质	67
第二节	微积分基本公式	69
第三节	定积分的换元积分法和分部积分法	71
第四节	反常积分	74

第6章 定积分的应用

第一节	定积分在几何学上的应用	78
第二节	定积分在物理学上的应用	86

第 7 章 微分方程

第一节	微分方程的基本概念	88
第二节	可分离变量的微分方程	89
第三节	齐次方程	91
第四节	一阶线性微分方程	92
第五节	可降阶的高阶微分方程	93
第六节	高阶线性微分方程	95
第七节	常系数齐次线性微分方程	97
第八节	常系数非齐次线性微分方程	99

答案

第 1 章	函数与极限	101
第 2 章	导数与微分	137
第 3 章	微分中值定理与导数的应用	166
第 4 章	不定积分	196
第 5 章	定积分	226
第 6 章	定积分的应用	248
第 7 章	微分方程	268

第1章

函数与极限

第一节 函数

一、函数的概念

定义：设 D 是非空实数集，对于任一 $x \in D$ ，在对应规则 f 下，有唯一确定的实数 y 与之对应，则因变量 y 是自变量 x 的函数，记作 $y = f(x)$ 。

函数的运算：四则运算、复合运算、反函数。

基本初等函数：常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数。

初等函数：由基本初等函数经过有限次四则运算或复合运算，用一个式子表示的函数。

分段函数：在 x 的不同取值范围内， f 用不同式子表示的一个函数。

1 基础题 已知 $f(x) = \arccos(2x+1) + \log_2(3x+2)$ ，求定义域 D_f 。

2 基础题 已知 $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ，求 $f(-2), f[f(x)]$ 。

3 基础题 已知 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{4}{x} + 2x^2 + 1$ ，求 $f(x), f(x^2 + 1)$ 。

4 基础题 已知 $f(x) = \arcsin \frac{4}{x}$ ，求定义域 D_f 及 $f(-4), f\left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right), f\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)$ 。

5 基础题 函数 $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2(1+x^2)}$ 的值域是 ()。

(A) $[-1, 1]$ (B) $[0, 1]$ (C) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ (D) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

6 基础题 设 $f(x) = \arccos 2x, g(x) = \arctan x, h(x) = \operatorname{arccot} \frac{x}{2}$ ，

求 $f\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot g(-1) \cdot h(2)$ 的值。

7 基础题 已知 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{4x^2}{x^4 + 1}$, 求 $f(x)$.

8 基础题 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\pi} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3} \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3} \end{cases}$, 求 $f\left(\frac{\pi}{6}\right), f\left(-\frac{\pi}{4}\right), f(2)$.

9 中等题 已知 $f(x) = \tan 2x, f[g(x)] = x^2 - 1$, 且 $|g(x)| \leq \frac{\pi}{8}$, 求 $g(x)$ 及 $g(x)$ 的定义域.

10 中等题 已知 $\varphi(x) = \max\{x, x^2, 1\}$, 求定义域 D_φ 及 $\varphi(-2), \varphi(-1), \varphi(0)$.

11 中等题 已知 $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = 2x - 1$, 求 $f[g(x)], g[f(x)]$.

12 中等题 已知 $f(x) = \begin{cases} 2-x, & x < 0 \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f[g(x)], g[f(x)]$.

13 中等题 已知 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 0 \\ x^2+1, & x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} \sin x, & x < \pi \\ \cos x, & x \geq \pi \end{cases}$, 求 $f(x) + g(x), f(x)g(x)$.

14 基础题 已知函数 $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1+x}}{1 + \sqrt{1+x}}$, 求反函数.

二、函数的性质

有界性: 存在正常数 M , 对任意 $x \in D$, 都有 $|f(x)| \leq M$, 则 $f(x)$ 在 D 上有界; 否则无界, 即对任意给定的正数 M , 存在 $x_0 \in D$, 使得 $|f(x_0)| > M$.

单调性: 对于 D 上的任意两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, $f(x_1) < f(x_2)$, 则 $f(x)$ 在 D 上单增; 当 $x_1 < x_2$ 时, $f(x_1) > f(x_2)$, 则 $f(x)$ 在 D 上单减.

奇偶性: D 关于原点对称, 对于任意 $x \in D$, 有 $f(-x) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 为奇函数; 若 $f(-x) = f(x)$, 则 $f(x)$ 为偶函数.

周期性: 存在正常数 T , 对于任意 $x \in D$, 有 $f(x+T) = f(x)$.

15 基础题 下列函数中, 是偶函数的是 ().

(A) $f(x) = (x^2 + 1)\sin^3 x$

(B) $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$

$$(C) h(x) = \frac{2^{-x} - 2^x}{2^{-x} + 2^x}$$

$$(D) \varphi(x) = x^2 \sec x + \csc^2 x$$

16 基础题 设 $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数, 则下列函数中, 是奇函数的是 ().

- (A) $f[f(x)]$ (B) $f[g(x)]$ (C) $g[f(x)]$ (D) $g[g(x)]$

17 基础题 设 $f(x) = x^3 + 2x + 3$, 判断 $f(x)$ 在定义域内的单调性.

18 基础题 函数 $f(x) = \frac{1}{x-2}$ 分别在 $x \in (2, 3)$ 与 $x \in (3, +\infty)$ 内是否有界?

19 基础题 求函数 $f(x) = 2 + \cos^2(2x-1)$ 的周期.

20 基础题 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则 $f(x) = x - [x]$ 是 ().

- (A) 无界函数 (B) 周期为 1 的周期函数
(C) 单调函数 (D) 偶函数

第二节 数列的极限

一、数列极限的定义

定义 1: 对于数列 $\{x_n\}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, x_n 无限接近常数 a , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

定义 2: 数列 $\{x_n\}$, a 为常数, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

评注

定义 1 是描述性定义, 用于观察极限; 定义 2 又称“ $\varepsilon-N$ ”定义, 侧重于证明极限及相关性质.

21 基础题 设 $x_n = \frac{n}{2n+1}$, 观察 x_n 的极限值, 并证明之.

22 基础题 讨论极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n$.

23 基础题 讨论极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^x$.

二、数列极限的性质

唯一性: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 a 是唯一的.

有界性: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\{x_n\}$ 有界.

保号性: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $a > 0$ ($a < 0$), 则存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $x_n > 0$ ($x_n < 0$).

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 从某一项起, 有 $\begin{cases} x_n \geq 0 & (x_n \leq 0) \\ \text{或} & \\ x_n > 0 & (x_n < 0) \end{cases}$, 则 $a \geq 0$ ($a \leq 0$).

数列收敛的充要条件: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$.

24 基础题 判断下列极限是否存在? 若存在, 求出极限值.

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

25 基础题 已知 $x_n = \begin{cases} \frac{n+1}{n+2}, & n \text{ 为偶数} \\ 1, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

26 基础题 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$, 求数列 $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n, \dots$ 的极限 ().
(A) -1 (B) 1 (C) 0 (D) 不存在

27 中等题 下列 4 个命题中正确的是 ().

① 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$. ② 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

③ 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$. ④ 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}$.

(A) ①② (B) ①③ (C) ①③④ (D) ③④

28 中等题 证明数列 $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sin \frac{n\pi}{4} \right\}$ 的极限不存在.

第三节 函数的极限

一、函数极限的定义

对于函数 $y = f(x)$, 有如下定义.

定义 1: 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 无限接近于常数 A , 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 否则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 不存在或发散.

定义 2: 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

定义 3: 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 无限接近于常数 A , 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 否则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在或发散.

定义4: 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 否则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在或发散.

评注

定义1和定义3是描述性的, 定义2和定义4分别称“ $\varepsilon-X$ ”定义和“ $\varepsilon-\delta$ ”定义. 定义3与定义4中, $f(x)$ 在点 x_0 的去心邻域内有定义, 与 $f(x_0)$ 无关.

左极限: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0) = A$;

右极限: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0) = A$.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

29 基础题 利用函数极限的定义, 证明 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1-4x^2}{2x-1} = -2$.

30 基础题 考察下列函数在 $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$ 的变化趋势, 并判断 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 是否存在.

(1) $f(x) = e^{2x-1}$; (2) $f(x) = \operatorname{arccot}(1-x)$.

31 基础题 考察函数 $f(x) = \begin{cases} (x+1)\sin x, & x < 0 \\ 1 - \cos x, & x \geq 0 \end{cases}$ 在分段点处的极限是否存在. 若存在, 求极限值.

32 基础题 已知 $f(x) = \begin{cases} \ln(1-x), & x < 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2x+1}}, & x \geq 1 \end{cases}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

33 基础题 已知函数 $y = f(x)$ 的图像如下:

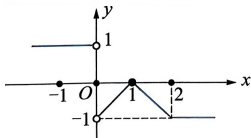


图 1-1

求 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

二、函数极限的性质

唯一性: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 A 必唯一.

局部有界性: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则在 x_0 点的某去心邻域内, $f(x)$ 有界.

局部保号性: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ ($A < 0$), 则在 x_0 点的某去心邻域内, 有 $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 在 x_0 的去心邻域内 $\begin{cases} f(x) \geq 0 & (f(x) \leq 0) \\ \text{或} \\ f(x) > 0 & (f(x) < 0) \end{cases}$, 则 $A \geq 0$ ($A \leq 0$).

由此得不出 $A > 0$ ($A < 0$).

海因定理: 也称“海涅定理”. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充要条件是对任意的 $\{x_n\}$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ($x_n \neq x_0$), 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

评注

海因定理的主要作用: 一是将数列的极限归结为函数的极限; 二是用于证明函数的极限不存在.

34 基础题 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x} = -1$, 则下列选项正确的是 ().

- (A) 在 $x=1$ 的任一去心邻域内, 都有 $f(x) < 0$.
- (B) 在 $x=1$ 的某个去心邻域内, 有 $f(x) < 0$.
- (C) 在 $x=1$ 的某个去心邻域内, 有 $f(x) \leq 0$.
- (D) 在 $x=1$ 的任一去心邻域内, $f(x)$ 有界.

35 基础题 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 下列选项正确的是 ().

- (A) 若 $f(x) < g(x)$, 则必有 $A \leq B$.
- (B) 若 $f(x) < g(x)$, 则必有 $A < B$.
- (C) 若 $A < B$, 则对于任意的 x , 都有 $f(x) < g(x)$.
- (D) 因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 所以 $f(x)$ 在点 x_0 必有定义.

36 基础题 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cos x$ 不存在.

37 中等题 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 证明函数 $f(x)$ 局部有界.

第四节 无穷小与无穷大

一、无穷小与无穷大的定义

定义 1: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} y = 0$, 则当 $x \rightarrow x_0$ 时, y 为无穷小.

即“以零为极限的变量为无穷小”.

定义 2: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} y = \infty$, 则当 $x \rightarrow x_0$ 时, y 为无穷大.

即“ $|y|$ 无限大的变量为无穷大”.

评注

上述定义中“ $x \rightarrow x_0$ ”可换成“ $x \rightarrow \infty$ 或 $n \rightarrow \infty$ ”.

无穷小与无穷大的关系: 在自变量的同一变化过程中, 若 $f(x)$ 为无穷大, 则

$\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小; 若 $f(x)$ 为非零的无穷小, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

38 基础题 证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $y = 2x \sin \frac{1}{x}$ 是无穷小.

39 基础题 函数 $y = x \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是否无界? 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, y 是否是无穷大?

40 基础题 函数 $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ 与 $g(x) = x \arctan x$ 在哪个变化过程中是无穷小? 在哪个变化过程中是无穷大?

41 基础题 对于函数 $f(x) = \frac{2x}{x-2}$ 与 $g(x) = \ln(x+1)$, 下列结论错误的是 ().

- (A) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是无穷小.
- (B) 当 $x \rightarrow 2$ 时, $f(x)$ 是无穷大, $g(x)$ 局部有界.
- (C) 当 $x \rightarrow -1^+$ 时, $f(x)$ 局部有界, $g(x)$ 是无穷大.
- (D) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是无穷大.

42 基础题 设数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下列结论正确的是 ().

- (A) 若 x_n 发散, 则 y_n 必收敛
- (B) 若 x_n 无界, 则 y_n 必有界
- (C) 若 x_n 有界, 则 y_n 必为无穷小
- (D) 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 则 y_n 必为无穷小

二、无穷小与无穷大的性质

- (1) 有限个无穷小的代数和仍是无穷小.
- (2) 有限个无穷小的乘积仍是无穷小.
- (3) 有界变量与无穷小的乘积是无穷小.
- (4) 有限个无穷大的乘积仍是无穷大.

- (5) 有界变量与无穷大的代数和是无穷大.
 (6) 非零常数(或极限存在且非零)与无穷大的乘积是无穷大.
 (7) 极限与无穷小的关系:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \stackrel{\text{充要}}{\Leftrightarrow} f(x) = A + \alpha \quad (\text{其中 } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0).$$

43 基础题 求下列极限.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \left(2 + \cos \frac{3}{x} \right)$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan |2x+1|}{2x+1}$.

44 基础题 在下列给定的变化过程中, 是无穷小的为 ().

(A) $\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} (x \rightarrow +\infty)$

(B) $\frac{x^3-1}{2x^4+x^3} (3-2\sin x)(x \rightarrow \infty)$

(C) $\frac{\sin 2x}{x\sqrt{x}} (x \rightarrow 0^+)$

(D) $\frac{\ln(1+x)}{x} (x \rightarrow 0)$

45 中等题 设 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, 则必有 ().

(A) 对任意的 n , 都有 $x_n < y_n$

(B) 对任意的 n , 都有 $y_n < z_n$

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n z_n$ 不存在

(D) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n z_n$ 不存在

46 中等题 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 2x + \frac{f(x)}{x} \right) = 4$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

第五节 极限的运算法则

一、四则运算法则

法则: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, A, B 均为常数, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

评注

“ $x \rightarrow x_0$ ”可换为“ $x \rightarrow \infty$ ”, 及数列中的“ $n \rightarrow \infty$ ”.

47 基础题 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, 则必有 ().

- (A) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \infty$ (B) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = 0$
 (C) $\lim_{x \rightarrow x_0} k f(x) = \infty$ ($k \neq 0$ 为常数) (D) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) + g(x)} = 0$

48 基础题 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(2 + \frac{2}{x}\right) \left(3 - \frac{3}{x}\right)$.

49 基础题 求极限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x + \frac{2\pi}{x}}{\cos 2x}$.

50 基础题 求下列极限.

(1) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1}\right)$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}})$.

51 基础题 求下列函数的极限.

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{\sqrt{x+1} - 1}$.

52 基础题 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x \cos x}{x^3 - x \sin x + 1}$.

53 基础题 求下列数列的极限.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+1}\right)$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \cdots + \frac{1}{a^n}\right)$ (其中 $a > 1$ 为常数).

54 基础题 求下列数列的极限.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \ln \frac{k+1}{k+2}$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{1+2+\cdots+(n+1)} - \sqrt{1+2+\cdots+n})$.

55 基础题 已知函数 $f(x) = 2^x$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln[f(1) \cdot f(2) \cdots f(n)]$.

56 中等题 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+a)(1+a^2)(1+a^4) \cdots (1+a^{2^n})$ (其中 $|a| < 1$ 为常数).

57 中等题 当 $x \rightarrow -1$ 时, 函数 $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1} e^{\frac{1}{x+1}}$ 极限是否存在?

58 中等题 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2+x+3} - \sqrt{x^2-x+3})$.

二、幂指函数的运算法则

法则：有一幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ ，

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, A, B 均为常数，则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = A^B;$$

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} 0, & \text{当 } 0 < A < 1 \text{ 时} \\ \infty, & \text{当 } A > 1 \text{ 时} \end{cases}$

评注

A, B 的其他情形属于“不定式”，需后续内容“洛必达法则”。

59 基础题 求极限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (1 + \sin 2x)^{\ln(\tan x)}$.

60 中等题 设 $f(x) = \left(\frac{x^2 + x \cos x - 1}{2x^2 - x \sin x} \right)^{x^2+1}$, $g(x) = \left(\frac{3x+2}{2x-1} \right)^{\sin x}$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$

的极限分别为 ().

(A) 0, 0

(B) 0, ∞

(C) ∞ , 0

(D) ∞ , ∞

三、已知极限求参数——极限的反问题

61 基础题 已知 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 4} = 3$, 求 a 和 b 的值.

62 基础题 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\ln(a+x)} (\cos x - b) = 4$, 求 a 和 b 的值.

63 中等题 已知 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x + \sqrt{ax^2 - bx - 1}) = 1$, $a > 0$, 求 a 和 b 的值.

64 中等题 试确定常数 a 和 b 的值, 使得 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1-x^6} - ax^2 - b) = 0$.

第六节 极限存在准则 两个重要极限

一、极限存在准则

准则1 (夹逼准则): 设函数 $f(x), g(x), h(x)$ 满足以下条件.

(1) 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ (或 $|x| > X$) 时, 有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

(2) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} h(x) = A$.

则 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = A$.

评注

上述夹逼准则对于数列也成立. 即当 n 足够大时, 满足 $y_n \leq x_n \leq z_n$, 且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = A, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = A.$$

准则 2: 单调有界数列必有极限.

65 基础题 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n!} \sin \frac{1}{n}$.

66 基础题 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2 + 2n + 1} + \frac{2}{n^2 + 2n + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 + 2n + n} \right) = \frac{1}{2}$.

67 中等题 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x})$.

68 中等题 设 $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{4}{x_n} \right)$, 其中 $x_n > 0$, 判断数列 $\{x_n\}$ 是否收敛, 若收敛, 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

69 综合题 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n=1, 2, \dots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

70 综合题 设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx (n=0, 1, 2, \dots)$.

(1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n=2, 3, \dots)$; (2) 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

二、两个重要极限

第一重要极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. 典式: $\lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$ (其中, $\varphi(x) \neq 0$).

评注

第一重要极限是求一类商的极限 $\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$, $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0$, 不

符合第五节中求极限的运算法则, 属于 “ $\frac{0}{0}$ ” 型不定式.

71 基础题 设 $f(x) = \frac{\sin 2x}{5x}$, 求: (1) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 与 (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

72 基础题 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{4x}$.

73 基础题 求下列极限.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{x}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{2x}$.

74 基础题 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 3x}{2x + \sin 4x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - \sin 3x}{2x + \sin 4x}.$$

75 基础题 求极限 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x^2 - 2x - 3)}{x - 3}$.**76 基础题** 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$.**77 中等题** 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin \frac{x^2 + 1}{n^2}$.

第二重要极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$; $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$.

典式: $(1 + \text{无穷小})^{\text{无穷大}}$, 且 $\text{无穷小} \times \text{无穷大} = 1$, 则极限 $= e$.

评注

第二重要极限是求一类幂指函数的极限 $\lim f(x)^{g(x)}$, $f(x) \rightarrow 1$, $g(x) \rightarrow \infty$, 属于“ 1^∞ ”型不定式, 不属于第五节幂指函数求极限的运算法则.

78 基础题 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{2x+100}$.**79 基础题** 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x}$.**80 基础题** 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{2x^2 + 1}\right)^{x^2}$.**81 基础题** 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1+kx)} (k \neq 0)$.**82 基础题** 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan 2x)^{-\frac{3}{x}}$.**83 中等题** 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{-\frac{1}{\sin x}}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

84 中等题 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$ (其中, $a > 0, b > 0$).

85 中等题 设常数 $a \neq \frac{1}{2}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n-2an-1}{n(1-2a)} \right)^n$.

86 中等题 常数 a, b 满足什么条件时, 使得 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right)^x = e^2$?

第七节 无穷小的比较

一、无穷小的阶

定义: 设 $\lim \alpha = \lim \beta = 0$ 且 $\alpha \neq 0$ (α, β 是函数), 若

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{称 } \beta \text{ 是较 } \alpha \text{ 的高阶无穷小, 记作 } \beta = o(\alpha); \\ \infty, & \text{称 } \beta \text{ 是较 } \alpha \text{ 的低阶无穷小;} \\ c \neq 0, & \text{称 } \beta \text{ 与 } \alpha \text{ 是同阶无穷小;} \\ 1, & \text{称 } \beta \text{ 与 } \alpha \text{ 是等价无穷小, 记作 } \beta \sim \alpha \text{ (或 } \alpha \sim \beta \text{).} \end{cases}$$

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$ ($k > 0$), 称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小, 或 β 与 α^k 是同阶无穷小.

二、等价无穷小代换定理

若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 且 $\lim \frac{\beta_1}{\alpha_1} = A$, 则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta_1}{\alpha_1} = A$.

评注

等价无穷小代换适用于分子或分母中的因式替换, 加减之间满足一定的条件也能代换, 需谨慎.

常用的等价无穷小: 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有

$$\sin x \sim x; \tan x \sim x; \arcsin x \sim x; \arctan x \sim x; 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2; \ln(1+x) \sim x;$$

$$e^x - 1 \sim x; a^x - 1 \sim x \ln a (a > 0, a \neq 1); \sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x; (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x (\alpha \neq 0);$$

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \sim x; x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3.$$

87 基础题 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列无穷小中与 $\sqrt{x}$ 不等价的是 ().

- (A) $e^{\sqrt{x}} - 1$ (B) $\ln(1 + \sqrt{x})$ (C) $1 - \cos \sqrt{x}$ (D) $\arctan \sqrt{x}$

88 基础题 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列 4 个无穷小中比其他 3 个更高阶的无穷小是 ().

(A) $\arctan 2x$

(B) $\sqrt[3]{1+x} - 1$

(C) $1 - \cos 2x$

(D) $\tan x - \sin x$

89 基础题 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \tan \frac{2x-3}{x^2-x+1}$.

90 中等题 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{x \cos x^2} - e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小, 则 $n = ()$.

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

91 中等题 证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3$.

92 中等题 证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(2^{x^2} - 1) \arctan 2x = o(x^2)$.

93 中等题 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{ax^3 + bx^2 + c} \sim \frac{1}{2x^2 + 1}$, 求 a, b, c 的值.

94 中等题 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(\sqrt{1+x^2} - 1) \ln(1+x^3)$ 是 $x(\arcsin x)^k$ 的高阶无穷小, 求 k 的取值范围.

95 综合题 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - \tan x)(e - e^{\cos x})}{(2x+1)\sin^5 x}$.

96 综合题 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1-bx)$ 是等价无穷小, 且 $ab \neq 0$, 求 a, b 的值.

97 综合题 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{f(x)}{\sin^2 x}\right)}{a^x - 1} = A$ (其中, $a > 0, a \neq 1$), 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$.

98 综合题 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2}$.

99 综合题 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin x + 3x^2 \cos \frac{1}{x^2}}{(1 + \cos x) \ln(1+2x)}$.

100 综合题 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2}$.

101 综合题 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^3 \sin x}$.

102 综合题 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^{2x}) - 2x}{\ln(x^2 + e^{3x}) - 3x}$.

103 综合题 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\sin \ln \left(1 + \frac{4}{x} \right) - \sin \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$.

104 综合题 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列无穷小量中最高阶的是 ().

(A) $\int_0^x (e^t - 1) dt$ (B) $\int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3}) dt$ (C) $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$ (D) $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt$

105 综合题 已知 $f(x) = \frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x}$, 记 $a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(1) 求 a 的值;

(2) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) - a$ 与 x^k 是同阶无穷小, 求常数 k 的值.

106 综合题 确定常数 a, b, c 的值, 使 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = c$ ($c \neq 0$).

第八节 函数的连续性与间断点

一、函数的连续性

定义: 若 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续. 若 $f(x)$ 在区间 I 上的每一点都连续, 则 $f(x)$ 在区间 I 上连续.

评注

I 可开区间, 也可闭区间, 若 $I = [a, b]$, 则需在 $x = a$ 处右连续, 在 $x = b$ 处左连续, 即 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续;

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

$f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ 既左连续又右连续, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

107 基础题 已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 4}{x - 1} = A$ (常数), 求 $f(1)$.

108 基础题 证明 $f(x) = 2x^2 - x + 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

1109 基础题 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{\sin 4x}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 求 k 的值.

1110 基础题 判断 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{\tan x} (x^2 + 1), & x > 0 \\ 2, & x = 0 \\ \ln(1-2x)^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \end{cases}$ 在分段点 $x=0$ 处的连续性.

1111 基础题 讨论 $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \cos \frac{1}{x-1}, & x < 1 \\ (x+1) \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ 的连续性.

1112 基础题 给 $f(0)$ 补充定义, 使得 $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x \arcsin x}$ 在 $x=0$ 处连续.

1113 中等题 已知 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^n + x^n)}{n} (x > 0)$. (1) 求 $f(x)$; (2) 判断 $f(x)$ 在定义域内是否连续.

1114 中等题 已知 $f(x)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos[\sqrt{x}f(x)]}{(e^{2x} - 1)f(x)} = \frac{1}{2}$, 求 $f(0)$.

二、函数的间断点及其分类

定义: 函数 $f(x)$ 的不连续点称为 $f(x)$ 的间断点.

若 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的间断点, 则满足下列三个条件之一:

(1) $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义; (2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在; (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

间断点分类:

{	第一类间断点 —— 左、右极限都存在	$\left\{ \begin{array}{l} \text{跳跃间断点: } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x). \\ \text{可去间断点: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ 存在 } \neq f(x_0) \\ \text{或 } f(x_0) \text{ 不存在.} \end{array} \right.$
	第二类间断点 —— 左或右极限不存在	$\left\{ \begin{array}{l} \text{无穷间断点: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \\ \text{或 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty. \\ \text{振荡间断点: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ 振荡发散.} \end{array} \right.$

115 基础题 已知 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$, 求 $f(x)$ 的间断点, 并判断其类型.

116 中等题 设 $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}} - 1}$, 则关于 $f(x)$ 的间断点的正确选项是 ().

- (A) $x=0, x=1$ 都是第一类间断点
 (B) $x=0, x=1$ 都是第二类间断点
 (C) $x=0$ 是第一类间断点, $x=1$ 是第二类间断点
 (D) $x=0$ 是第二类无穷间断点, $x=1$ 是第一类跳跃间断点

117 中等题 已知 $x=0$ 是 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin \frac{1}{2x}}{2^x - 1}, & x < 0 \\ b, & x = 0 \\ a + \frac{\ln(1+3x)}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 的可去间断点, 求 a 和 b 的值.

118 中等题 已知 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$, 求 $f(x)$ 的连续区间; 若有间断点, 指出间断点的类型.

119 综合题 (1) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max_{1 \leq i \leq m} \{a_i\}$ ($a_i > 0, i=1, 2, \cdots, m$);

(2) 利用 (1) 的结论, 求 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$ ($x \geq 0$), 并讨论其连续性.

120 综合题 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x}, & x < 0 \\ 6, & x = 0 \\ \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \tan\left(\frac{x}{4}\right)}, & x > 0 \end{cases}$, 问 a 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处

连续? a 为何值时, $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

121 综合题 设 $f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$, 求 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性

法则: 连续函数的和、差、积、商 (分母非零) 仍为连续函数; 连续函数经过复合运算后仍为连续函数; 连续函数的反函数仍是连续函数.

结论: 基本初等函数在其定义域内连续; 初等函数在其定义区间内连续.

122 基础题 已知 $f(x) = \frac{\lg(100+x^2)}{a^x + \arcsin 2x}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

123 基础题 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $f(x) \neq 0$, $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 且有间断点, 则下列陈述中正确的是 ().

- (A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点 (B) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点
(C) $\varphi^2(x)$ 必有间断点 (D) $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

第十节 闭区间上连续函数的性质

有界性: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

最值性: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最小值和最大值.

介值性: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, m, M 分别是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值与最大值, 则对介于 m 与 M 之间的任意常数 $C(m < C < M)$, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = C$.

若常数 $C(m \leq C \leq M)$, 则至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = C$.

零点定理: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

评注

若 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界.

124 基础题 证明方程 $x^3 - 9x - 2 = 0$ 恰有 3 个实根.

125 基础题 证明方程 $x = \frac{1}{2} \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内存在唯一实根.

126 中等题 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(0) = f(1)$, 证明在 $[0, 1]$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $f\left(\xi + \frac{1}{2}\right) = f(\xi)$.

127 中等题 已知 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 证明 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

128 中等题 已知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, 证明在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(x_1) + 2f(x_2) + 3f(x_3) = 6f(\xi)$.

129 综合题 函数 $f(x) = \frac{x \sin(x-2)}{|x|(x-1)(x-2)^2}$ 在区间 () 内有界.

(A) $(-1, 0)$

(B) $(0, 1)$

(C) $(1, 2)$

(D) $(2, 3)$

130 综合题 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $f(0) = f(1)$. 证明对于任意正整数 n , 存在 $x_0 \in [0, 1]$, 使得 $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right)$.

第2章

导数与微分

第一节 导数的基本概念

一、导数的定义

定义1: 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数

$$f'(x_0) = y'|_{x=x_0} = \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

定义2: 函数 $y=f(x)$ 的导函数(导数)

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

由定义知: $f'(x_0) = f'(x)|_{x=x_0}$.

131 基础题 设函数 $f(x) = 1 + 2x + 3x^3$, 求 $f'(1)$.

132 基础题 设函数 $f(x) = x(2x+1)(3x+2)(4x+3)$, 求 $f'(0)$.

133 基础题 设函数 $f(x) = x(x-2)\sqrt{\frac{3x^3+1}{2x^2+1}}$, 用导数定义求 $f'(0)$, $f'(2)$.

134 基础题 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{2x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数 $f'(0)$.

135 中等题 设函数 $f(x) = (x^2 - 1)\varphi(x-1)$, 且函数 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 证明函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 并求 $f'(1)$.

136 中等题 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0) = \frac{1}{2}$. 又对任意的 x 有 $f(2+x) = 2f(x)$, 求 $f'(2)$.

137 中等题 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+3}{x} = 2$, 问函数 $f(x)$ 在

$x=0$ 处是否可导? 若可导, 求 $f'(0)$.

138 基础题 设函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导, 求下列极限值.

$$(1) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 5\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$(2) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - 3\Delta x)}{\Delta x}$$

139 基础题 设函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 存在, 求极限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 4h) - f(x_0 + 2h)}{h}.$$

140 基础题 若函数 $f(x)$ 可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3) - f(3 - 3x^3)}{\ln(1 + x^3)} = 3$, 求 $f'(3)$.

141 基础题 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, $f'(0)=1$, 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(-5x)}{x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x^2) - xf(x)}{x^2}$$

142 中等题 设 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的一个充分条件为 ().

$$(A) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3h) - f(h)}{2h} \text{ 存在}$$

$$(B) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(-h)}{2h} \text{ 存在}$$

$$(C) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^3)}{h^3} \text{ 存在}$$

$$(D) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2)}{h^2} \text{ 存在}$$

143 中等题 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且 $f(1)=0$, $f'(1)=2$, 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 3x) \cdot f(\cos x)}{x^3}.$$

二、单侧导数

$$\text{定义: 左导数 } f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$

$$\text{右导数 } f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

定理: 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充要条件是左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等.

144 基础题 下列函数中, 在 $x=0$ 处可导的是 ().

$$(A) f(x) = |x|$$

$$(B) f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$(C) f(x) = x^3$$

$$(D) f(x) = x \ln x$$

145 基础题 设函数 $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x > 0 \\ x^2 + 1, & x \leq 0 \end{cases}$, 求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左导数 $f'_-(0)$ 和右导数 $f'_+(0)$, 由此讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导. 若可导, 求出 $f'(0)$.

146 中等题 设函数 $f(x) = \begin{cases} x(1+e^{\frac{1}{x}}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ().

- (A) 左导数存在, 右导数不存在 (B) 右导数存在, 左导数不存在
(C) 左、右导数都不存在 (D) 左、右导数都存在

147 基础题 设函数 $f(x) = x^2|x-1|$, 讨论函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否可导? 若可导, 求出 $f'(1)$.

148 基础题 函数 $f(x) = (x^3-1)|x-1|$, 讨论函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否可导? 若可导, 求出 $f'(1)$.

149 中等题 设函数 $f(x) = |x-1|\varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 则 $\varphi(1)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的 ().

- (A) 充分必要条件 (B) 充分非必要条件
(C) 必要非充分条件 (D) 既非充分又非必要条件

150 中等题 函数 $f(x) = (x^2+x-2)|x^3-4x|$ 不可导点的个数为 ().

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

三、导数的几何意义

导数的几何意义: 导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线的斜率.

曲线在点 (x_0, y_0) 处的切线方程为 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

曲线在点 (x_0, y_0) 处的法线方程为 $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ ($f'(x_0) \neq 0$).

特别地: 当 $f'(x_0) = 0$ 时, 切线方程为 $y = y_0$, 法线方程为 $x = x_0$;

当 $f'(x_0) = \infty$ 时, 切线方程为 $x = x_0$, 法线方程为 $y = y_0$.

151 基础题 求曲线 $y = 2x + \cos x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程和法线方程.

152 基础题 已知在横坐标 $x = x_0$ 处, 曲线 $f(x) = x^2$ 与 $g(x) = x^3$ 的切线互相垂直,

求 x_0 的值.

153 基础题 设直线 L 与直线 $2x - 6y + 1 = 0$ 垂直, 且与曲线 $y = x^3 + 3x^2 - 5$ 相切, 求直线 L 的方程.

154 基础题 证明双曲线 $xy = 1$ 上任一点处的切线与两坐标轴所围成的三角形面积恒为 2.

155 中等题 问 a, b 为何值时, 曲线 $L_1: y = 1 + \ln x$ 与抛物线 $L_2: y = x^2 + ax + b$ 在 $x = 1$ 处有公共切线.

156 中等题 已知函数 $f(x)$ 是可导的偶函数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(3+x) - f(3)} = -2$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-3, f(-3))$ 处的切线斜率 k .

四、可导与连续的关系

定理: 若函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处可导, 则 $f(x)$ 在 x_0 处必连续.

推论: 若函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处不连续, 则 $f(x)$ 在 x_0 处不可导.

连续是可导的必要条件, 但不是充分条件. 即可导一定连续, 但连续不一定可导.

157 基础题 设函数 $f(x)$ 在点 $x = 2$ 处可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$, 求 $f(2)$.

158 基础题 设函数 $f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 讨论 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性与可导性.

159 基础题 设函数 $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \geq 0 \\ x^3 + x, & x < 0 \end{cases}$, 讨论 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性与可导性.

160 基础题 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 + \ln x, & x \geq 1 \\ x^3 \ln x, & 0 < x < 1 \end{cases}$, 讨论 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的连续性与可导性.

161 中等题 试确定 a 和 b 的值, 使函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \pi x, & x > 1 \\ ax^2 + b, & x \leq 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导.

162 中等题 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+2x^3)}{x^2}, & x > 0 \\ x^2 \varphi(x), & x \leq 0 \end{cases}$, 其中 $\varphi(x)$ 是有界函数, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ().

(A) 极限不存在

(B) 极限存在但不连续

(C) 连续但不可导

(D) 可导

第二节 函数的求导法则

一、函数的和、差、积、商的求导法则

定理: 如果函数 $u(x), v(x)$ 都可导, 那么它们的和、差、积、商 (除分母为零的点) 也可导, 且

$$(1) [u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x);$$

$$(2) [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x);$$

$$(3) \left[\frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0).$$

特别地: $[cu(x)]' = cu'(x)$ (c 为常数), $\left(\frac{1}{v(x)} \right)' = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}.$

和、差、积的求导法则可以推广到有限个函数的情形.

163 基础题 设 $f(x) = 3x^3 + 2e^x - 5 \ln x + \sin 1$, 求 $f'(x)$ 和 $f'(1)$.

164 基础题 设 $f(x) = x \cos x + 3x^2$, 求 $f'(x)$, $f'(\frac{\pi}{2})$, $f'(\pi)$.

165 基础题 设 $y = e^x (\cos x - 2 \sin x)$, 求 y' .

166 基础题 设 $y = (1+x^2) \arctan x - x \ln x$, 求 y' .

167 基础题 设 $y = \frac{\sqrt{x} + xe^x - 3x^3 \sin x}{x^2}$, 求 y' .

168 基础题 设 $y = \frac{\sin x}{x - \cos x}$, 求 y' .

169 基础题 设 $y = \frac{2\ln x + x^3}{3\ln x + x^2}$, 求 y' .

170 基础题 设 $y = \frac{e^x(x^2+1)}{x+1}$, 求 y' .

171 中等题 设函数 $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{x^4+1}{x^4+x^2+1}$, 求 $f'(x)$.

172 中等题 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2x-1}, & x < 0 \\ e^x \sin x, & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$.

二、反函数的求导法则

定理: 设函数 $y = f(x)$ 是单调的连续函数, 若 $y = f(x)$ 可导且 $f'(x) \neq 0$, 则其反函数 $x = \varphi(y)$ 也可导, 且

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ 或 } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

即两个互为反函数的函数, 它们的导数互为倒数.

173 基础题 设可导函数 $y = f(x)$ 的反函数为 $x = \varphi(y)$, 并且有 $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f'(1) = 4$, $f'(2) = 5$, 求 $\varphi'(2)$.

174 基础题 设 $y = f(x) = 3x^3 + 2x + 1$, 其反函数为 $x = \varphi(y)$, 求 $\varphi'(1)$.

三、复合函数的求导法则

定理: 若函数 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ 都可导, 则复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 可导, 且有链式法则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x) = f'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x).$$

$$y \xrightarrow{f(u)} u \xrightarrow{\varphi(x)} x$$

因变量 中间变量 自变量

链式法则可以推广到多个函数复合的情形.

175 基础题 设 $y = (1 - x + 2x^2)^4$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1}$.

176 基础题 设 $y = \ln \cos e^{-x}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

177 基础题 设 $f(x) = \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, 求 $f'(x)$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

178 基础题 设 $y = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$, 求 y' .

179 基础题 设 $y = 3^x + x^3 + x^x + 3^3$, 求 y' .

180 基础题 设 $y = \cos 3x \cdot \sin^3 x$, 求 y' .

181 基础题 设 $y = x\sqrt{1-x^2} - \arccos x$, 求 y' .

182 基础题 设 $y = x^2 + x\sqrt{x^2+1} + \ln(x+\sqrt{x^2+1})$, 求 y' .

183 基础题 设 $y = x[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)]$, 求 y' .

184 基础题 设 $y = -x + \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) - e^{-x} \operatorname{arccot} e^x$, 求 y' .

185 中等题 设 $f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} x \left(\frac{t-x}{t+2x} \right)^{tx}$, 求 $f'(x)$.

186 中等题 设函数 $f(x)$ 可导, 求下列函数的导数.

(1) $y = f(3^x + x^3)$

(2) $y = f(x \ln x)$

187 中等题 已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f'(1) = -2$, 设 $g(x) = f(2x^3 - 3x)$, 求 $g'(-1)$.

第三节 高阶导数

高阶导数

定义: 函数 $y = f(x)$ 的 $(n-1)$ 阶导数的导数称为 $f(x)$ 的 n 阶导数, 即

$$\frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} = [f^{(n-1)}(x)]'.$$

由定义知, 求高阶导数就是多次求导数.

莱布尼茨公式: 如果函数 $u(x), v(x)$ 有 n 阶导数, 则有

$$[u(x) \cdot v(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k [u(x)]^{(k)} \cdot [v(x)]^{(n-k)}, \text{ 其中 } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

188 基础题 求下列函数的二阶导数.

$$(1) y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$(2) y = 2x^3 \arctan x + \ln(1+x^2)$$

189 基础题 设 $f(x) = e^{3x} \sin 2x$, 求函数 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处的二阶导数 $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

190 基础题 设函数 $y = \ln \sqrt{\frac{1+e^{2x}}{e^{2x}}}$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$, $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$.

191 基础题 设函数 $y = \arcsin \frac{x}{3}$, 求 $y'''|_{x=\sqrt{5}}$.

192 基础题 设函数 $y = x \ln x$, 则 $y^{(10)} = (\quad)$.

$$(A) -\frac{1}{x^9}$$

$$(B) \frac{1}{x^9}$$

$$(C) \frac{8!}{x^9}$$

$$(D) -\frac{8!}{x^9}$$

193 基础题 设函数 $y = \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2$, 求 $y^{(10)}$.

$$(A) \cos x$$

$$(B) \sin x$$

$$(C) -\cos x$$

$$(D) -\sin x$$

194 基础题 设函数 $f(x) = xe^{-x}$, 则 $f^{(n)}(x) = (\quad)$.

$$(A) (-1)^{n-1}(n-x)e^{-x}$$

$$(B) (-1)^n(n-x)e^{-x}$$

$$(C) (n-x)e^{-x}$$

$$(D) (x-n)e^{-x}$$

195 基础题 设函数 $y = (x^2+1)^5(x^5+1)^2$, 求 $y^{(20)}$ 和 $y^{(21)}$.

196 中等题 设函数 $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$, 求 $f(x)$ 的 $n(n>1)$ 阶导数 $f^{(n)}(x)$.

197 中等题 设函数 $f(x) = \ln(2-3x)$, 则 $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x) = (\quad)$.

$$(A) \frac{3^n n!}{(2-3x)^n}$$

$$(B) \frac{3^n (n-1)!}{(2-3x)^n}$$

$$(C) \frac{-3^n n!}{(2-3x)^n}$$

$$(D) \frac{-3^n (n-1)!}{(2-3x)^n}$$

198 中等题 已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某邻域内可导, 且 $f'(x) = [f(x)]^2$, $f(1) = 2$, 求 $f'''(1)$.

第四节 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数

一、隐函数的导数

定义 由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 称为隐函数, 而形如 $y = f(x)$ 的函数称为显函数.

隐函数求导的方法和步骤: 设方程 $F(x, y) = 0$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

第1步: 方程 $F(x, y) = 0$ 两边同时对 x 求导, 建立 y' 的方程.

第2步: 从上面得到的方程中解出 y' .

199 基础题 求由下列方程所确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$.

(1) $\cos(xy) + \ln y - x = 1$

(2) $x^3 + y^3 = 6xy$

200 基础题 设方程 $xy - \sin(\pi y^2) = 0$ 确定 y 是 x 的函数 $y = y(x)$, 求 $y'|_{\substack{x=0 \\ y=-1}}$.

201 基础题 求由隐函数 $\tan\left(x + y + \frac{\pi}{4}\right) = y$ 确定的曲线在点 $(-1, 1)$ 处的切线方程与法线方程.

202 基础题 求曲线 $y^2 + 2e^y = 3y$ 在 $x = 0$ 对应点处的切线方程.

203 中等题 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $xf'(y) = e^y \ln y$ 确定, 其中 $f(x)$ 可导, 且 $f(1) = 1$, 求 $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0}$.

204 中等题 已知曲线 $y = x^2 + ax + b$ 与 $2y = xy^3 - 1$ 在点 $(1, -1)$ 处有公共切线, 求常数 a 和 b 的值.

205 中等题 设函数 $y = y(x)$ 是由方程 $\ln(x^2 + y^2) = 2 \arctan \frac{y}{x} + \frac{\pi}{2} + \ln 2$ 确定的隐函数, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

206 中等题 已知函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + xy = e + 1$ 确定, 求 $y'(1)$, $y''(1)$.

207 中等题 已知曲线 $y = y(x)$ 过点 $(1, -1)$ 且满足 $x^3 + y^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 1$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2}\bigg|_{\substack{x=1 \\ y=-1}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、对数求导法

对数求导法的步骤

第1步: 函数 $y = f(x)$ 的两边取自然对数, 得到隐函数 $\ln y = \ln f(x)$.

第2步: 利用隐函数求导方法, 求出导数 y' .

对数求导法常用于多因子乘幂求导, 或幂指函数求导.

208 基础题 求函数 $y = x^{\ln x}$ 的导数.

209 基础题 设函数 $y = (1 + \sin x)^{x^2}$, 求导数 y' .

210 基础题 设函数 $y = x^{\sin x} \sqrt{e^x - 1}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

211 基础题 设函数 $y = \frac{(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{e^x}$, 求导数 y' .

212 基础题 设函数 $y = \frac{(x+1)^2 \cdot \sqrt{2x+2}}{(x-1)^3 \cdot \sqrt[3]{3x-3}}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

213 中等题 求函数 $y = x^{x^x}$ ($x > 0$) 的导数 y' .

214 中等题 求函数 $y = x^{2x}$ 的二阶导数.

215 中等题 设函数 $y = y(x)$ 是由方程 $x^{\frac{1}{y}} = y^{\frac{1}{x}}$ 所确定的函数, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

三、由参数方程所确定的函数的导数

参数方程确定的函数的求导公式: 设 $y = y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定的

函数, 若 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ 都可导, 且 $\varphi'(t) \neq 0$, 则 y 对 x 的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

216 基础题 求下列参数方程所确定的函数的导数 $\frac{dy}{dx}$.

$$(1) \begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \frac{2t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$

217 基础题 已知函数 $y = y(x)$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = t^2 e^{2t} \\ y = (t^2 + 1)e^t \end{cases}$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=-2}$

218 基础题 求曲线 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 3} \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2 + 3}) \end{cases}$ 在 $t=1$ 相应的点处的切线方程.

219 基础题 求曲线 $\begin{cases} x = e^t \sin 2t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程与法线方程.

220 中等题 设 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = t \cos t - \sin t \end{cases}$ (t 为参数), 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}$.

221 中等题 设 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = 3t + t^3 \end{cases}$, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1}$.

222 中等题 已知函数 $y = y(x)$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = e^t + t \\ y = \sin t \end{cases}$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0}, \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0}$

第五节 函数的微分

函数的微分

定义: 若 $y = f(x)$ 的增量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ 可表示为 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$, 则称 $y = f(x)$ 可微, 而 Δy 的线性主部 $A\Delta x$ 称为 $y = f(x)$ 的微分, 即

$$dy = df(x) = A\Delta x.$$

定理: $y = f(x)$ 可微的充要条件是 $y = f(x)$ 可导, 且 $A = f'(x)$, 即

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx.$$

223 基础题 设函数 $y = f(x) = x^3 + x$, 计算在 $x=3$ 处当 Δx 分别为 0.1 和 0.01 时的微分 dy 及增量 Δy .

224 基础题 已知函数 $y = f(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\Delta x + \alpha$, 且 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\Delta x} = 0$, 求 $f'(2)$.

225 基础题 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $f'(x_0)=1$, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 在点 x_0 处的微分 dy 是 Δx 的 ().

- (A) 高阶的无穷小 (B) 低阶的无穷小
(C) 等价的无穷小 (D) 同阶但非等价的无穷小

226 基础题 求下列函数的微分.

(1) $y = e^{\sin^2 \frac{1}{x}}$ (2) $y = x \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2}$

227 基础题 求下列函数在给定点处的微分.

(1) $y = \sqrt{2 + \sin x}$, 求 $dy|_{x=0}$, (2) $y = \ln(1 + 2^{-2x})$, 求 $dy|_{x=1}$.

228 基础题 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $2y + \sin(x+y) = 0$ 确定, 求微分 dy .

229 基础题 设 $y = y(x)$ 是由方程 $e^y + xy - e = 0$ 确定的函数, 求微分 $dy|_{x=0}$.

230 中等题 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的微分.

231 中等题 设 $y = (1 + e^x)^x$, 则微分 $dy = ()$.

(A) $(1 + e^x)^x \left(\ln(1 + e^x) + \frac{xe^x}{1 + e^x} \right) dx$ (B) $(1 + e^x)^x \left(\ln(1 + e^x) + \frac{x}{1 + e^x} \right) dx$
(C) $(1 + e^x)^x \left(\ln(1 + e^x) + \frac{e^x}{1 + e^x} \right) dx$ (D) $\left(\ln(1 + e^x) + \frac{xe^x}{1 + e^x} \right) dx$

232 中等题 在下列括号内填入适当的函数, 使等式成立.

(1) $d() = x^2 dx$ (2) $d() = \cos 3x dx$
(3) $d() = \frac{1}{x \ln x} dx$ (4) $d() = \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$

综合提高题

233 综合题 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内有定义, 且 $|f(x)| \leq x^2$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处 ().

- (A) 不一定连续 (B) 连续但不一定可导
(C) 可导, 且 $f'(0)=0$ (D) 可导, 且 $f'(0) \neq 0$

234 综合题 求下列函数在给定点处的导数.

(1) $f(x) = 3x + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \arctan \frac{2x}{1+x}$, 求 $f'(0)$.

(2) $f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-99)(x-100)$, 求 $f'(100)$.

(3) $y = \frac{(x^3 + 1)\sqrt{3x+1}}{(x+1)^2 e^{2x}}$, 求 $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=1}$.

235 综合题 已知函数 $f(x)$ 可导, 且当 $h \rightarrow 0$ 时, $f(x_0 + 3h) - 3f(x_0 - h)$ 是 h 的等价无穷小量, 求 $f'(x_0)$.

236 综合题 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续可导, 且 $f(0)=1$, $f'(0)=4$, 则

$\lim_{x \rightarrow 0} [f(\sin x)]^{\frac{1}{2x}} = (\quad)$.

(A) 1

(B) e

(C) $e^{\frac{1}{2}}$

(D) e^2

237 综合题 设曲线 $y = f(x) = \frac{1}{1+x^{3n}}$ 在点 $(1, \frac{1}{2})$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n, 0)$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n)$.

238 综合题 设函数 $f(x)$ 连续可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(3x-1)+3}{x-1} = 3$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的法线方程.

239 综合题 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt[n]{1+x^{2n}}}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内 ().

(A) 处处可导

(B) 有一个不可导点

(C) 有两个不可导点

(D) 有三个不可导点

240 综合题 设函数 $f(x)$ 有连续的导函数, 且 $f(1)=0$, $f'(1)=1$, 若函数

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(e^{2x}) + \ln(1-4x)}{x}, & x \neq 0 \\ b, & x = 0 \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续, 则常数 } b = \underline{\hspace{2cm}}.$$

241 综合题 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^3 e^{n(x-1)} + 3ax + b}{e^{n(x-1)} + 1}$, 试解答下列问题.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 讨论 a 和 b 为何值时, 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导;

(3) 求导函数 $f'(x)$.

242 综合题 设函数 $f(x)$ 可导, $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$, 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=\frac{\pi}{2}}$.

243 综合题 设函数 $f(x)$ 可导, $y = f[1 + 3x^2]$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

244 综合题 已知两曲线 $y = f(x)$ 与 $y = \frac{3 + \ln x}{x}$ 在点 $x=1$ 处的切线相同, 设 $F(x) = f^2(e^x)$, 求 $F'(0)$.

245 综合题 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{1 - \cos x} = 2$, 求 $f''(0)$.

246 综合题 设函数 $f(x)$ 可导, $y = f(x^2)$, 求 $\frac{d^3 y}{dx^3}\bigg|_{x=0}$.

247 综合题 已知函数 $f(x)$ 任意阶可导, 且 $f'(x) = e^{f(x)}$, 则 $f(x)$ 的 $n(n > 1)$ 阶导数 $f^{(n)}(x) =$ ().
 (A) $e^{f(x)}$ (B) $e^{nf(x)}$ (C) $(n-1)!e^{nf(x)}$ (D) $n!e^{nf(x)}$

248 综合题 设函数 $f(x) = (x+1)^n e^{-x^2}$, 求 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(-1)$.

249 综合题 设 $x = \varphi(y)$ 是函数 $y = x + \ln x$ 的反函数, 求二阶导数 $\frac{d^2 x}{dy^2}$.

250 综合题 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} + \sin x + 1, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$,

- (1) 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性;
- (2) 求 $f'(x)$, 并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性;
- (3) 求 $f''(x)$.

251 综合题 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$ 确定, 求极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - f\left(\frac{2}{x}\right) \right).$$

252 综合题 已知函数 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f'(1) = 1$, 函数 $y = y(x)$ 由方程

$$xy - e^x + e^y = 0 \text{ 确定. 设函数 } z = f(e^y - \sin x), \text{ 求 } \frac{d^2 z}{dx^2}\bigg|_{x=0}.$$

253 综合题 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2t^3 + 3t + 1 \\ e^y \sin t - y + 2 = 0 \end{cases}$ 确定, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0}$.

254 综合题 求由参数方程 $\begin{cases} x = t - \ln \sqrt{1 + e^{2t}} \\ y = \arctan e^t \end{cases}$ 确定的函数 $y = y(x)$ 的三阶导数 $\frac{d^3 y}{dx^3}$.

255 综合题 求阿基米德螺线 $\rho = \theta$ 在点 $(\rho, \theta) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线方程与法线方程 (用直角坐标表示).

256 综合题 设函数 $f(u)$ 可微, 函数 $y = f(e^{2x})$ 在 $x=0$ 处当自变量取得增量 $\Delta x = -0.1$ 时, 相应的函数增量 Δy 的线性主部也为 -0.1 . 求导数 $f'(1)$.

257 综合题 已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f'(x) = \arctan \frac{1}{x}$. 设 $y = f\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$, 则微分 $dy|_{x=2} =$ _____.

258 综合题 已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f'(0) \neq 0$. 设 $y = y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x = f(\ln t) \\ y = f(t^3 - 1) \end{cases}$ 确定的函数, 求函数在 $t=1$ 时的微分 $dy|_{t=1}$.

第3章

微分中值定理与导数的应用

第一节 中值定理

一、罗尔定理

定理：若函数 $y=f(x)$ 满足

- (1) 在 $[a, b]$ 上连续
- (2) 在 (a, b) 内可导，则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ ，
- (3) $f(a)=f(b)$

使得 $f'(\xi)=0$ 。

几何意义：连续曲线 $y=f(x)$ 上的弧 $\widehat{AB}$ ，除端点外处处有不垂直于 x 轴的切线，且两个端点 A 、 B 处的纵坐标相等，则在弧 $\widehat{AB}$ 上至少有一条水平切线。

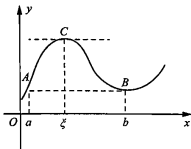


图 3-1

259 基础题 以下函数中在指定区间上满足罗尔定理的有 ()。

(A) $f(x)=|x|, [-1, 1]$

(B) $f(x)=x^2-1, [-1, 1]$

(C) $f(x)=xe^{-x}, [0, 1]$

(D) $f(x)=\frac{1}{x}, [-1, 1]$

260 基础题 验证罗尔定理对函数 $y=\ln \sin x$ 在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ 上的正确性。

261 基础题 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=\frac{\pi}{4}$ ，试证明方程 $(1+x^2)f'(x)=1$ 在 $(0, 1)$ 内至少存在一个根。

262 基础题 设 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 是满足 $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ 的实数，证明方程 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个根。

263 基础题 已知 $f(x)$ 二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, f(1) = 0$, 证明: 在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $f''(\xi) = 0$.

264 中等题 已知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上三阶可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 设 $F(x) = x^3 f(x)$, 证明: 在 $(0, 1)$ 内存在一点 ξ , 使得 $F'''(\xi) = 0$.

265 中等题 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 1, f(1) = \frac{1}{e}$, 证明: 方程 $f'(x) + e^{-x} = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少存在一个根.

266 中等题 设函数 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 在 $(0, a)$ 内可导, 且 $f(a) = 0$. 证明: 存在一点 $\xi \in (0, a)$, 使得 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$.

267 中等题 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(1) = 0$. 证明: 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = -\frac{2f(\xi)}{\xi}$.

268 中等题 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$, 对任意 $x \in (0, 1)$ 有 $f(x) \neq 0$. 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$.

269 综合题 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1, f(1) = 2$. 证明: 存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{e^{\xi}}{2f(\xi)}$.

270 综合题 设函数 $y = f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 在 $(0, 3)$ 内可导, 且 $f(0) + f(1) + f(2) = 3, f(3) = 1$. 证明: 必存在 $\xi \in (0, 3)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

271 综合题 设函数 $y = f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = f(1) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. 证明: (1) 存在 $\eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使得 $f(\eta) = \eta$; (2) 对任意实数 λ , 必存在 $\xi \in (0, \eta)$, 使得 $f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$.

272 综合题 设抛物线 $y = -x^2 + Bx + C$ 与 x 轴有两个交点 $x = a, x = b$ ($a < b$). 又函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$. 若曲线 $y = f(x)$ 与 $y = -x^2 + Bx + C$ 在 (a, b) 内有一个交点, 证明: 在 (a, b) 内存在一点 ξ 使得 $f''(\xi) + 2 = 0$.

二、拉格朗日定理

定理: 若函数 $y=f(x)$ 满足 $\begin{cases} \text{①在}[a, b]\text{上连续} \\ \text{②在}(a, b)\text{内可导} \end{cases}$, 则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a)$.

几何意义: 连续曲线 $y=f(x)$ 上的弧 $\widehat{AB}$, 除端点外处处有不垂直于 x 轴的切线, 则在弧 $\widehat{AB}$ 上至少有一条切线平行于弦 AB 所在直线.

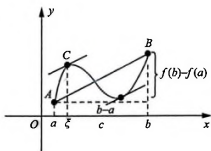


图 3-2

拉格朗日中值公式的几种等价等式:

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a) \Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),$$

$$f(b)=f(a)+f'[a+\theta(b-a)]\cdot(b-a) \quad (0<\theta<1),$$

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1).$$

两个推论:

- (1) 若 $f'(x)=0, \forall x \in I$, 则 $f(x) \equiv C$;
 (2) 若 $f'(x)=g'(x), \forall x \in I$, 则 $f(x)=g(x)+C$ (C 为常数).

273 基础题 以下函数在 $[-1, 1]$ 上满足拉格朗日中值定理的有 ().

- (A) $f(x)=\ln(1+x^2)$ (B) $f(x)=|x|$
 (C) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (D) $f(x)=\sin \frac{1}{x}$

274 基础题 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义, 在 (a, b) 内可导, 则有 ().

- (A) 当 $f(a)f(b)<0$ 时, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi)=0$
 (B) 当 $f(a)=f(b)$ 时, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi)=0$
 (C) 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$
 (D) 对任意 $\xi \in (a, b)$, 有 $\lim_{x \rightarrow \xi} [f(x)-f(\xi)]=0$

275 基础题 证明: 当 $0 < x < \pi$ 时, $\frac{\sin x}{x} > \cos x$.

276 基础题 设 $a > b > 0$ 时, 证明: $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$.

277 基础题 设 $x > 0$ 时, 证明: $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

278 中等题 证明: 当 $x > 1$ 时, $e^x > ex$.

279 基础题 证明: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

280 中等题 证明: $2 \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi (x \geq 1)$.

281 中等题 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 证明: 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $\frac{bf(b)-af(a)}{b-a} = f(\xi) + \xi f'(\xi)$.

282 综合题 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0, c]$ 上连续, 其导数 $f'(x)$ 在开区间 $(0, c)$ 内存在且单调递减, $f(0) = 0$. 试应用拉格朗日中值定理证明不等式:
 $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$, 其中常数 a 和 b 满足条件 $0 \leq a \leq b \leq a+b \leq c$.

三、柯西中值定理

定理: 若函数 $y = f(x)$ 和 $y = F(x)$ 满足 $\begin{cases} \text{①在}[a, b]\text{上连续;} \\ \text{②在}(a, b)\text{上可导;} \\ \text{③}F'(x) \neq 0, x \in (a, b). \end{cases}$

则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

说明: 若 $F(x) = x$, 则 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(\xi)}{1} \Rightarrow f(b)-f(a) = f'(\xi) \cdot (b-a)$, 即

为拉格朗日中值公式. 因此, 拉格朗日中值定理是柯西中值定理的特殊情形.

283 基础题 对于函数 $f(x) = \sin x, F(x) = 1 + \cos x$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上验证柯西中值定理的正确性.

284 基础题 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可微, $0 < a < b$, 试证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\frac{af(b)-bf(a)}{a-b} = f(\xi) - \xi f'(\xi)$.

285 基础题 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $0 < a < b$. 证明: 存

在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = (a^2 + ab + b^2) \frac{f'(\xi)}{3\xi^2}$.

286 中等题 证明: $\sin 1 = \cos \ln \xi (1 < \xi < e)$.

第二节 洛必达法则

一、洛必达法则计算 “ $\frac{0}{0}$ ” 或 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 不定式

定理 (洛必达法则): 设函数 $f(x), F(x)$ 满足如下条件.

- (1) 当 $x \rightarrow a$ 时, $f(x)$ 和 $F(x)$ 都趋于零 (或无穷大);
- (2) 在点 a 的某去心邻域内, $f'(x)$ 和 $F'(x)$ 都存在, 且 $F'(x) \neq 0$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为无穷大),

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

说明: (1) 洛必达法则用于 “ $\frac{0}{0}$ ” 或 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 型不定式的计算;

(2) 对于自变量的其他变化过程如 $x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty, x \rightarrow \infty$, 也有类似结论;

(3) 若条件满足, 可以反复使用洛必达法则求解;

(4) 洛必达法则不是万能的, 当 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 不存在也不是无穷大时, 不能断定 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)}$ 也不存在, 此时洛必达法则失效, 寻找其他方法求解.

287 基础题 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

288 基础题 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$.

289 基础题 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1 + \ln x}{e^x - e}$.

290 基础题 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + e^x}{xe^x}$.

291 基础题 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x}$.

292 基础题 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x \ln x)}{x^a} (a > 0)$.

293 基础题 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{1 - \sqrt{1 - x^2}}$.

294 基础题 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\ln(1 + 2x^3)}$.

295 中等题 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{\sin x (e^{2x} - 1) \ln(1 + \tan^2 x)}$.

296 中等题 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{c \ln(1 - 2x) + d(1 - e^{-x^2})} = 2$, 其中 $a^2 + b^2 \neq 0$, 则必有 ().

(A) $b = 4d$

(B) $b = -4d$

(C) $a = 4c$

(D) $a = -4c$

297 中等题 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x}$.

298 中等题 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$.

二、洛必达法则计算其他类型的不定式

基本思路: 先将其他类型不定式转化为 “ $\frac{0}{0}$ ” 或 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 型不定式, 然后使用洛必达法则进行计算. 常用的类型如下.

(1) “ $\infty - \infty$ ” 型通分化成 “ $\frac{0}{0}$ ” 或 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 型;

(2) “ $0 \cdot \infty$ ” 型, 取其中一个因式的倒数放分母, 化成 “ $\frac{0}{0}$ ” 或 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 型;

(3) “ $0^0, \infty^0, 1^\infty$ ” 型, 利用 $\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{g(x) \ln f(x)}$ 进行恒等变形.

299 基础题 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right)$.

300 基础题 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-\lambda x}$ (n 为正整数, $\lambda > 0$).

301 基础题 求 $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \cdot \tan \frac{\pi}{2} x$.

302 基础题 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$.

303 中等题 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$.

304 中等题 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right)$.

305 中等题 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$.

306 中等题 求 $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

307 中等题 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{\sin x}}$.

308 中等题 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

309 综合题 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{1}{2}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

310 综合题 若 $a > 0, b > 0$ 均为常数, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$.

三、洛必达法则的综合应用

311 综合题 设 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{\tan x} - e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小, 求 n .

312 综合题 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 求 a .

313 综合题 已知 $f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{x^2}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 上连续, 求 a .

314 综合题 设 $f(x) = \frac{1}{\pi x} + \frac{1}{\sin \pi x} - \frac{1}{\pi(1-x)}, x \in [\frac{1}{2}, 1)$. 试补充定义 $f(1)$ 使得 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上连续.

315 综合题 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n = 1, 2, \dots)$, (1) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求该极限; (2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

第三节 泰勒公式

一、泰勒中值定理

泰勒定理: 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 点具有直到 $n+1$ 阶导数, 那么存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0, \delta)$, 使 $\forall x \in U(x_0, \delta)$, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \quad ①$$

$$\text{其中 } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}). \quad ②$$

说明: 公式①称为 $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式, 公式②称为 n 阶泰勒公式的拉格朗日型余项. 在不需要余项的精确表达时, 泰勒公式可写为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o[(x-x_0)^n]$$

其中 $o[(x-x_0)^n]$ 称为 n 阶泰勒公式的佩亚诺型余项.

麦克劳林公式: 令 $x_0 = 0$, 则得如下麦克劳林公式:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (\xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}) \quad ③$$

上式中令 $\xi = \theta x (0 < \theta < 1)$, 有等价形式如下:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1) \quad ④$$

不需要余项的精确表达时, 亦可写为

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \quad ⑤$$

函数 $f(x)$ 的泰勒公式或麦克劳林公式的步骤:

- (1) 求出函数的各阶导数: $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x), f^{(n+1)}(x)$
- (2) 求出函数及各阶导数在点 x_0 (泰勒公式) 或点 0 (麦克劳林公式) 处的函数值;
- (3) 根据题目要求及公式①③④⑤, 写出所求.

316 基础题 求 $f(x) = e^x$ 的带有拉格朗日型和佩亚诺型余项的麦克劳林公式.

二、利用泰勒定理求极限

317 基础题 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{e^x - x - 1}$.

318 基础题 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\tan^3 x}$.

319 基础题 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2}$.

320 基础题 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax+bx^2)}{x^2} = 2$, 则 ().

(A) $a=1, b=-\frac{5}{2}$ (B) $a=0, b=-2$

(C) $a=0, b=-\frac{5}{2}$ (D) $a=1, b=-2$

321 中等题 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{-x^2}) \sin x^2}$.

322 中等题 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

323 综合题 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2} = ()$.

(A) 0 (B) 6 (C) 36 (D) ∞

三、利用泰勒公式进行无穷小的比较

324 基础题 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - (ax^2 + bx + 1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小, 则 ().

(A) $a=\frac{1}{2}, b=1$ (B) $a=1, b=1$

(C) $a=-\frac{1}{2}, b=1$ (D) $a=-1, b=1$

325 基础题 试证明当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$ 是 x 的几阶无穷小?

四、利用泰勒定理求高阶导数

326 基础题 求函数 $y = \ln(1-3x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0)$.

五、利用泰勒定理证明不等式和等式

327 基础题 证明 $e^x > 1+x$ ($x \neq 0$).

328 综合题 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-1)=0$, $f(1)=1, f'(0)=0$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (-1,1)$, 使得 $f'''(\xi)=3$.

329 综合题 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $f(0)=f(1)=0$, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值等于 -1 , 证明: 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f''(\xi) \geq 8$.

第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性

一、函数的单调性

单调性的判定: 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导,

若 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增;

若 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减.

单调区间的分界点: 单调区间的分界点只能出现在函数的不可导点或者导数为零的点(叫驻点)处.

函数的单调区间的判定步骤:

(1) 确定函数 $y=f(x)$ 的定义域;

(2) 求 $f'(x)$, 找出使 $f'(x)=0$ 和 $f'(x)$ 不存在的点;

(3) 用以上点将定义域分割为不同的小区间, 在每个小区间上利用判定定理判断函数的单调性.

330 基础题 讨论函数 $f(x)=x-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 的单调性.

331 基础题 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 证明不等式 $\tan x > x + \frac{1}{3}x^3$.

332 基础题 当 $x > 0$ 时, 证明不等式 $\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}$.

333 基础题 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且对任意 x_1, x_2 , 当 $x_1 > x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则 ().

(A) 对任意 $x, f'(x) > 0$

(B) 对任意 $x, f'(-x) \leq 0$

(C) 函数 $f(-x)$ 单调递增

(D) 函数 $-f(-x)$ 单调递增

334 中等题 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内, 方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$ ().

(A) 无实根

(B) 有且仅有一个实根

(C) 有且仅有两个实根

(D) 有无穷多根

335 中等题 当 a 取 () 时, 函数 $f(x) = x^3 - 3x - a$ 恰好有两个不同的零点.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

336 中等题 若 $3a^2 - 5b < 0$, 则方程 $x^5 - 2ax^3 + 3bx + 4c = 0$ ().

- (A) 无实根 (B) 有唯一实根
(C) 有三个不同实根 (D) 有五个不同实根

337 综合题 设 $f(x)$ 为可导函数, 且 $f''(x) > 0$, 则 $F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 在 (a, b) 内 ().

- (A) 有极大值 (B) 有极小值
(C) 单调递减 (D) 单调递增

338 综合题 设 $x > 0$, 常数 $a > e$, 证明 $(a+x)^a < a^{a+x}$.

339 综合题 设 $e < a < b < e^2$, 证明 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$.

二、曲线的凹凸性

凹凸性的判定: 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 内二阶导数存在, 则

- (1) 区间 I 内 $f''(x) > 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在区间 I 上是凹的;
- (2) 区间 I 内 $f''(x) < 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在区间 I 上是凸的.

凹凸区间的分界点: 凹凸区间的分界点只可能出现在函数的二阶导数不存在的点或者二阶导数为零的点处. 曲线上凹凸的分界点为拐点.

曲线的凹凸区间及拐点的判定步骤:

- (1) 确定函数 $y = f(x)$ 的定义域;
- (2) 求 $f''(x)$, 找出使 $f''(x) = 0$ 和 $f''(x)$ 不存在的点 (即可能的凹凸区间分界点);
- (3) 用以上点将定义域分割为不同的小区间, 在每个小区间上判断曲线的凹凸性.

340 基础题 讨论曲线 $f(x) = x^{\frac{8}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$ 的凹凸区间, 并求拐点.

341 基础题 判断 $f(x) = |1 + \sin x|$ 在区间 $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$ 内的图形 ().

- (A) 单调递增, 凹的 (B) 单调递减, 凸的
(C) 单调递增, 凸的 (D) 单调递减, 凹的

342 基础题 证明: 当 $x \neq y$ 时, $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$.

343 中等题 设 $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$, 求曲线的凹凸区间和拐点.

344 中等题 若点 $(0,1)$ 是曲线 $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ 的拐点, 则 ().

- (A) $a=1, b=0, c$ 为任意值 (B) $a \neq 0$ 的任意值, $b=0, c=1$
(C) a, b 为任意值, $c=1$ (D) $a=1, b=-3, c=1$

345 中等题 若 $f(-x) = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$), 且在 $(-\infty, 0)$ 内 $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$, 则在 $(0, +\infty)$ 内有 ().

- (A) $f'(x) > 0, f''(x) < 0$ (B) $f'(x) > 0, f''(x) > 0$
(C) $f'(x) < 0, f''(x) < 0$ (D) $f'(x) < 0, f''(x) > 0$

346 综合题 设 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0, f'''(x_0) > 0$, 则下列选项正确的是 ().

- (A) $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值 (B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
(C) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值 (D) $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

347 综合题 设函数 $f(x)$ 满足关系 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$, 且 $f'(0) = 0$, 则下列选项正确的是 ().

- (A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
(C) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
(D) $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

348 综合题 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导, $y = f(x)$ 的图形如图 3-3, 则导数 $y = f'(x)$ 的图形为 ().

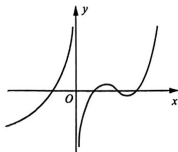
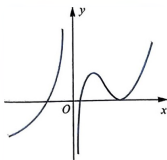
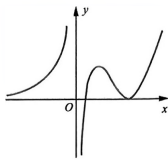


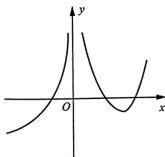
图 3-3



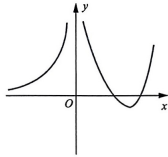
(A)



(B)



(C)



(D)

第五节 函数的极值和最值

一、函数的极值

极值的定义：设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，若对 $\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ ，有 $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$)，则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的极大值（极小值）；点 x_0 称为 $f(x)$ 的极大值点（极小值点）。函数的极大值与极小值统称为极值，极大值点和极小值点统称为极值点。

极值存在的必要条件：若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0) = 0$ （即 x_0 是驻点）。

极值存在的充分条件：

（第一充分条件） 设 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，且在去心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 内可导，且 $f'(x_0) = 0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在。

(1) 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时， $f'(x) > 0$ ；当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时， $f'(x) < 0$ ，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值（左增右减 $\Rightarrow$ 极大值）。

(2) 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时， $f'(x) < 0$ ；当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时， $f'(x) > 0$ ，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值（左减右增 $\Rightarrow$ 极小值）。

(3) 当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 时 $f'(x)$ 不变号，则 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值。

（第二充分条件） 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0) = 0$ ，

- (1) 若 $f''(x_0) < 0$, 则 $f(x_0)$ 是极大值.
 (2) 若 $f''(x_0) > 0$, 则 $f(x_0)$ 是极小值.
 (3) 若 $f''(x_0) = 0$, 则不能判断 $f(x_0)$ 是否为极值.

求极值的步骤:

- (1) 确定 $y = f(x)$ 的定义域;
 (2) 找出可能的极值点, 即 $f'(x) = 0$ 及 $f'(x)$ 不存在的点;
 (3) 根据第一或第二充分条件进行判断.

349 基础题 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处二阶可导, 且 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值, 则以下结论正确的是 ().

- (A) $f'(x_0) < 0$ (B) $f'(x_0) > 0$
 (C) $f'(x_0) = 0$ (D) $f'(x_0) = 0$ 且 $f''(x_0) > 0$

350 基础题 求函数 $f(x) = 2x - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 1$ 的极值.

351 基础题 当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 函数 $y = x \cdot 2^x$ 取得极小值.

352 中等题 设函数 $f(x)$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且其导函数的图像如图 3-4, 则如下结论正确的是 ().

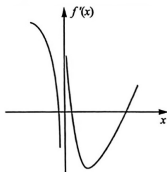


图 3-4

- (A) 函数 $f(x)$ 有两个极大值和一个极小值
 (B) 函数 $f(x)$ 有两个极小值和一个极大值
 (C) 函数 $f(x)$ 有三个极大值和一个极小值
 (D) 函数 $f(x)$ 有两个极大值和两个极小值

353 中等题 设函数 $f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$, 若 $f'(x_0) = 0$ ($x_0 \neq 0$), 则 ().

- (A) $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值
 (B) $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值
 (C) $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

(D) $f(x_0)$ 不是函数 $f(x)$ 的极值, $(x_0, f(x_0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

354 中等题 设 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续, 又 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x-a} = -1$, 则 () .

- (A) $x=a$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点
 (B) $x=a$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点
 (C) $(a, f(a))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
 (D) $x=a$ 不是函数 $f(x)$ 的极值点, $(a, f(a))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

355 中等题 设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = -1$, 则在 $x=a$ 点处 ()

- (A) $f(x)$ 的导数存在, 且 $f'(a) \neq 0$ (B) $f(x)$ 取得极大值
 (C) $f(x)$ 取得极小值 (D) $f(x)$ 的导数不存在

356 综合题 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0 \\ xe^x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$, 并求 $f(x)$ 的极值.

357 综合题 设函数 $y = y(x)$ 是由方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 确定的, 试求 $y = y(x)$ 的驻点, 并判断是否为函数的极值点.

358 综合题 求 a 的取值范围, 使函数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 - ax - 1$ 无极值.

二、求函数的最值

最值的定义: 设函数 $f(x)$ 在区间 I 内有定义, $x_0 \in I$, 若对 $\forall x \in I$, 有 $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$), 则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大值 (最小值); 点 x_0 称为 $f(x)$ 在区间 I 上的最大值点 (最小值点). 函数的最大值与最小值统称为最值, 最大值点和最小值点统称为最值点.

求最值的一般步骤: 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导.

- (1) 求 $f'(x)$, 找到 $f(x)$ 在 (a, b) 内的驻点和不可导点.
- (2) 计算 $f(x)$ 在以上驻点及不可导点处的函数值, 以及端点处的函数值 $f(a)$ 和 $f(b)$.
- (3) 比较以上函数值的大小, 求出最大值与最小值.

特别地: (1) 连续函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上单调, 则最值必在端点处取得;

- (2) 可导函数 $f(x)$ 在区间 I 内仅有一个极大 (小) 值, 则该极大 (小) 值就是最大 (小) 值;

(3) 在应用题中, 根据实际情况可以判断最值存在, 且仅存在一个驻点 (没有不可导点), 则此驻点就是所求的最值点.

359 基础题 求函数 $f(x) = x + \sqrt{1-x}$ 在 $[-5, 1]$ 上的最大值和最小值.

360 中等题 作半径为 r 的球的外切正圆锥, 求此圆锥的高 h 为何值时, 其体积 V 最小, 并求出该最小值.

361 中等题 某企业在一个月内存生产某产品 Q 个单位时, 总成本 $C(Q) = 6Q + 200$ (万元), 得到的总收益 $R(Q) = 12Q - 0.01Q^2$ (万元), 问在一个月内存生产多少单位的产品获得的利润最大? 最大利润是多少?

362 中等题 已知某企业的总收入函数为 $R(x) = 26x - 2x^2 - 4x^3$, 总成本函数为 $C(x) = 8x + x^2$, 其中 x 表示产品的产量. 求利润函数、边际收入函数、边际成本函数以及企业获得最大利润时的产量和最大利润.

三、利用函数的最值证明不等式

363 基础题 设 p 和 q 是大于 1 的常数, 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 证明: 对于任意 $x > 0$, 有

$$\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q} \geq x.$$

364 综合题 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 且 $f''(x) > 0$. 证明 $f(x) \geq x$.

第六节 函数图形的描绘

一、函数的渐近线

水平渐近线: 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ (或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$), 则直线 $y = A$ 为曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线.

几何意义: 曲线 $y = f(x)$ 向左 (或向右, 或同时向左右) 无限延伸时, $f(x)$ 无限接近于直线 $y = A$.

铅垂渐近线: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$), 则直线 $x = x_0$ 为曲线 $y = f(x)$ 的铅垂渐近线 (其中 ∞ 亦可以为 $+\infty$ 或 $-\infty$).

几何意义: 曲线 $y = f(x)$ 向上 (或向下, 或同时向上下) 无限延伸时, $f(x)$

无限接近于(不能相交、不能穿越)直线 $x = x_0$.

斜渐近线: 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, 则直线 $y = ax + b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线. 其中, $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$, ∞ 亦可以为 $+\infty$ 或 $-\infty$.

几何意义: 曲线 $y = f(x)$ 无限接近于(不能相交、不能穿越)直线 $y = ax + b$.

365 基础题 求曲线 $y = \frac{x+1}{x}$ 的水平渐近线.

366 基础题 求曲线 $y = \frac{1}{1-x^2}$ 的铅垂渐近线.

367 基础题 求曲线 $y = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$ 的水平渐近线和铅垂渐近线.

368 基础题 求曲线 $y = \frac{x^2}{x-1}$ 的斜渐近线.

369 中等题 求曲线 $y = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线.

370 中等题 当 $x > 0$ 时, 曲线 $y = x \sin \frac{1}{x}$ ().

- (A) 有且仅有水平渐近线
- (B) 有且仅有铅垂渐近线
- (C) 既有水平渐近线, 又有铅垂渐近线
- (D) 既无水平渐近线, 又无铅垂渐近线

371 中等题 曲线 $f(x) = xe^{\frac{1}{x^2}}$ ().

- (A) 仅有水平渐近线
- (B) 仅有铅垂渐近线
- (C) 既有水平渐近线, 又有铅垂渐近线
- (D) 既有铅垂渐近线, 又有斜渐近线

372 综合题 曲线 $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 的渐近线的条数为 ().

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3

373 综合题 曲线 $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x^2 - x + 2}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线的条数为 ().

- (A) 4
- (B) 3
- (C) 2
- (D) 1

二、函数作图

作图步骤:

- (1) 求出函数 $f(x)$ 的定义域或者明确题目指定的区域;
- (2) 判断函数的奇偶性、周期性 (由此可以缩小作图范围);
- (3) 求渐近线;
- (4) 求 $f'(x)$, $f''(x)$, 找出作图的关键点: 可能的极值点与可能的拐点;
- (5) 列表讨论函数的单调性和极值点及凹凸性和拐点;
- (6) 补充一些特殊点, 如边界点、无意义点、与坐标轴的交点等;
- (7) 根据上面所获取信息作图.

374 基础题 作函数 $y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ 的图形.

375 基础题 作函数 $y = \frac{\cos x}{\cos 2x}$ 的图形.

第七节 曲率

一、曲率

定义: 曲线上一处处的曲率是曲线在该点处弯曲程度的量度.

曲率在 3 种不同方程下的计算公式:

$$(1) \text{ 曲线方程为 } y = y(x) \text{ 时, 曲率 } K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$(2) \text{ 曲线方程为 } \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \text{ 时, 曲率 } K = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}};$$

$$(3) \text{ 曲线方程为 } \rho = \rho(\theta), \text{ 曲率 } K = \frac{|\rho^2(\theta) + 2\rho'^2(\theta) - \rho(\theta)\rho''(\theta)|}{[\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)]^{\frac{3}{2}}}.$$

376 基础题 计算曲线 $xy = 1$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率.

二、曲率半径与曲率圆

曲率半径: 曲线在某点处的曲率半径 ρ 为曲线在该点处的曲率 K 的倒数, 即

$$\rho = \frac{1}{K}.$$

曲率中心: 曲线 $y = y(x)$ 在某点处的曲率中心坐标 (α, β) 为

$$\alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

曲率圆: 曲线 $y = y(x)$ 在某点处的曲率圆为 $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2$.

377 基础题 计算曲线 $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ 在点 t_0 处的曲率及曲率半径.

378 基础题 求抛物线 $y = 2x^2 - 3x + 3$ 在 $M(1, 2)$ 处的曲率圆方程.

379 综合题 设 $\rho = \rho(x)$ 是抛物线 $y = \sqrt{x}$ 上任一点 $M(x, y)(x \geq 1)$ 处的曲率半径, $s = s(x)$ 是该抛物线上介于点 $A(1, 1)$ 与 M 之间的弧长, 计算 $3\rho \frac{d^2\rho}{ds^2} - (\frac{d\rho}{ds})^2$ 的值.

第4章

不定积分

第一节 不定积分的概念与性质

一、原函数

定义: 在区间 I 上, 若可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$, 即对任一 $x \in I$, 有

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } dF(x) = f(x)dx,$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

定理 1: 如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $F(x) + C$ 是 $f(x)$ 的所有原函数 (其中 C 为任意常数).

定理 2: (原函数存在定理) 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则 $f(x)$ 在区间 I 上存在原函数.

380 基础题 设 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的一个原函数为 $\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, 求 $f'(x)$.

381 基础题 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln x (x > 0)$, 则它的另一个原函数为 ().

(A) $\ln(ax) (a > 0, x > 0)$

(B) $\frac{1}{a} \ln x (x > 0)$

(C) $\ln(a+x) (a+x > 0)$

(D) $\frac{1}{2} (\ln x)^2 (x > 0)$

382 中等题 证明函数 $\arcsin(2x-1)$ 和 $2\arcsin\sqrt{x}$ 是同一函数的原函数, 并求出它们之间相差的常数.

383 中等题 判断函数 $F(x) = \begin{cases} x^3 + x + 1, & x > 0 \\ x^2, & x \leq 0 \end{cases}$ 是否是 $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1, & x > 0 \\ 2x, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的原函数并说明理由.

384 基础题 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 (a, b) 上的原函数, 则 $f(x) + F(x)$ 在 (a, b) 上 ().

(A) 可导

(B) 连续

(C) 存在原函数

(D) 是初等函数

385 中等题 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ \cos x, & x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则在 $(-\infty, +\infty)$ 上 ().

- (A) $f(x)$ 与 $g(x)$ 都存在原函数
 (B) $f(x)$ 与 $g(x)$ 都不存在原函数
 (C) $f(x)$ 存在原函数, $g(x)$ 不存在原函数
 (D) $f(x)$ 不存在原函数, $g(x)$ 存在原函数

二、不定积分的定义与性质

定义: 函数 $f(x)$ 的所有原函数, 称为 $f(x)$ 的不定积分, 记为 $\int f(x)dx$. 即如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

评注

求不定积分 $\int f(x)dx$ 时, 结果切记要加上任意常数 C . 没有 C , 求出的只是一个原函数, 而不是 $f(x)$ 的不定积分.

性质 1: 积分运算与微分运算的互逆关系.

$$(1) \left(\int f(x)dx \right)' = f(x) \text{ 或 } d \int f(x)dx = f(x)dx.$$

$$(2) \int f'(x)dx = f(x) + C \text{ 或 } \int df(x) = f(x) + C.$$

性质 2: 积分线性运算法则.

$$(1) \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

$$(2) \int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad (k \neq 0 \text{ 且为常数}).$$

386 基础题 设 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$, C 为任意常数, 则不定积分 $\int f(x)dx =$ ().

- (A) $1 + \sin x + C$ (B) $1 - \sin x + C$ (C) $1 + \cos x + C$ (D) $1 - \cos x + C$

387 中等题 设曲线经过点 $(e, -1)$, 且其上任一点处切线的斜率为 $\frac{\ln x}{x}$, 求此曲线的方程.

388 基础题 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可微, 则 $d \left(\int f'(x)dx \right) =$ ().

- (A) $f(x)$ (B) $f(x)dx$ (C) $f(x) + C$ (D) $f'(x)dx$

389 基础题 以下结论正确的是 ().

- (A) $d \left(\int f(x)dx \right) = f(x)$ (B) $\left(\int f(x)dx \right)' = \int f'(x)dx$

(C) $\int f'(x) dx = f(x)$

(D) $d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx$

390 中等题 在区间 (a, b) 内, 若 $f'(x) = g'(x)$, 则下列各式中正确的是 ().

(A) $f(x) = g(x)$

(B) $f(x) = g(x) + 1$

(C) $\left(\int f(x) dx\right)' = \left(\int g(x) dx\right)'$

(D) $\int df(x) = \int dg(x)$

391 中等题 $\int d\left[\int df(x)\right] = \underline{\hspace{2cm}}.$

392 中等题 设 $f'(\sin^2 x) = \cos(2x) + \tan^2 x$, 当 $0 < x < 1$ 时, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、基本积分公式

基本积分公式是计算积分的基础, 必须熟记.

393 基础题 求不定积分 $\int \frac{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}-3x}{x\sqrt{1-x^2}} dx.$

394 基础题 求不定积分 $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx.$

395 基础题 求不定积分 $\int \frac{1-2\cos x}{1-\cos(2x)} dx.$

396 基础题 求不定积分 $\int \left(\frac{1}{5^{-x}e^x} + \frac{1-e^{2x}}{1+e^x}\right) dx.$

397 基础题 求不定积分 $\int \left(6\sqrt{x} + 5e^x + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx.$

398 中等题 求不定积分 $\int \left(\frac{x^4}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx.$

第二节 换元积分法

一、第一类换元积分法 (凑微分法)

定理: 若 $\int f(u) du = F(u) + C$, 且 $u = \varphi(x)$ 可导, 则

$$\int g(x)dx = \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) \stackrel{\varphi(x)=u}{=} \int f(u)du = F(u) + C \stackrel{u=\varphi(x)}{=} F[\varphi(x)] + C.$$

评注

用第一类换元积分法, 首先要在被积函数表达式中确定一个复合函数 $f[\varphi(x)]$, 使函数 f 成为基本积分公式中的被积函数, 然后观察剩余部分是否为 $\varphi'(x)dx$, 若是, 则可直接凑微分; 若不是, 则需要通过恒等变形凑出 $\varphi'(x)dx$. 这类题目的难度弹性较大, 务必熟记基本微分公式、基本积分公式以及常见的凑微分形式.

399 基础题 求下列不定积分.

$$(1) \int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}} \quad (2) \int \frac{x+1}{x^2+2x+5} dx \quad (3) \int \frac{xdx}{(2x+3)^2}$$

400 基础题 求下列不定积分.

$$(1) \int \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad (2) \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (3) \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

401 基础题 求下列不定积分.

$$(1) \int x^2 e^x dx \quad (2) \int \frac{xdx}{1+x^4} \\ (3) \int \frac{x^2 dx}{(2x^3-1)^n} \quad (n \neq 1) \quad (4) \int x f'(x^2) f'(x^2) dx$$

402 基础题 求下列不定积分.

$$(1) \int \sin^2 x \cos^2 x dx \quad (2) \int \sin^5 x \cos^2 x dx \\ (3) \int \cot^3 x \csc x dx \quad (4) \int \sin(5x) \sin(3x) dx$$

403 基础题 求下列不定积分.

$$(1) \int \frac{dx}{a^2+x^2} (a \neq 0) \quad (2) \int \frac{dx}{a^2-x^2} (a \neq 0)$$

404 基础题 求下列不定积分.

$$(1) \int e^{\tan x} \sec^2 x dx \quad (2) \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$$

405 基础题 求下列不定积分.

$$(1) \int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} \quad (2) \int \frac{dx}{x \ln x (1 + \ln(\ln x))^2} \quad (3) \int \frac{1 + \ln x}{1 + x^2 \ln^2 x} dx$$

406 基础题 求下列不定积分.

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^2}$

(2) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$

(3) $\int \frac{\arcsin(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}} dx$

407 基础题 求不定积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.**408 基础题** 求不定积分 $\int \frac{\cos x}{9+\sin^2 x} dx$.**409 基础题** 求不定积分 $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}} dx$.**410 中等题** 求不定积分 $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx$.**411 中等题** 求不定积分 $\int \frac{x \tan(\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}} dx$.**412 中等题** 求不定积分 $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+1}{1+x^2}} dx$.**413 中等题** 求不定积分 $\int \frac{e^{\sqrt{1+\sin x}} \cos x}{\sqrt{1+\sin x}} dx$.**414 中等题** 求不定积分 $\int \frac{x + (\arctan x)^2}{1+x^2} dx$.**415 中等题** 求不定积分 $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} dx$.**416 中等题** 求不定积分 $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}$.**417 中等题** 求不定积分 $\int \frac{dx}{1+e^x}$.**418 中等题** 求不定积分 $\int \frac{\ln(x+1) - \ln x}{x(x+1)} dx$.**419 中等题** 求不定积分 $\int \frac{\ln^2 x}{x(1+\ln^2 x)} dx$.

420 中等题 求不定积分 $\int \frac{x dx}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$.

421 中等题 求不定积分 $\int \frac{e^{\sin(2x)} \sin^2 x}{e^{2x}} dx$.

422 中等题 求不定积分 $\int \frac{\ln(\tan x)}{\sin(2x)} dx$.

423 中等题 求不定积分 $\int \frac{x + \sin x \cos x}{(\cos x - x \sin x)^2} dx$.

424 中等题 求不定积分 $\int \frac{\cos^2 x - \sin x}{\cos x (1 + e^{\sin x} \cos x)} dx$.

425 中等题 求不定积分 $\int \frac{(1 + \sin x)e^x}{1 + \cos x} dx$.

426 中等题 设 $\int f(x) dx = \ln(\sin x) + C$, 求 $\int xf(1-x^2) dx$.

427 中等题 证明 $\int \frac{xf'(x) - (1+x)f(x)}{x^2 e^x} dx = \frac{f(x)}{x} e^{-x} + C$.

二、第二类换元法

定理: 设 $x = \varphi(t)$ 单调、可导, 且 $\varphi'(t) \neq 0$, $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt = F(t) + C$, 则

$$\int f(x) dx \stackrel{x=\varphi(t)}{=} \int f[\varphi(t)] d\varphi(t) = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt = F(t) + C \stackrel{t=\varphi^{-1}(x)}{=} F[\varphi^{-1}(x)] + C,$$

其中, $\varphi^{-1}(x)$ 是 $x = \varphi(t)$ 的反函数.

常见类型

(1) 被积函数中含 $\sqrt{a^2 - x^2}$ 、 $\sqrt{x^2 + a^2}$ 、 $\sqrt{x^2 - a^2}$ 之一, 可分别采用三角代换 $x = a \sin t$ (或 $x = a \cos t$)、 $x = a \tan t$ (或 $x = a \cot t$) 与 $x = a \sec t$.

(2) 被积函数中的根式不具备平方和或平方差结构时, 可试用根式代换: 若只含 $\sqrt[n]{ax+b}$ 或者 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, 则直接令此根式等于 t ; 若同时含 $\sqrt[n]{ax+b}$ 和 $\sqrt[n]{ax+b}$, 则令 $\sqrt[n]{ax+b} = t$, 其中 k 为 m 和 n 的最小公倍数.

(3) 被积函数是分式, 其分母关于 x (或 $x-a$) 的最高次数比分子的最次数至少高两次, 可试用倒代换 $x = \frac{1}{t}$, 以降低分母次数.

(4) 被积函数含 a^x 及其幂时, 可作指数代换 $a^x = t$; 若被积函数含 $\sqrt{a^x \pm a}$, 则令 $\sqrt{a^x \pm a} = t$ 去掉根式.

428 基础题 求不定积分 $\int x^3 \sqrt{4-x^2} dx$.

429 基础题 求不定积分 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

430 基础题 求不定积分 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} (a>0)$.

431 基础题 求不定积分 $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

432 基础题 求不定积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$.

433 基础题 求不定积分 $\int \frac{1}{3-x} \sqrt{\frac{5-x}{x-1}} dx$.

434 基础题 求不定积分 $\int \frac{dx}{e^x + e^{2x}}$.

435 基础题 求不定积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

436 基础题 求不定积分 $\int \frac{dx}{x(x^6+1)}$.

437 基础题 求不定积分 $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2+1}}$.

438 中等题 求不定积分 $\int \frac{1+x}{x^2+x \ln x} dx$.

439 中等题 求不定积分 $\int \sqrt{2x-x^2} dx$.

440 中等题 求不定积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

441 中等题 求不定积分 $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

第三节 分部积分法

分部积分公式

定理: 设 $u(x), v(x)$ 具有连续一阶导数, 则

$$\int u dv = uv - \int v du \quad \text{或} \quad \int uv' dx = uv - \int vu' dx.$$

选择 $u(x), v(x)$ 的原则: 一般按“反对幂指三”顺序, 前为 u 后为 v' . 即

形如 $\int p_n(x)e^{\alpha x} dx, \int p_n(x)\sin(ax) dx, \int p_n(x)\cos(ax) dx$ 的积分, 把 $p_n(x)$ 当 $u(x)$, $e^{\alpha x}, \sin(ax), \cos(ax)$ 当 $v'(x)$, 其中 $p_n(x)$ 是 n 次多项式;

形如 $\int p_n(x)\ln x dx, \int p_n(x)\arctan x dx, \int p_n(x)\arcsin x dx$ 的积分, 把 $\ln x, \arctan x, \arcsin x$ 当 $u(x)$, $p_n(x)$ 当 $v'(x)$, 其中 $p_n(x)$ 是 n 次多项式;

形如 $\int e^{\alpha x}\sin(bx)dx, \int e^{\alpha x}\cos(bx)dx$ 的积分, 把 $\sin(bx), \cos(bx)$ 当 $u(x)$, 连续两次把 $e^{\alpha x}$ 当 $v'(x)$, 分部积分后还原, 求得原不定积分.

442 基础题 求下列不定积分.

(1) $\int xe^{2x} dx$

(2) $\int x^2 \cos x dx$

(3) $\int (x^2 - x) \sin x dx$

443 基础题 求下列不定积分.

(1) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$

(2) $\int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$

(3) $\int \arctan x dx$

444 基础题 求下列不定积分.

(1) $\int e^{-x} \cos x dx$

(2) $\int x \cot^2 x dx$

(3) 设 $\int f(x) dx = (1 + \sin x) \ln x + C$, 求 $\int xf'(x) dx$.

445 基础题 求不定积分 $\int x \ln(x+1) dx$.

446 基础题 求不定积分 $\int \arcsin(x+1) dx$.

447 基础题 求不定积分 $\int \frac{x \cot x}{\sin^2 x} dx$.

448 基础题 求不定积分 $\int \frac{x \cos^4\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^3 x} dx$.

449 基础题 求不定积分 $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx$.

450 基础题 求不定积分 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

451 基础题 求不定积分 $\int e^{2x} \sin(3x) dx$.

452 基础题 求不定积分 $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$.

453 基础题 求不定积分 $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

454 中等题 求不定积分 $\int x \arcsin x dx$.

455 中等题 求不定积分 $\int \frac{1}{x^2} \arctan x dx$.

456 中等题 求不定积分 $\int \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx$.

457 中等题 求不定积分 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$.

458 中等题 求不定积分 $\int \frac{\ln x}{\sqrt{1+x}} dx$.

459 中等题 求不定积分 $\int \arctan \sqrt{x} dx$.

460 中等题 求不定积分 $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx$.

461 中等题 求不定积分 $\int \frac{(1+x) \sin x + \cos x}{(1+x)^2} dx$.

462 中等题 设 $f'(e^x) = \cos x$, 求 $f(x)$.

463 中等题 设 n 为自然数, $I_n = \int \sec^n x dx$,
证明 $I_n = \frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}, n=2, 3, \dots$.

第四节 有理函数的积分

定义: 形如 $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 的函数称为有理函数, 其中 $P_n(x)$ 和 $Q_m(x)$ 分别为 x 的 n 次多项式和 m 次多项式.

当 $m \leq n$ 时, $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 称为假分式; 当 $m > n$ 时, $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 称为真分式.

评注

(1) 因为假分式总能化为整式和真分式之和, 整式可以逐项积分, 所以讨论有理函数的积分, 只需讨论真分式的积分.

(2) 对于有理真分式, 常用下述命题先将有理真分式化为部分分式之和, 再用待定系数法或赋值法确定部分分式之和的待定系数, 最后分项积分求出积分结果.

命题 1: 若分母中含 k 重一次因式 $(x-a)^k$, 则有理真分式的分解中对应应有 k 项的和 $\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$; 当 $k=1$ 时, 只有一项 $\frac{A}{x-a}$.

若分母中含 k 重二次因式 $(x^2+px+q)^k$, 则有理真分式的分解中对应应有 k 项的和 $\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_kx+C_k}{(x^2+px+q)^k}$; 当 $k=1$ 时, 只有一项 $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$.

命题 2: 任一有理真分式的积分都可化为下述 4 种类型的积分:

$$(1) \int \frac{A}{x-a} dx; (2) \int \frac{A}{(x-a)^k} dx; (3) \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx; \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k} dx.$$

其中 A, B, C 为待定系数, $k > 1$, $p^2 - 4q < 0$.

464 基础题 求不定积分 $\int \frac{x^3}{x^2+1} dx$.

465 基础题 求不定积分 $\int \frac{3x-2}{x^2+3x-4} dx$.

466 基础题 求不定积分 $\int \frac{2x^2-x+1}{(x+1)(x-3)(x+2)} dx$.

467 基础题 求不定积分 $\int \frac{1}{x(x-1)^2} dx$.

468 基础题 求不定积分 $\int \frac{x^2+1}{(x+1)(x^2-1)} dx$.

469 基础题 求不定积分 $\int \frac{dx}{(x^2+1)(1+2x)}.$

470 基础题 求不定积分 $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+5} dx.$

471 基础题 求不定积分 $\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}.$

472 中等题 求不定积分 $\int \frac{2x^3+2x^2+5x+5}{x^4+5x^2+4} dx.$

473 中等题 求不定积分 $\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2} dx.$

474 中等题 求不定积分 $\int \frac{x^4+1}{1+x^6} dx.$

475 中等题 求不定积分 $\int \frac{dx}{x^4-x^6}.$

476 中等题 求不定积分 $\int \frac{1+2x^4}{x^5(1+x^4)^2} dx.$

477 中等题 求不定积分 $\int \frac{dx}{x^4+1}.$

综合提高题

478 综合题 下列说法不正确的是 ().

- (A) 一切初等函数在其定义区间内都存在原函数
- (B) 不连续的函数也可能存在原函数
- (C) 奇函数的原函数都是偶函数
- (D) 偶函数的原函数都是奇函数

479 综合题 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则在开区间 (a, b) 内, $f(x)$ 必有 ().

- (A) 导函数
- (B) 原函数
- (C) 最大值或最小值
- (D) 极值

480 综合题 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的一个原函数是 ().

(A) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1 \end{cases}$ (B) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geq 1 \end{cases}$

(C) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geq 1 \end{cases}$ (D) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

481 综合题 求不定积分 $\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx$.

482 综合题 求不定积分 $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx$.

483 综合题 求不定积分 $\int \frac{1+x}{x(1+xe^x)} dx$.

484 综合题 求不定积分 $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2} dx$.

485 综合题 求不定积分 $\int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx$.

486 综合题 求不定积分 $\int \frac{x + \sin x \cos x}{(x \sin x + \cos x)^2} dx$.

487 综合题 求不定积分 $\int \frac{dx}{\sin(2x) + 2 \sin x}$.

488 综合题 求不定积分 $\int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx$.

489 综合题 求不定积分 $\int \frac{1}{2 + \cos x} dx$.

490 综合题 求不定积分 $\int \frac{3 \cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$.

491 综合题 求不定积分 $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$.

492 综合题 求不定积分 $\int \frac{1}{2x + \sqrt{1-x^2}} dx$.

493 综合题 求不定积分 $\int \frac{x^3+1}{(1+x^2)^2} dx$.

494 综合题 求不定积分 $\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$.

495 综合题 求不定积分 $\int \frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}.$

496 综合题 求不定积分 $\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x} dx$.

497 综合题 求不定积分 $\int \frac{x^3 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

498 综合题 设 $y(x-y)^2 = x$, 求不定积分 $\int \frac{1}{x-3y} dx$.

499 综合题 设 $f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}$, 求 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) dx$.

500 综合题 设 $\int f(x) dx = e^{x^2} + C$, 求 $\int x f''(x) dx$.

501 综合题 设 $\int x f(x) dx = \arcsin x + C$, 求 $\int f(x) dx$.

502 综合题 设 $\int f'(e^x) dx = -(1+x)e^{-x} + C$, $f(1) = 0$, 求 $f(x)$.

503 综合题 已知 $f''(x)$ 连续, $f'(x) \neq 0$,

证明 $\int \left[\frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x)f''(x)}{(f'(x))^3} \right] dx = \frac{1}{2} \left(\frac{f(x)}{f'(x)} \right)^2 + C$.

504 综合题 证明 $\int \frac{1}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx = -\frac{1}{a^2 + b^2} \frac{a \cos x - b \sin x}{a \sin x + b \cos x} + C$.

第5章

定积分

第一节 定积分的概念与性质

一、定积分的定义

定义: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义, 且 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, 则数 $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ (其中 $x_{i-1} < \xi_i < x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$)

称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分.

几何意义: 若连续函数 $f(x) \geq 0$, 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 表示由曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=a$, $x=b$ ($a < b$) 以及 x 轴所围成的曲边梯形面积 S . 即 $S = \int_a^b f(x)dx$.

二、定积分的性质

规定: (1) $\int_a^a f(x)dx = 0$; (2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

性质 1: (线性性质) $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$. (α, β 均为常数).

性质 2: (区间可加性) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

性质 3: $\int_a^b 1dx = \int_a^b dx = b-a$.

性质 4: 若 $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, 则 $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

推论 1: (比较性质) 若 $f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b]$, 则 $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

推论 2: $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

性质 5: (估值定理) 设 M 和 m 是 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值与最小值, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

性质 6: (中值定理) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则在 $[a, b]$ 上至少存在一个点 ξ , 使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

$f(\xi) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx$ 称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的平均值.

505 基础题 $\left[\int_a^b \arcsin x dx \right]' = (\quad)$.

(A) $\arcsin x$

(B) 0

(C) $\frac{1}{\sqrt{1-b^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$

(D) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

506 基础题 利用定积分的几何意义, 求 $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$.

507 基础题 利用定积分的定义, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right)$.

508 基础题 利用定积分的定义, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right)$.

509 基础题 利用定积分的定义, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$.

510 基础题 下列各选项中满足 $I_1 \leq I_2$ 的是 ().

(A) $I_1 = \int_0^1 x^2 dx, I_2 = \int_0^1 x^3 dx$

(B) $I_1 = \int_0^1 x dx, I_2 = \int_0^1 \tan x dx$

(C) $I_1 = \int_1^2 \ln x dx, I_2 = \int_1^2 \ln^2 x dx$

(D) $I_1 = \int_0^1 e^x dx, I_2 = \int_0^1 (1+x) dx$

511 基础题 设 $I_1 = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx, I_2 = \int_0^1 \sqrt{1+x^3} dx$, 则 I_1 与 I_2 的大小关系是 ().

(A) $I_1 > I_2$

(B) $I_1 \geq I_2$

(C) $I_1 < I_2$

(D) $I_1 \leq I_2$

512 基础题 估计定积分 $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (1 + \cos^2 x) dx$ 的值.

513 中等题 估计定积分 $I = \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx$ 的值.

514 综合题 设 $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$, 证明 $\frac{\sqrt{2}}{4} \leq I \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

515 中等题 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $\frac{2}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx = f(b)$. 证明在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = 0$.

516 中等题 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f'(x) \leq 0$.

证明 $F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt$ 在 (a, b) 内满足 $F'(x) \leq 0$.

517 基础题 求函数 $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ 在 $[-2, 2]$ 上的平均值.

第二节 微积分基本公式

一、积分上限函数及其导数

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积, 则称

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt, x \in [a, b]$$

为积分上限函数或变上限积分函数.

定理 1: 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则积分上限函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上可导, 并且

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x), x \in [a, b].$$

定理 2: (原函数存在定理) 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数.

518 基础题 设 $f(x) = \int_a^b \sin x^2 dx$, 求 $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{db}$, $\frac{df}{da}$.

519 基础题 设 $y = \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

520 基础题 设 $y = \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

521 中等题 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$.

522 中等题 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arctan t dt}{x^2}$.

523 中等题 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x t e^{2t^2} dt}$.

524 中等题 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)(x-t) dt}{x^2}$, 其中 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续函数.

525 中等题 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{1+x^2}}$.

526 基础题 求由 $\int_0^y e^t dt + \int_0^x \cos t dt = 0$ 所确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$.

527 中等题 设函数 $f(x) = \int_0^x e^{\frac{1}{2}t} dt$ ($-\infty < x < +\infty$), 求 $f(x)$ 的单调区间, 并判断其奇偶性.

528 中等题 设函数 $f(x)$ 连续, $\varphi(x) = \int_0^{x^2} x f(t) dt$, 若 $\varphi(1) = 1$, $\varphi'(1) = 5$, 求 $f(1)$.

529 综合题 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$.

证明方程 $\int_a^x f(t) dt + \int_b^x \frac{dt}{f(t)} = 0$ 在区间 (a, b) 内有且仅有一个实根.

二、牛顿-莱布尼茨公式

定理 3: (微积分基本定理) 如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

此为牛顿-莱布尼茨公式, 也称微积分基本公式.

530 基础题 求定积分 $\int_0^1 e^{2x} dx$.

531 基础题 求定积分 $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

532 基础题 求定积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 5x + 6}$.

533 基础题 求定积分 $\int_{-1}^3 |2-x| dx$.

534 基础题 求定积分 $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$.

535 中等题 设 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2+x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 求积分上限函数 $P(x) = \int_0^x f(t) dt$ 在 $[0, 2]$ 上的表达式.

536 中等题 设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} \int_0^1 f(x) dx$, 求 $\int_0^1 f(x) dx$.

537 中等题 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且满足 $f(x) = x \int_0^1 f(t) dt - 1$, 求 $\int_0^1 f(x) dx$ 及 $f(x)$.

538 中等题 设 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x+x^3}{1+x^4}$, 求 $\int_2^{2\sqrt{2}} f(x) dx$.

第三节 定积分的换元积分法和分部积分法

一、定积分的换元积分法

定理 1: 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 若函数 $x = \varphi(t)$ 满足条件:

(1) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$;

(2) $\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ (或 $[\beta, \alpha]$) 上单调且具有连续导数,

则 $\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt$.

常用公式

(1) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ 上连续, 则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx = \begin{cases} 0 & \text{当 } f(x) \text{ 为奇函数时} \\ 2 \int_0^a f(x) dx & \text{当 } f(x) \text{ 为偶函数时} \end{cases}$$

(2) 设函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 则

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx; \quad \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx.$$

539 基础题 计算 $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$.

540 基础题 计算 $\int_0^1 x\sqrt{3-2x} dx$.

541 基础题 计算 $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$.

542 中等题 计算 $\int_{-1}^0 \frac{(1+x)e^x}{\sqrt{1+xe^x}} dx$.

543 基础题 计算 $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{2-9x^2} dx$.

544 基础题 计算 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

545 基础题 计算 $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$.

546 基础题 计算 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

547 基础题 计算 $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx$.

548 中等题 计算 $\int_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}} dx$.

549 中等题 设 $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $\int_1^3 f(x-2) dx$.

550 中等题 设 $f(x) = \begin{cases} xe^{x^2}, & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -1, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$, 求 $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x-1) dx$.

551 中等题 设连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(x-t) dt = e^{-2x} - 1$, 求定积分 $\int_0^1 f(x) dx$.

552 综合题 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续函数, 且满足 $\int_0^x f(x-t) t dt = e^x - x - 1$, 求 $f(x)$.

553 基础题 计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\cos x} dx$.

554 基础题 计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$.

555 中等题 计算 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \left(\frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{2} \right) dx$.

556 中等题 求 $\int_{-1}^1 \cos x \arccos x dx$.

557 综合题 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\tan x}{1+x^4} + x^8 \right) dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin^8 x + \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \right) dx$,

$P = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\tan^8 x + e^x \cos x - e^{-x} \cos x) dx$, 则有 ().

(A) $P > N > M$

(B) $N > P > M$

(C) $N > M > P$

(D) $P > M > N$

553 中等题 计算 $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin^2 x} dx$.

559 中等题 计算 $\int_a^{a+\pi} \sin^2 x (\tan x + 1) dx$.

560 综合题 设 $f(x)$ 为连续函数, 证明 (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$;

(2) $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$, 并由此计算定积分

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx \quad (n \text{ 为正整数}).$$

二、定积分的分部积分法

定理 2: 设 $u = u(x)$, $v = v(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续可导, 则

$$\int_a^b uv' dx = uv|_a^b - \int_a^b u'v dx \quad \text{或} \quad \int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du.$$

561 基础题 计算 $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$.

562 基础题 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$.

563 基础题 计算 $\int_{-1}^1 x \arccos x dx$.

564 中等题 计算 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx$.

565 中等题 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin(2x) dx$.

566 中等题 计算 $\int_0^1 e^{-\sqrt{x}} dx$.

567 中等题 计算 $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

568 中等题 计算 $\int_1^{16} \arctan \sqrt{x-1} dx$.

569 中等题 计算 $\int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} dx$.

570 中等题 计算 $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx$.

571 基础题 设 $f(0)=1$, $f(2)=3$, $f'(2)=5$, 求 $\int_0^2 x f''(x) dx$.

572 中等题 设 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt$, 则 $F(x)$ 为 ().

- (A) 正常数 (B) 负常数 (C) 恒为零 (D) 非常数

573 中等题 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 e^{x^2} , 求 $\int_1^e \frac{\ln x f'(\ln x)}{x} dx$.

574 综合题 设 $f(x)$ 连续, 且 $f(x) = x + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos x dx$, 求 $\int_0^1 f(x) dx$.

575 综合题 设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$, 计算 $\int_0^{\pi} f(x) dx$.

576 综合题 设 $f(x) = \int_1^x e^{-y^2} dy$, 求 $\int_0^1 x^2 f(x) dx$.

577 综合题 设 $f(x)$ 一阶连续可导, 且 $f(x) = x - \int_0^x f'(t) \cos t dt$, 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

第四节 反常积分

一、无穷限的反常积分

定义 1: 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有定义, 且在任意有界区间 $[a, b]$ 上存在定积分 $\int_a^b f(x) dx$, 定义

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx;$$

定义 2: 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, b]$ 上有定义, 且在任意有界区间 $[a, b]$ 上存在定积分 $\int_a^b f(x) dx$, 定义

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx;$$

定义 3: 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx.$$

定义1和定义2中若右端极限存在,则称该反常积分收敛,否则称为发散;
定义3中要求右端的两个反常积分都收敛,则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. 有一个发散,则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

二、无穷限积分的性质

性质1: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ 具有相同的敛散性.

性质2: $\int_a^{+\infty} k f(x)dx$ ($k \neq 0$ 为常数) 与 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 具有相同的敛散性.

性质3: 若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 均收敛,则 $\int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)]dx$ 收敛,且

$$\int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

常用结论: $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \begin{cases} p > 1, & \text{收敛} \\ p \leq 1, & \text{发散} \end{cases} (a > 0); \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} \begin{cases} p > 1, & \text{收敛} \\ p \leq 1, & \text{发散} \end{cases} (a > 1).$

在实际计算中,反常积分可按照定积分 $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b$ 的计算方法进行,只不过要将 $F(b)$ 或 $F(a)$ 改作 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 即可. 定积分的换元法和分部积分法在反常积分的计算中也适用.

三、无穷限积分敛散性的判别

比较判别法: 设 $0 \leq f(x) \leq g(x)$, 则有:

- (1) 当 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛时, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛;
- (2) 当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散时, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散.

578 基础题 下列反常积分中收敛的是 ().

- (A) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ (B) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ (C) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ (D) $\int_2^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$

579 基础题 计算 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$.

580 基础题 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx$.

581 基础题 计算 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x}$.

582 中等题 计算 $\int_3^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^4 \sqrt{x^2 - 2x}} dx$.

583 基础题 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$.

584 中等题 计算 $\int_0^{+\infty} \min\left\{e^{-x}, \frac{1}{2}\right\} dx$.

585 中等题 计算 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx$.

586 中等题 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$.

587 中等题 计算 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-1}}$.

588 综合题 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx$.

589 中等题 关于 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2x) \cdot e^{|x|} dx$, 下列结论正确的是 ().
(A) 取值为 0 (B) 取正值 (C) 发散 (D) 取负值

590 基础题 判别 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln x} dx$ 的敛散性.

591 中等题 判别 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ 的敛散性.

592 综合题 求 c 的值, 使 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = \int_{-\infty}^c te^{2t} dt$.

四、无界函数的反常积分

如果函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 的任一邻域内都无界, 则称点 $x = x_0$ 为函数 $f(x)$ 的瑕点, 无界函数的反常积分又称为瑕积分.

定义 1: 设 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上有定义, 且在任一区间 $[a + \varepsilon, b]$ 上可积, 其中 $\varepsilon > 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$, 定义

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx;$$

定义 2: 设 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上有定义, 且在任一区间 $[a, b - \varepsilon]$ 上可积, 其中 $\varepsilon > 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$, 定义

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx;$$

定义 3: 设 $f(x)$ 在 $[a, c)$ 及 $(c, b]$ 上都有定义, 且在任一区间 $[a, c - \varepsilon]$ 及 $[c + \varepsilon, b]$ 上可积, 其中 $\varepsilon > 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$, 定义

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\epsilon_1} f(x)dx + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{c+\epsilon_2}^b f(x)dx.$$

定义1和定义2中若右端极限存在,则称该瑕积分收敛,否则称为发散;定义3中要求右端的两个瑕积分都收敛,则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛.有一个发散,则 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.瑕积分的性质、计算方法及敛散性的判别均与无穷限积分相类似.

593 基础题 下列积分()是反常积分.

- (A) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ (B) $\int_0^1 x \ln x dx$ (C) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ (D) $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$

594 基础题 $I = \int_0^1 x \ln^2 x dx$ 是().

- (A) 定积分且值为 $\frac{1}{3}$ (B) 定积分且值为 $\frac{1}{4}$
(C) 反常积分且发散 (D) 反常积分且值为 $\frac{1}{2}$

595 基础题 计算 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

596 基础题 计算 $\int_0^1 \frac{dx}{x(\ln x)^2}$.

597 中等题 讨论瑕积分 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ 的敛散性.

598 中等题 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx$.

599 综合题 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < e \\ \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x}, & x \geq e \end{cases}$, 若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 则().

- (A) $\alpha < -2$ (B) $\alpha > 2$ (C) $-2 < \alpha < 0$ (D) $0 < \alpha < 2$

600 综合题 下列计算正确的是().

- (A) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1-x^2} dx = 0$
(B) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-b}^b \sin x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-\cos x|_{-b}^b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\cos(-b) - \cos b] = 0$
(C) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}|_{-1}^1 = -2$
(D) $\int_0^{+\infty} x^{\frac{3}{2}} e^{-x} dx = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}$

第一节 定积分在几何学上的应用

一、直角坐标系下平面图形的面积

1. X 型区域: 图形曲边是关于 x 的函数.

X 型区域的面积计算口诀是“以上、下曲边的函数差作被积函数”, 该分割时就分割.

由 $y=f(x), y=g(x) (f(x) \geq g(x)), x=a, x=b (a < b)$ 所围成的平面区域 (图 6-1) 的面积 $S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.

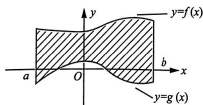


图 6-1

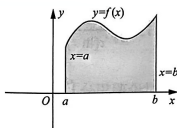


图 6-2

评注

(1) 当 $g(x)=0$ 时, 由 $y=f(x), y=0 (f(x) \geq 0), x=a, x=b (a < b)$ 所围成的平面区域为曲边梯形 (图 6-2), 面积 $S = \int_a^b f(x) dx$.

(2) 若在 $[a, b]$ 上, 图形的上曲边或者下曲边不能用同一个解析函数表示 (图 6-3), 则从 $x=c$ 处分割, 面积 $S = \int_a^c [f(x) - g(x)] dx + \int_c^b [g(x) - f(x)] dx$.

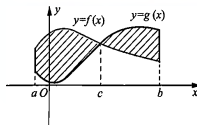


图 6-3

2. Y 型区域: 图形曲边是关于 y 的函数.

Y 型区域的面积计算口诀是: “以右、左曲边的函数差作被积函数”, 该分割时就分割.

由 $x = \psi(y), x = \varphi(y) (\psi(y) \geq \varphi(y)), y = c, y = d (c < d)$ 所围成的平面区域 (图 6-4(A))

的面积 $S = \int_c^d [\psi(y) - \varphi(y)] dy$.

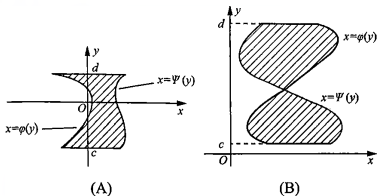


图 6-4

评注

若区域的右曲边或左曲边不能用同一个解析函数表示, 也需要将平面图形分割后再分别列式计算 (图 6-4(B)).

3. 计算平面图形面积的步骤.

第1步: 画出围成平面图形的曲线, 确定平面区域.

第2步: 计算出必要的交点坐标.

第3步: 根据平面图形的特点, 选择平面图形的区域类型 (尽量不分割).

第4步: 确定平面图形的上、下曲边或者右、左曲边, 列式计算.

601 基础题 求曲线 $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 4$ 所围成的平面图形的面积.

602 基础题 求曲线 $x = \sqrt{y}$ 、直线 $y = x + 1, y = 1$ 与 x 轴所围成的平面图形的面积.

603 基础题 求曲线 $y = x^3$ 与直线 $y = x$ 所围成的平面图形的面积.

604 基础题 求曲线 $y = -x^2 + 4$ 与直线 $y = -2x + 4$ 所围成的平面图形的面积.

605 基础题 若曲线 $y = \sqrt{ax} (a > 0)$ 与 x 轴及直线 $x = 3$ 所围成的图形面积等于 6, 求常数 a .

606 基础题 计算由曲线 $y = 2^x$ 和直线 $x + 2y = 2, x = 2$ 所围成的平面图形的面积.

607 中等题 求曲线 $y = x^2 - x$ 与 x 轴所围成的平面图形及直线 $y = 2x + 6$ 、曲线 $y = x^2 - x$ 、 x 轴在 $x > 1$ 时所围成的平面图形的面积之和.

608 中等题 求 $y = x^2$ 在点 $(2, 4)$ 处的切线与 $y = -x^2 + 4x + 1$ 所围图形的面积.

609 中等题 计算由 $y^2 = 9 - x$, 直线 $x = 2$ 及 $y = -1$ 所围成的平面图形上面部分 (面积大的那部分) 的面积.

610 中等题 计算由曲线 $y = x \cos(2x) \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right)$ 和直线 $y = 0$ 所围成的平面图形的面积.

611 中等题 求由曲线 $y = e^x (y \leq 1)$, $y = e^{-x} (y \leq 1)$ 和直线 $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$ 所围成的平面图形的面积.

612 中等题 求由曲线 $y = x \ln x$ 和直线 $y = x$, $y = 0$ 所围成的平面图形的面积.

613 中等题 求由曲线 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 和直线 $x = 0$, $x = 2\pi$ 所围成的平面图形的面积.

614 中等题 求由曲线 $y = x^2$, $x^2 + y^2 = 2$ 和直线 $y = 0$ 所围成的平面图形的面积.

615 中等题 设由抛物线 $y = 4x - x^2$, y 轴和直线 $y = b (b > 0)$ 所围成的平面图形的面积是仅由抛物线 $y = 4x - x^2$ 及直线 $y = b$ 所围图形面积的一半, 求 b .

616 中等题 直线 $y = x$ 将椭圆 $x^2 + 3y^2 - 6y = 0$ 分成两部分, 求直线下方的面积 S .

617 综合题 已知抛物线 $y = px^2 + qx$ (其中 $p < 0, q > 0$) 在第一象限内与直线 $x + y = 5$ 相切, 且抛物线与 x 轴所围成的平面图形的面积为 S .

(1) p 和 q 为何值时, S 达到最大值?

(2) 求出此最大值.

618 综合题 在抛物线 $y = x^2 (0 \leq x \leq 1)$ 上找一点 P , 使过点 P 的水平直线与抛物线以及直线 $x = 0$, $x = 1$ 所围成的平面图形面积最小.

619 综合题 求两抛物线 $y = x^2$, $y = -x^2 + 4x - 4$ 的公切线, 并求此公切线与此两抛物线所围图形的面积.

620 综合题 设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 满足下列两个条件: (1) 过 $(0,0)$ 和 $(1,2)$ 两点, 且 $a < 0$; (2) 与抛物线 $y = -x^2 + 2x$ 围成的图形面积最小, 求 a, b, c .

二、极坐标系下平面图形的面积

计算公式

1. 若平面区域 D 是由曲线 $r = r(\theta), \theta = \alpha, \theta = \beta (\alpha < \beta)$ 所围成 (图 6-5), 则面积

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta.$$

2. 若平面区域 D 是由曲线 $r = r_1(\theta), r = r_2(\theta), \theta = \alpha, \theta = \beta (\alpha < \beta)$ 所围成, 如图 6-6,

则面积 $S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)) d\theta$.

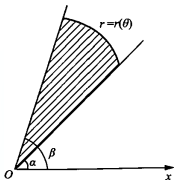


图 6-5

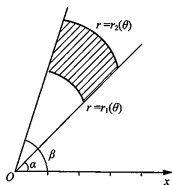


图 6-6

评注

(1) 极坐标下计算平面图形的面积有两个关键:

第一是围成平面图形的曲边 $r = r(\theta)$ 或 $r = r_1(\theta), r = r_2(\theta)$ 等;

第二是平面图形的角度 θ 的范围.

(2) 记住一些极坐标下的常见曲线的图形: 心形线、双纽线、对数螺线和阿基米德螺线等.

621 基础题 求曲线 $\rho = a \cos \theta + b (b \geq a > 0)$ 所围图形的面积.

622 中等题 求由曲线 $\rho = a \sin \theta, \rho = a(\cos \theta + \sin \theta) (a > 0)$ 所围图形公共部分的面积.

三、用参数方程表示的曲线所围平面图形的面积

计算公式

设曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \alpha \leq t \leq \beta$, 其中 $x(t), y(t)$ 都连续.

1. 当 $y(t) \geq 0$, $x(t)$ 可导, $x'(t) > 0$, 且 $x(\alpha) = a, x(\beta) = b$ 时, 由 $x = a, x = b, x$ 轴及曲线 L 所围图形的面积为 $S = \int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t) dt$.

其中 $y = f(x), x \in [a, b]$ 是 L 的直角坐标方程.

2. 当 $x(t) \geq 0$, $y(t)$ 可导, $y'(t) > 0$, 且 $y(\alpha) = c, y(\beta) = d$ 时, 由 $y = c, y = d, y$ 轴及曲线 L 所围图形的面积为 $S = \int_c^d x(t)y'(t) dt$.

评注

上述两个公式可以由定积分换元法得到.

- 623 基础题** 求旋轮线 $L: \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi], (a > 0)$ 与 x 轴所围平面图形的面积.

- 624 中等题** 设 P 为曲线 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin^2 t \end{cases}, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 上一点, 该曲线与直线 OP 及 x 轴所围成图形的面积为 S , 求函数 $\frac{dS}{dt}$ 取得最大值时点 P 的坐标.

四、旋转体的体积

计算公式

- 由 $x = a, x = b (0 < a < b), y = f(x) (f(x) > 0), y = 0$ 所围成的曲边梯形 (图 6-7) 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积为 $V_x = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$,
绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积为 $V_y = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$.
- 由 $y = c, y = d (0 < c < d), x = \varphi(y) (\varphi(y) > 0), x = 0$ 所围成的曲边梯形 (图 6-8) 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积为 $V_y = \int_c^d \pi [\varphi(y)]^2 dy$,
绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积为 $V_x = 2\pi \int_c^d y\varphi(y) dy$.
- 由 $x = a, x = b (0 < a < b), y = f_1(x), y = f_2(x), (f_2(x) > f_1(x) > 0)$ 所围成的平面图形 (图 6-9)

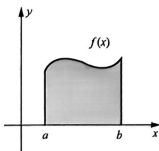


图 6-7

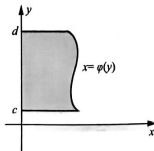


图 6-8

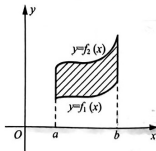


图 6-9

绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积为

$$V_x = \int_a^b \pi [f_2(x)]^2 dx - \int_a^b \pi [f_1(x)]^2 dx = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx.$$

绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积为

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f_2(x) dx - 2\pi \int_a^b x f_1(x) dx = 2\pi \int_a^b x [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

625 基础题 计算曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1, y = \pm 3$ 所围平面图形绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

626 基础题 计算曲线 $xy = 3, x + y = 4$ 所围平面图形绕 x 轴旋转而成的立体体积.

627 基础题 计算曲线 $y = e^{-x}$ 在第一象限中的部分分别绕 x 轴和 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

628 基础题 计算曲线 $y = e^{-x^2}, x = 0, x = -1$ 及 x 轴所围平面图形绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

629 基础题 计算曲线 $x^2 + (y - 2a)^2 = a^2 (a > 0)$ 所围平面图形绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积.

630 中等题 过原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线, 求由切线、曲线及 x 轴所围平面图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转所得旋转体的体积.

631 中等题 曲线 $y = xe^{-x} (0 \leq x < +\infty)$ 绕 x 轴旋转一周所得延展到无穷远的旋转体的体积.

632 综合题 求 $y = \sqrt{1 - (x - 2)^2}$ 与 $y = x^2 - 4x + 3$ 所围平面图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V_x 和 V_y .

633 综合题 设曲线 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$, 求曲线所围的平面图形绕直线 $y = 1$ 旋转所成旋转体的体积.

634 综合题 过曲线 $y = \sqrt{x}$ 上某点 A 做切线, 使之与曲线及 y 轴围成的图形面积为 $\frac{1}{12}$, 求 (1) 切点 A 的坐标; (2) 过点 A 的切线方程; (3) 由上述图形绕 x 轴和绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

- 635 综合题** 设曲线方程 $y = e^{-x} (x \geq 0)$, (1) 把曲线 $y = e^{-x} (x \geq 0)$, x 轴, y 轴和直线 $x = \xi (\xi > 0)$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周, 得一旋转体, 此旋转体的体积为 $V(\xi)$, 求满足 $V(a) = \frac{1}{2} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} V(\xi)$ 的 a ; (2) 在此曲线上找一点, 使过该点的切线与两个坐标轴所夹平面图形的面积最大, 并求该面积 S .

五、旋转体的侧面积 (旋转曲面面积)

计算公式

1. 由曲线 $y = f(x), a \leq x \leq b$ 绕 x 轴旋转而成的旋转体的侧面积

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

2. 由曲线 $x = \varphi(y), c \leq y \leq d$ 绕 y 轴旋转而成的旋转体的侧面积

$$S = 2\pi \int_c^d |\varphi(y)| \sqrt{1 + [\varphi'(y)]^2} dy.$$

3. 曲线方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \alpha \leq t \leq \beta$, 且 $x'(t) \neq 0$, 则该曲线绕 x 轴旋转而成的旋

转体的侧面积 $S = 2\pi \int_a^\beta |y(t)| \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$

4. 曲线方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \alpha \leq t \leq \beta$, 且 $y'(t) \neq 0$, 则该曲线绕 y 轴旋转而成的旋

转体的侧面积 $S = 2\pi \int_a^\beta |x(t)| \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$

- 636 基础题** 摆线的参数方程为 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$, 常数 $a > 0$, 计算 (1) 该弧段绕 x 轴旋转一周而成的旋转曲面的面积 S_x ; (2) 该弧段绕 y 轴旋转一周而成的旋转曲面的面积 S_y .

- 637 基础题** 曲线 $y^2 = 2x + 3 (0 \leq x \leq 3)$ 绕 x 轴旋转而成的旋转体的侧面积.

六、平面曲线的弧长

计算公式

1. 曲线 $y = f(x), a \leq x \leq b$ 的弧长 (其中 $f'(x)$ 连续) $s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ (直角坐标).

2. 曲线 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \alpha \leq t \leq \beta$ 的弧长 (其中 $x'(t), y'(t)$ 均连续, 且不同时为零)

$$s = \int_a^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \quad (\text{参数方程}).$$

3. 曲线 $r = r(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$ 的弧长 (其中 $r(\theta), r'(\theta)$ 均连续, 且不同时为零)

$$s = \int_a^b \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2} d\theta \quad (\text{极坐标}).$$

638 基础题 计算曲线 $y = x\sqrt{x} (0 \leq x \leq 4)$ 的弧长.

639 基础题 计算曲线 $y = \ln(\cos x), 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ 的弧长.

640 基础题 计算曲线 $y = \int_0^x \tan t dt, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 的弧长.

641 基础题 计算圆的渐开线 $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$ 的弧长 ($a > 0$).

642 基础题 当 $0 \leq \theta \leq \pi$ 时, 求对数螺线 $r = e^\theta$ 的弧长 s .

643 中等题 计算曲线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ 的弧长.

644 中等题 计算曲线 $y = x^{\frac{3}{2}}, y = 2 - x$ 及 y 轴围成的平面图形边界曲线的周长.

645 综合题 设 $\rho = \rho(x)$ 是抛物线 $y = \sqrt{x}$ 上任一点 $M(x, y) (x \geq 1)$ 处的曲率半径,

$s = s(x)$ 是该抛物线上介于点 $A(1, 1)$ 与 M 之间的弧长, 计算 $3\rho \frac{d^2\rho}{ds^2} - \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2$ 的

值 (直角坐标系下曲率公式为 $K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$).

七、平行截面面积为已知的立体体积

计算公式

1. 夹在两平行平面 $x = a, x = b (a < b)$ 间的立体的截面面积函数 $A(x)$ 已知, 且是 $x \in [a, b]$ 上的连续函数, 则该立体体积为 $V = \int_a^b A(x) dx$.
2. 夹在两平行平面 $y = c, y = d (c < d)$ 间的立体的截面面积函数 $A(y)$ 已知, 且是 $y \in [c, d]$ 上的连续函数, 则该立体体积为 $V = \int_c^d A(y) dy$.

646 中等题 设平面图形 A 由 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 与 $y \geq x$ 所确定, 求图形 A 绕直线 $x = 2$ 旋转一周所成旋转体的体积.

647 中等题 求曲线 $y = 3 - |x^2 - 1|$ 与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $y = 3$ 旋转一周所成旋转体的体积.

- 648 中等题** 设有一正椭圆柱体, 其底面的长、短轴分别为 $2a, 2b$, 用过此柱体底面的短轴与底面成 $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$ 角的平面截此柱体, 得一楔形体 (如图 6-10), 求此楔形体的体积 V .

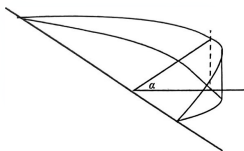


图 6-10

- 649 中等题** 过坐标原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线, 该切线与曲线 $y = \ln x$ 及 x 轴围成的平面图形 D . 求 (1) D 的面积 A ; (2) D 绕直线 $x = e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V .

第二节 定积分在物理学上的应用

- 650 基础题** 设单位质点在水平面内作直线运动, 初速度 $v|_{t=0} = v_0$. 已知阻力与速度成正比 (比例常数为 1), 问 t 为多少时此质点的速度为 $\frac{v_0}{3}$? 并求到此时刻该点所经过的路程.

- 651 综合题** 为消除井底的污泥, 用缆绳将抓斗放入井底, 抓起污泥后提出井口 (见图 6-11). 已知井深 30m, 抓斗自重 400N, 缆绳每米重 50N, 抓斗抓起污泥重 2000N, 提升速度为 3m/s. 在提升过程中, 污泥以 20N/s 的速率从抓斗缝隙中漏掉, 现将抓起的抓斗提升至井口, 问克服重力需作多少焦耳的功 (说明: ① $1\text{N} \times 1\text{m} = 1\text{J}$; m, N, s, J 分别表示米, 牛顿, 秒, 焦耳; ② 抓斗的高度、位于井口上方的缆绳长度忽略不计)?

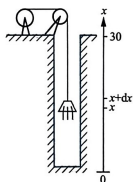


图 6-11

- 652 综合题** 某闸门的形状与大小如图 6-12 所示, 其中直线 l 为对称轴, 闸门的上部为矩形 $ABCD$, 下部由二次抛物线与线段 AB 所围成. 当水面与闸门的上端相平时, 欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 5:4, 闸门矩形部分的高 h 应为多少 m (米)?

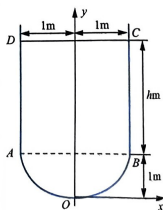


图 6-12

653 综合题 某建筑工程打地基时,需用气锤将桩打进土层.气锤每次击打,都将克服土层对桩的阻力而做功.设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比(比例系数为 $k, k > 0$).气锤第一次击打将桩打进地下 a m.根据设计方案,要求气锤每次击打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数 r ($0 < r < 1$).

- (1) 求气锤击打桩3次后,可将桩打进地下多深?
- (2) 若击打次数不限,气锤至多能将桩打进地下多深?

654 综合题 一个高为 l 的柱形贮油罐,底面是长轴为 $2a$,短轴为 $2b$ 的椭圆,现将贮油罐平放,当油罐中油面高度为 $\frac{3}{2}b$ 时(图6-13),计算油的质量(长度单位为 m ,质量单位为 kg ,油的密度为常数 $\rho kg/m^3$).

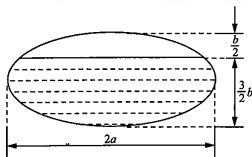


图 6-13

655 综合题 一容器的内侧是由图6-14中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面,该曲线由 $x^2 + y^2 = 2y$ ($y \geq \frac{1}{2}$)与 $x^2 + y^2 = 1$ ($y \leq \frac{1}{2}$)连接而成.

- (1) 求容器的容积.
- (2) 若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽走,至少需要做多少功(长度单位为 m ,重力加速度为 $g m/s^2$,水的密度为 $10^3 kg/m^3$)?

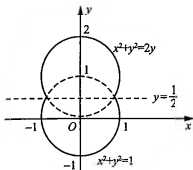


图 6-14

656 综合题 设曲线 L 的方程为 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ ($1 \leq x \leq e$).

- (1) 求 L 的弧长.
- (2) 设 D 是由曲线 L ,直线 $x=1, x=e$ 及 x 轴所围平面图形,求 D 的形心的横坐标.

第7章

微分方程

第一节 微分方程的基本概念

一、微分方程的定义

定义 1: 表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间关系的方程, 叫作微分方程, 有时也简称方程.

评注

方程中必须出现未知函数的导数或微分才能称为微分方程.

定义 2: 微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数, 叫作微分方程的阶.

657 基础题 下列方程是微分方程的是 ().

(A) $x^2 + x + 1 = 0$

(B) $y^2 + 2x + 1 = 0$

(C) $x^2 y^2 + y = 3$

(D) $x^2 + y' + y = 2$

658 基础题 微分方程 $y'' - 2x(y')^3 + y^2 = 0$ 的阶数是 ().

659 基础题 微分方程 $xdy + (x + y)dx = 0$ 的阶数是 ().

二、微分方程解的定义

定义 1: 满足微分方程的函数, 称为微分方程的解.

定义 2: 如果微分方程的解中含有任意常数, 且任意常数的个数与微分方程的阶数相同, 则称之为微分方程的通解.

评注

通解里所说的任意常数是独立的, 也就是说, 它们不能合并而使得任意常数的个数减少.

定义 3: 微分方程的不含任意常数的解, 称为特解.

定义 4: 由通解确定特解的条件, 称为初始条件.

660 基础题 判断 $y = 5x^2$ 是否是微分方程 $xy' - 2y = 0$ 的解, 是通解还是特解?

661 基础题 验证 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ 是微分方程 $y'' + y = 0$ 的解, 并求满足初始条件 $y(0) = 2, y'(0) = 3$ 的特解.

662 中等题 已知函数 $y = \frac{1}{2}x^2 + x + C$, 微分方程 $y'' - y' = -x$, 下列说法正确的是 ().

- (A) y 是微分方程的通解
- (B) y 是微分方程满足条件 $y|_{x=0} = 1$ 的特解
- (C) y 是微分方程的解
- (D) 以上都不对

663 中等题 判断二元方程 $y = \ln(xy)$ 所确定的函数是否为微分方程 $(xy - x)y'' + x(y')^2 + yy' - 2y^2 = 0$ 的解, 是通解还是特解?

第二节 可分离变量的微分方程

一、可分离变量微分方程的定义

定义: 形如 $\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y)$ 或 $M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0$ 的微分方程称为可分离变量的微分方程.

二、可分离变量微分方程的求解方法

第1步: 分离变量. 一般地, 把方程中与 y 有关的项移到左边, 与 x 有关的项移到右边得

$$g(y)dy = f(x)dx;$$

第2步: 上式两边同时积分, 得 $\int g(y)dy = \int f(x)dx$, 则方程的隐式通解为 $G(y) = F(x) + C$.

第3步: 化简整理. 将上面得到的隐式通解尽量化简, 能整理出显函数的形式最好, 不好整理的, 微分方程的通解写成隐函数的形式也是可以的.

664 基础题 下列微分方程不是一阶变量可分离的微分方程的是 ().

- (A) $y' + xy = 0$
- (B) $y^2 dx + (2x + 1)dy = 0$
- (C) $y' = xye^{x+y}$
- (D) $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$

665 基础题 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y(1-x)}{x}$ 的通解.

666 基础题 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x \cos x}{y^2}$ 的通解.

667 基础题 求微分方程 $(1+e^x)dy - ye^x dx = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 2$ 的特解.

668 基础题 求微分方程 $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$ 的特解.

669 中等题 求微分方程 $e^{x-y}dx + ydy = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$ 的特解.

670 中等题 已知曲线 $y = y(x)$ 上任一点 $P(x, y)$ 处的切线斜率为 $\frac{y^2}{1+x^2}$, 且曲线过 $(0, -1)$ 点, 求该曲线的方程.

671 中等题 设 $f(x)$ 为连续函数, 且满足 $f(x) = \int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right)dt + 2$, 求 $f(x)$.

672 中等题 设当 $x \geq 0$ 时 $f(x)$ 有一阶连续导数, 并且满足 $f(x) = 2 \int_0^x (x-t)f(t)f'(t)dt + x - 1$, 求当 $x \geq 0$ 时的 $f(x)$.

673 中等题 设函数 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x tf(x-t)dt + x$, 求 $f(x)$ 的表达式.

674 中等题 设非零函数 $f(x)$ 连续, 且满足 $f(x) = \int_0^x f(t)dt + 2 \int_0^1 f^2(t)dt$, 求 $f(x)$ 的表达式.

675 中等题 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且满足 $f'(x) = \frac{x}{1+x^2} f(x)$, $f(0) = a$. 若 $\int_0^{\sqrt{3}} xf(x)dx = 7$, 求 a 的值.

676 中等题 求微分方程 $y' = y^2 + 2(\sin x - 1)y + \sin^2 x - 2\sin x - \cos x + 1$ 的通解.

677 中等题 求微分方程 $y(xy+1)dx + x(1+xy+x^2y^2)dy = 0$ 的通解.

第三节 齐次方程

一、齐次方程的定义

定义: 形如 $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 的微分方程称为齐次方程.

二、齐次方程的求解方法

第1步: 变量代换. 令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = xu$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$. 这一步最关键

第2步: 代入方程并分离变量. $u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u) \Rightarrow \frac{1}{\varphi(u) - u} du = \frac{1}{x} dx$.

第3步: 两端积分得. $\Phi(u) = \ln|x| + C$.

第4步: 回代整理. 以 $\frac{y}{x}$ 代替 u , 并化简整理, 即可得原齐次方程的通解.

678 基础题 下列方程是齐次方程的是 ().

- (A) $y' + y = 0$ (B) $y^2 dx + x dy = 0$
(C) $y' + xy = e^x$ (D) $x^2 y' + xy = y^2$

679 基础题 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{\frac{y}{x} + \frac{y}{x}}$ 的通解.

680 基础题 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \sec \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$ 的通解.

681 基础题 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = 2$ 的特解.

682 基础题 已知曲线 $y = y(x)$ 通过点 $(1, 0)$, 且每一点 (x, y) 处切线的斜率等于 $1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$, 求该曲线的方程.

683 中等题 求微分方程 $y(x-y)dx + x^2 dy = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = 1$ 的特解.

684 中等题 求微分方程 $xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$ 满足初始条件 $y(1) = e^3$ 的特解.

685 中等题 求微分方程 $(1 + 2e^{\frac{x}{y}})dx + 2e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$ 的通解.

686 中等题 求微分方程 $\left(2y \sin \frac{x}{y} + 3x \cos \frac{x}{y}\right) dy - 3y \cos \frac{x}{y} dx = 0$ 的通解.

第四节 一阶线性微分方程

一、一阶线性齐次方程的定义

定义: 形如 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ 的微分方程称为一阶线性齐次方程.

评注

一阶线性齐次方程其实是特殊的变量可分离方程.

二、一阶线性齐次方程的求解方法

方法 1: 分离变量, 两端积分, 化简整理.

方法 2: 套公式 $y = Ce^{-\int P(x)dx}$, C 为任意常数.

687 基础题 求微分方程 $\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$ 的通解.

688 基础题 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = y \tan x$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$ 的特解.

三、一阶线性非齐次方程的定义

定义 形如 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$, $Q(x) \neq 0$ 的微分方程称为一阶线性非齐次方程.

四、一阶线性非齐次方程的求解方法

方法 1: 常数变易法. 把齐次方程通解 $y = Ce^{-\int P(x)dx}$ 中的 C 换成关于 x 的未知函数 $C(x)$, 将 $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ 代入方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 中, 求出 $C(x)$ 即可.

方法 2: 套公式. $y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$, C 为任意常数.

689 基础题 下列方程是一阶线性微分方程的是 ().

(A) $y' + y^2 = 0$

(B) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \sqrt{xy}$

(C) $y' + xy = e^x y + x^2$

(D) $y' + \sin(xy) = 1$

690 基础题 求微分方程 $\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x$ 的通解.

691 基础题 求微分方程 $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$ 的通解.

692 基础题 求微分方程 $(x+1)\frac{dy}{dx} - y = e^x(x+1)^2$ 满足 $y(0) = 2$ 的特解.

693 基础题 求微分方程 $y' + y \cos x - e^{-\sin x} \ln x = 0$ 满足 $y(1) = 0$ 的特解.

694 中等题 求微分方程 $(y^2 - 6x)y' + 2y = 0$ 的通解.

695 中等题 求微分方程 $y^3 dx + (2xy^2 - 1)dy = 0$ 的通解.

696 中等题 求微分方程 $ydx + (x - 3y^2)dy = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = 1$ 的特解.

697 中等题 求微分方程 $y' = \frac{1}{x+y}$ 的通解.

698 中等题 求微分方程 $ydx + (x+y)dy = 0$ 的通解.

699 中等题 已知曲线 $y = f(x)$ 过 $(0,1)$ 点, 且它在任意一点 (x,y) 处的切线斜率等于 $\sec x - f(x) \tan x$, 求该曲线方程.

700 中等题 已知 $f(x)$ 为连续函数, 且满足 $f(x) = \int_0^x tf(t)dt - x^2$, 求函数 $f(x)$.

701 中等题 设函数 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt + e^{-x} - 1$, 求 $f(x)$ 的表达式.

第五节 可降阶的高阶微分方程

一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程的求解方法

解法: 方程两边对 x 积分 n 次, 即可求通解.

702 基础题 求微分方程 $y^{(4)} = x$ 的通解.

703 基础题 求微分方程 $y''' = e^{3x} + \sin 2x$ 的通解.

704 基础题 求微分方程 $y'' = xe^x$ 的通解.

705 基础题 求微分方程 $y' = \frac{1}{1+x^2}$ 的通解.

706 中等题 求微分方程 $y'' = e^{2x}$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = y'|_{x=1} = y''|_{x=1} = 0$ 的特解.

707 中等题 已知一曲线经过点 $(0,1)$ 并在此点与直线 $y = \frac{x}{2} + 1$ 相切, 且满足 $y'' = x$, 求此曲线方程.

二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程的求解方法

第1步: 换元. 令 $y' = p$, 则 $y'' = p'$, 则原方程变为 $p' = f(x, p)$, 此方程为一阶方程.

第2步: 解方程 $p' = f(x, p)$. 设其解为 $p = \varphi(x, C_1)$, 即 $y' = \varphi(x, C_1)$.

第3步: 两端积分. 对 $y' = \varphi(x, C_1)$ 两端积分即可得到原方程的通解为 $y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2$.

708 基础题 求微分方程 $y'' = y' + x$ 的通解.

709 基础题 求微分方程 $y'' + (y')^2 + 1 = 0$ 的通解.

710 基础题 求微分方程 $xy'' + 3y' = 0$ 的通解.

711 基础题 求微分方程 $y'' - 2y'^2 = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = -1$ 的特解.

712 基础题 求微分方程 $(1+x^2)y'' = 2xy'$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 3$ 的特解.

三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程的求解方法

第1步: 换元. 令 $y' = p$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$, 则原方程变为 $p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$, 此方程为一阶微分方程.

第2步: 解方程 $p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$. 设其解为 $p = \varphi(y, C_1)$, 即 $y' = \varphi(y, C_1)$.

第3步: 解方程 $y' = \varphi(y, C_1)$. 对 $y' = \varphi(y, C_1)$ 分离变量可得 $\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx$, 两端积分即可得到原方程的通解为 $\int \frac{1}{\varphi(y, C_1)} dy = x + C_2$.

评注

注意方程 $y'' = f(y, y')$ 与 $y'' = f(x, y')$ 的区别, 前者最大的特点是不含 x , 故换元时, 令 $y' = p$, 要把 p 看成 y 的函数, 从而 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$.

713 基础题 求微分方程 $yy'' + 2(y')^2 = 0$ 的通解.

714 基础题 求微分方程 $yy'' + (y')^2 = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$ 的特解.

715 中等题 求微分方程 $y^3 y'' - 1 = 0$ 的通解.

716 中等题 求微分方程 $y'' + (y')^2 = 1$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 0$ 的特解.

第六节 高阶线性微分方程

一、二阶线性微分方程的定义

定义: 形如 $\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x)$ 的方程称为二阶线性微分方程. 当右端 $f(x) \equiv 0$ 时, 方程叫作齐次的; 当 $f(x) \not\equiv 0$ 时, 方程叫作非齐次的.

二、二阶线性微分方程解的结构

定理 1: 如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$ 的两个解, 则 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 也是方程的解, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

定理 2: 如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$ 的两个线性无关的解, 则 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ (C_1, C_2 为任意常数) 是方程的通解.

评注

(1) 注意定理 1 和定理 2 的区别: 一个是解, 一个是通解;

(2) 函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性无关 $\Leftrightarrow \frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{常数}$.

定理 3: 如果函数 $y^*(x)$ 是二阶非齐次线性方程 $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x)$ 的一个特解, $Y(x)$ 是对应的齐次方程 $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$ 的通解, 则 $y = y^*(x) + Y(x)$ 是二阶非齐次线性方程的通解.

评注

(1) 由上述定理可得, 二阶非齐次线性方程的通解 = 它的一个特解 + 对应齐次方程的通解, 而要找二阶齐次方程的通解, 需找到它的两个线性无关的解.

(2) 上面的结论可推广到 n 阶线性微分方程.

定理 4: (叠加性) 设 $y_1^*(x)$ 与 $y_2^*(x)$ 分别是方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = f_1(x) \text{ 与 } \frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = f_2(x)$$

的特解, 则 $y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 是 $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ 的特解.

717 基础题 下列函数组, 在其定义区间内线性无关的是 ().

- (A) $x^2, 2x^2$ (B) $\sin x, \cos x$
(C) $\sin 2x, \sin x \cos x$ (D) $e^{2x}, 3e^{2x}$

718 基础题 方程 $(x-1)y'' - xy' + y = 0$ 的两个线性无关的解是 ().

- (A) $x, 2x$ (B) $e^x, 8e^x$
(C) x, x^2 (D) x, e^x

719 基础题 已知 $y_1(x)$ 是一阶线性非齐次方程 $y' + p(x)y = f(x)$ 的一个解, $y_2(x) \neq 0$ 是对应的齐次方程的一个解, 则方程 $y' + p(x)y = f(x)$ 的通解是 ().

- (A) $y = Cy_1(x) + y_2(x)$ (B) $y = Cy_1(x) - y_2(x)$
(C) $y = y_1(x) - Cy_2(x)$ (D) $y = y_1(x) + y_2(x) + C$

720 基础题 已知 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程 $y' + p(x)y = 0$ 的两个不同的解, 则该方程的通解是 ().

- (A) $y = Cy_1(x)$ (B) $y = Cy_2(x)$
(C) $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ (D) $y = C(y_1(x) - y_2(x))$

721 基础题 已知 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个不同的非零解, C_1, C_2 为任意常数, 则 $y = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$ 是该方程通解的充分条件是 ()

- (A) $f_1(x)f_2'(x) - f_2(x)f_1'(x) = 0$ (B) $f_1(x)f_2'(x) + f_2(x)f_1'(x) = 0$
(C) $f_1(x)f_2'(x) - f_2(x)f_1'(x) \neq 0$ (D) $f_1(x)f_2'(x) + f_2(x)f_1'(x) \neq 0$

722 基础题 验证 $y_1 = \cos ax$, $y_2 = \sin ax$ 都是方程 $y'' + a^2 y = 0$ ($a \neq 0$) 的解, 并写出该方程的通解.

723 基础题 验证 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{12} e^{5x}$ (C_1, C_2 为任意常数) 是方程 $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$ 的通解.

724 基础题 设 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的三个线性无关的解, C_1, C_2 为任意常数, 证明 $y = 2C_1 y_1 + (C_2 - C_1)y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$ 是该方程的通解.

第七节 常系数齐次线性微分方程

一、二阶常系数齐次线性微分方程的定义

定义: 形如 $y'' + py' + qy = 0$ (其中 p, q 为常数) 的微分方程称为二阶常系数齐次线性微分方程.

二、二阶常系数齐次线性微分方程的解法

第1步: 写出特征方程 $r^2 + pr + q = 0$.

第2步: 求出特征方程的两个根 (特征根) r_1, r_2 .

第3步: 根据特征方程的两个根的不同情形, 按照下表写出通解.

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的两个根 r_1, r_2	微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解
两个不相等的实根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
两个相等的实根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

评注

二阶常系数齐次线性微分方程的概念、求解方法和通解的形式, 可推广到 n 阶常系数齐次线性微分方程.

725 基础题 下列函数可以作为方程 $y'' + 2y' = 0$ 的特解的是 ()

- (A) $y = e^x$ (B) $y = e^{2x}$ (C) $y = 1 + e^{-2x}$ (D) $y = xe^{-2x}$

726 基础题 通解为 $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-8x}$ 的二阶常系数齐次线性微分方程为 ().

(A) $y'' + 2y' + 48y = 0$

(B) $y'' + 2y' - 48y = 0$

(C) $y'' - 2y' + 48y = 0$

(D) $y'' - 2y' - 48y = 0$

727 基础题 以 $y_1 = e^{2x} \sin 3x$, $y_2 = e^{2x} \cos 3x$ 为特解的二阶常系数齐次线性微分方程为 ().

(A) $y'' + 4y' + 13y = 0$

(B) $y'' - 4y' - 13y = 0$

(C) $y'' + 4y' - 13y = 0$

(D) $y'' - 4y' + 13y = 0$

728 基础题 已知 $y = xe^{2x}$ 是二阶常系数齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的一个特解, 求 p 和 q 的值.

729 基础题 求方程 $y'' + 5y' + 4y = 0$ 的通解.

730 基础题 求方程 $y'' + 4y' + 3y = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 6$ 的特解.

731 基础题 求方程 $4y'' - 12y' + 9y = 0$ 的通解.

732 基础题 求方程 $\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + s = 0$ 满足初始条件 $s|_{t=0} = 2$, $s'|_{t=0} = -1$ 的特解.

733 基础题 求方程 $y'' + 8y' + 17y = 0$ 的通解.

734 基础题 求方程 $y'' + 10y' + 29y = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = -1$ 的特解.

735 基础题 求方程 $y''' + y'' - y' - y = 0$ 的通解.

736 基础题 求方程 $y^{(4)} - y''' - y'' - y' - 2y = 0$ 的通解.

737 中等题 已知函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, 且 $f(0) = f'(0) = 1$, 求 $f(x)$.

738 中等题 已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f''(x) + f(x) = 2e^x$, 求 $f(x)$.

第八节 常系数非齐次线性微分方程

一、二阶常系数非齐次线性微分方程的定义

定义: 形如 $y'' + py' + qy = f(x)$ (其中 p, q 为常数) 的微分方程称为二阶常系数非齐次线性微分方程.

二、二阶常系数非齐次线性微分方程的解法

第1步: 求 $y'' + py' + qy = f(x)$ 的一个特解 $y^*(x)$.

第2步: 求出对应齐次方程的通解 $Y(x)$.

第3步: 写出方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 的通解 $y = y^*(x) + Y(x)$.

三、二阶常系数非齐次线性微分方程特解的求法

情形一: 若 $f(x) = P_n(x)$, $P_n(x)$ 是 x 的 n 次多项式, 则

(1) 当 0 不是特征方程的根时, 设

$$y^* = R_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n;$$

(2) 当 0 是特征方程的单根时, 设

$$y^* = xR_n(x) = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots + a_nx^{n+1};$$

(3) 当 0 是特征方程的重根时, 设

$$y^* = x^2R_n(x) = a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + \cdots + a_nx^{n+2}.$$

739 基础题 求方程 $y'' - 4y' + 3y = x$ 的一个特解.

740 基础题 求方程 $y'' + 5y' + 4y = 3 - 2x$ 的通解.

741 基础题 求方程 $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$ 的通解.

742 中等题 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^x$, 求非齐次方程 $y'' + ay' + by = x$ 满足初始条件 $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$ 的特解.

情形二: 若 $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$, $P_n(x)$ 是 x 的 n 次多项式, 则

(1) 当 α 不是特征方程的根时, 设

$$y^* = e^{\alpha x}R_n(x) = e^{\alpha x}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n);$$

(2) 当 α 是特征方程的单根时, 设

$$y^* = xe^{\alpha x}R_n(x) = e^{\alpha x}(a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots + a_nx^{n+1});$$

(3) 当 α 是特征方程的重根时, 设

$$y^* = x^2 e^{ax} R_n(x) = e^{ax} (a_0 x^2 + a_1 x^3 + a_2 x^4 + \cdots + a_n x^{n+2}).$$

743 基础题 设 a, b, c 为常数, 则微分方程 $y'' - 5y' + 6y = 3x + 2e^{2x}$ 的特解形式为 ().

- (A) $e^{2x}(ax+b)$ (B) $xe^{2x}(ax+b)$
(C) $ax+b+ce^{2x}$ (D) $ax+b+cxe^{2x}$

744 基础题 求方程 $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$ 的通解.

745 基础题 已知 $y = e^{-2x} + (x^2 + 2)e^x$ 是二阶常系数线性非齐次微分方程 $y'' + ay' + by = (cx + d)e^x$ 的一个解, 求 a, b, c, d 的值.

746 中等题 已知 $y_1 = e^{2x} + xe^x$, $y_2 = e^{-x} + xe^x$, $y_3 = e^{2x} - e^{-x} + xe^x$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解, 求此微分方程.

情形三: 若 $f(x) = e^{ax} [P_l(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x]$, 则

(1) 当 $\alpha \pm \beta i$ 不是特征方程的根时, 设 $y^* = e^{ax} (R_m^{(1)} \cos \beta x + R_m^{(2)} \sin \beta x)$;

(2) 当 $\alpha \pm \beta i$ 是特征方程的根时, 设 $y^* = xe^{ax} (R_m^{(1)} \cos \beta x + R_m^{(2)} \sin \beta x)$,

其中, $R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$ 是 m 次多项式, $m = \max\{l, n\}$.

747 基础题 微分方程 $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$ 有特解 ().

- (A) $y^* = xe^x (\cos 2x + \sin 2x)$ (B) $y^* = e^x (\cos 2x + \sin 2x)$
(C) $y^* = \frac{1}{4} xe^x \cos 2x$ (D) $y^* = \frac{1}{4} xe^x \sin 2x$

748 基础题 设 a, b, c 为常数, 微分方程 $y'' + 4y = \cos^2 x$ 有特解 ().

- (A) $y^* = a \cos^2 x$ (B) $y^* = x(a + b \cos 2x + c \sin 2x)$
(C) $y^* = b \sin^2 x$ (D) $y^* = a + x(b \cos 2x + c \sin 2x)$

749 基础题 求方程 $y'' + 4y = x \cos x$ 的通解.

750 中等题 求方程 $y'' - y = e^x + 4 \cos x$ 的通解.

第1章 函数与极限

1 答案 $(-\frac{2}{3}, 0]$.

由反余弦及对数函数的定义域知:

$$\begin{cases} -1 \leq 2x+1 \leq 1 \\ 3x+2 > 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases}, \quad -\frac{2}{3} < x \leq 0,$$

得函数的定义域 $D_f = \{x | -\frac{2}{3} < x \leq 0\}$ 或 $(-\frac{2}{3}, 0]$.

2 答案 $3, -\frac{1}{x}$.

$$f(-2) = \frac{-2-1}{-2+1} = 3,$$

$$f[f(x)] = \frac{f(x)-1}{f(x)+1} = \frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1} = -\frac{1}{x}.$$

3 答案 $4x + \frac{2}{x^2} + 1, 4x^2 + \frac{2}{(x^2+1)^2} + 5$.

令 $t = \frac{1}{x}$, 则 $f(t) = 4t + \frac{2}{t^2} + 1$, 即 $f(x) = 4x + \frac{2}{x^2} + 1$.

$$f(x^2+1) = 4(x^2+1) + \frac{2}{(x^2+1)^2} + 1 = 4x^2 + \frac{2}{(x^2+1)^2} + 5.$$

4 答案 $(-\infty, -4] \cup [4, +\infty), -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.

由反正弦函数的定义域知: $-1 \leq \frac{4}{x} \leq 1$, 解得 $x \leq -4$ 或 $x \geq 4$,

定义域 $D_f = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$.

$$f(-4) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \quad f\left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}, \quad f\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

5 答案 (C).

因为 $1+x^2 \geq 2|x|$, $-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$, $\Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi x}{2(1+x^2)} \leq \frac{\pi}{4}$,

所以, $-\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \leq \sin \frac{\pi x}{2(1+x^2)} \leq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故选 (C).

评注

本题很容易错选为 (A).

6 答案 $-\frac{\pi^3}{96}$.

因为 $f\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, $g(-1) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$, $h(2) = \operatorname{arccot} 1 = \frac{\pi}{4}$.

所以, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot g(-1) \cdot h(2) = \frac{\pi}{6} \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi^3}{96}$.

7 答案 $\frac{4}{x^2-2}$.

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{4x^2}{x^4+1} \xrightarrow{\text{同除以 } x^2} \frac{4}{x^2 + \frac{1}{x^2}} \xrightarrow{\text{配方}} \frac{4}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2},$$

令 $t = x + \frac{1}{x}$, 得 $f(t) = \frac{4}{t^2-2}$, 即 $f(x) = \frac{4}{x^2-2}$.

8 答案 $\frac{1}{12}, -\frac{\sqrt{2}}{8}, 0$.

因为 $|\frac{\pi}{6}| < \frac{\pi}{3}$, 所以 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{6} \left| \sin \frac{\pi}{6} \right| = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$,

同理, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{4}\right) \left| \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right| = -\frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{8}$,

因为 $2 > \frac{\pi}{3}$, 所以 $f(2) = 0$.

9 答案 $g(x) = \frac{1}{2} \arctan(x^2-1), D_g = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

用 $g(x)$ 替换 $f(x)$ 中的 x , 得 $f[g(x)] = \tan[2g(x)]$, 又 $f[g(x)] = x^2-1$,

故 $\tan[2g(x)] = x^2-1$, 即 $2g(x) = \arctan(x^2-1) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2} \arctan(x^2-1)$.

已知 $|g(x)| \leq \frac{\pi}{8}$, 得 $|\arctan(x^2-1)| \leq \frac{\pi}{4}$, 利用反正切函数可知

$-1 \leq x^2-1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 2$, 即 $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$, 定义域为 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

10 答案 $(-\infty, +\infty)$, $4, 1, 1$.

画函数 $y=x, y=x^2, y=1$ 的图像, 比较大小可得

$$\varphi(x) = \max\{x, x^2, 1\} = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ x^2, & |x| > 1 \end{cases},$$

定义域为 $|x| \leq 1$ 与 $|x| > 1$ 的并集, 即 $D_\varphi = (-\infty, +\infty)$.

由 $|-2| > 1$, 得 $\varphi(-2) = (-2)^2 = 4$; 由 $|-1| = 1$, 得 $\varphi(-1) = 1$; 而 $|0| < 1$, 故 $\varphi(0) = 1$.

11 答案 $f[g(x)] = \begin{cases} -1, & x < \frac{1}{2} \\ 1, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}, \quad g[f(x)] = \begin{cases} -3, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}.$

用 $g(x)$ 替换 $f(x)$ 中的 x , 得

$$f[g(x)] = \begin{cases} -1, & g(x) < 0 \\ 1, & g(x) \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{f \circ \lambda_{g(x)}} \begin{cases} -1, & 2x-1 < 0 \\ 1, & 2x-1 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -1, & x < \frac{1}{2} \\ 1, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases};$$

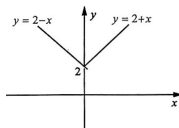
用 $f(x)$ 替换 $g(x)$ 中的 x , 得

$$g[f(x)] = 2f(x) - 1 \xrightarrow{f \circ \lambda_{f(x)}} \begin{cases} 2 \times (-1) - 1, & x < 0 \\ 2 \times 1 - 1, & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -3, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}.$$

12 答案 $f[g(x)] = \begin{cases} 2-x, & x < 0 \\ 2+x^2, & x \geq 0 \end{cases}, \quad g[f(x)] = \begin{cases} (2-x)^2, & x < 0 \\ (2+x)^2, & x \geq 0 \end{cases}.$

用 $g(x)$ 替换 $f(x)$ 中的 x , 得

$$f[g(x)] = \begin{cases} 2-g(x), & g(x) < 0 \\ 2+g(x), & g(x) \geq 0 \end{cases},$$



12 题 - 图

由 $g(x)$ 的定义: 当 $x < 0$ 时, $g(x) = x < 0$; 当 $x \geq 0$ 时, $g(x) = x^2 \geq 0$, 代入上式得

$$f[g(x)] = \begin{cases} 2-x, & x < 0 \\ 2+x^2, & x \geq 0 \end{cases}.$$

画函数 $y = f(x) = \begin{cases} 2-x, & x < 0 \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases}$ 的图像, 可知 $f(x) \geq 2 > 0$,

用 $f(x)$ 替换 $g(x)$ 中的 x , 得 $g[f(x)] = \begin{cases} f(x), & f(x) < 0 \text{ (不存在)} \\ f^2(x), & f(x) \geq 0 \end{cases},$

所以

$$g[f(x)] = f^2(x) = \begin{cases} (2-x)^2, & x < 0 \\ (2+x)^2, & x \geq 0 \end{cases}.$$

13 答案 $f(x) + g(x) = \begin{cases} 2x+1+\sin x, & x < 0 \\ x^2+1+\sin x, & 0 \leq x < \pi \\ x^2+1+\cos x, & x \geq \pi \end{cases}, \quad f(x)g(x) = \begin{cases} (2x+1)\sin x, & x < 0 \\ (x^2+1)\sin x, & 0 \leq x < \pi \\ (x^2+1)\cos x, & x \geq \pi \end{cases}.$

将 $f(x)$, $g(x)$ 在数轴上分段写出表达式:

$$\begin{array}{c} f(x) = 2x+1 \quad x^2+1 \quad x^2+1 \\ \hline x \\ \hline g(x) = \sin x \quad \sin x \quad \cos x \end{array}$$

$$\text{则 } f(x)+g(x) = \begin{cases} 2x+1+\sin x, & x < 0 \\ x^2+1+\sin x, & 0 \leq x < \pi \\ x^2+1+\cos x, & x \geq \pi \end{cases}, \quad f(x)g(x) = \begin{cases} (2x+1)\sin x, & x < 0 \\ (x^2+1)\sin x, & 0 \leq x < \pi \\ (x^2+1)\cos x, & x \geq \pi \end{cases}.$$

14 答案 $y = \frac{-4x}{(1+x)^2}.$

设 $y = f(x)$, 令 $t = \sqrt{1+x}$, 则 $y = \frac{1-t}{1+t} \Rightarrow t = \frac{1-y}{1+y}$,

即 $\sqrt{1+x} = \frac{1-y}{1+y}$, 解出 $x = \frac{(1-y)^2}{(1+y)^2} - 1 = \frac{-4y}{(1+y)^2}.$

反函数为 $y = \frac{-4x}{(1+x)^2}.$

15 答案 (D).

(A) 由 $f(-x) = [(-x)^2+1]\sin^3(-x) = -(x^2+1)\sin^3 x = -f(x)$,

知 $f(x)$ 为奇函数. 或利用“奇函数 $\times$ 偶函数=奇函数”知: $f(x) = (x^2+1)\sin^3 x$ 是奇函数.

(B) 因为 $g(-x) = \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + a^2}) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + a^2})$

$$= \ln \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2} + x} = \ln a^2 - \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}),$$

所以 $g(x)$ 不是奇函数, 也不是偶函数.

评注

当 $a^2 = 1$ 时, $g(x)$ 是奇函数.

(C) 由 $h(-x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} = -\frac{2^{-x} - 2^x}{2^{-x} + 2^x} = -h(x)$, 知 $h(x)$ 为奇函数.

(D) 因为 $\varphi(-x) = (-x)^2 \sec(-x) + \csc^2(-x) = x^2 \sec x + \csc^2 x = \varphi(x)$,

所以 $\varphi(x)$ 为偶函数. 故选 (D).

也可由“偶函数+偶函数=偶函数”知 $\varphi(x)$ 为偶函数.

16 答案 (A).

(A) 令 $F(x) = f[f(x)]$, 由 $f(x)$ 为奇函数, $f(-x) = -f(x)$, 得

$$F(-x) = f[f(-x)] = f[-f(x)] = -f[f(x)] = -F(x),$$

所以, $F(x) = f[f(x)]$ 是奇函数, 故选 (A).

类似可推出(B)(C)(D)都是偶函数.

评注

两个奇函数复合是奇函数, 一个奇函数与一个偶函数复合是偶函数, 两个偶函数复合是偶函数. 此结论可直接使用.

17 答案 单增.

方法一: 利用定义. $f(x)$ 的定义域为 $D_f = (-\infty, +\infty)$, 对于任意的 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$,

$$\begin{aligned} \text{当 } x_1 < x_2 \text{ 时, } f(x_2) - f(x_1) &= x_2^3 - x_1^3 + 2(x_2 - x_1) \\ &= (x_2 - x_1) \left[\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 \right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 + 2 \right] > 0, \end{aligned}$$

即 $f(x_2) > f(x_1)$, 所以 $f(x)$ 在 $D_f = (-\infty, +\infty)$ 内单增.

方法二: 利用导数. 因为 $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0, x \in (-\infty, +\infty)$, 所以 $f(x)$ 在 $D_f = (-\infty, +\infty)$ 内单增.

18 答案 无界, 有界.

$$f(x) = \frac{1}{x-2}, x \in (2, 3).$$

方法一: 利用定义. 对任意大正数 M , 取 $x_0 = \frac{1}{M+1} + 2 \in (2, 3)$, 有

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0 - 2} = \frac{1}{\frac{1}{M+1} + 2 - 2} = M + 1 > M, \text{ 即 } f(x) \text{ 在 } (2, 3) \text{ 内无界.}$$

方法二: 利用极限的性质. 因为 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$, 由极限的性质知

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \text{ 在 } (2, 3) \text{ 内无界.}$$

$$\text{而 } f(x) = \frac{1}{x-2}, x \in (3, +\infty). \text{ 由 } 1 < x-2 < +\infty \Rightarrow 0 < \frac{1}{x-2} < 1,$$

$$\text{所以 } f(x) = \frac{1}{x-2} \text{ 在 } (3, +\infty) \text{ 内有界.}$$

评注

在各种考试中, 多用极限判定函数的有界性.

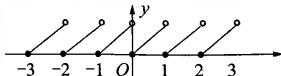
19 答案 $\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{因为 } f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= 2 + \cos^2\left[2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1\right] = 2 + \cos^2(2x - 1 + \pi) \\ &= 2 + \cos^2(2x - 1) = f(x), \end{aligned}$$

$$\text{所以 } f(x) = 2 + \cos^2(2x - 1) \text{ 的周期为 } \frac{\pi}{2}.$$

20 答案 (B).

画出 $f(x) = x - [x]$ 的图像:



20 题 - 图

由 $0 \leq f(x) < 1 \Rightarrow f(x)$ 有界, 且是以 1 为周期的周期函数.

事实上, $f(x+1) = x+1 - [x+1] = x+1 - ([x]+1) = x - [x] = f(x)$. 故选 (B).

21 答案 $\frac{1}{2}$.

$$x_n = \frac{n}{2n+1} \xrightarrow[\text{同除以 } n]{\frac{1}{2+\frac{1}{n}}} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}, \text{ 即 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

【证明】 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 要使 $|x_n - \frac{1}{2}| = \left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$,

$$\text{即 } \frac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon, \text{ 解得 } n > \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}.$$

取正整数 $N = [\frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}]$ (或 $N = [\frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}] + 1$), 则当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$,

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

22 答案 $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \text{不存在}, & x = -1 \\ \infty, & |x| > 1 \end{cases}$

该极限取决于参变量 x , 需讨论.

当 $|x| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ (如 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{2})^n = 0$);

当 $x = 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$;

当 $x = -1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ 不存在, 数列 $\{(-1)^n\}$ 振荡发散;

当 $|x| > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty$, 极限不存在, 数列 $\{x^n\}$ 无穷发散.

所以, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \text{不存在}, & x = -1 \\ \infty, & |x| > 1 \end{cases}$

23 答案 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^x = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \infty, & x > 0 \end{cases}$

需讨论参变量 x .

当 $x < 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^x = 0$ (如 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$).

当 $x = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^x = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$.

当 $x > 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^x = \infty$ (如 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$).

$$\text{所以, } \lim_{n \rightarrow \infty} n^x = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \infty, & x > 0 \end{cases}.$$

评注

22题与23题在各种考试中经常出现,需辨析清楚,结论可直接使用.

24 答案 0.

数列的通项记作 x_n , 设 k 为正整数, 则

$$\text{当 } n = 2k - 1 \text{ 时, } \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2k} \right) = 0;$$

$$\text{当 } n = 2k \text{ 时, } \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^k} = 0.$$

$$\text{因为 } \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = 0, \text{ 所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

25 答案 1.

设 k 为正整数, 则

$$\text{当 } n = 2k \text{ 时, } \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k+1}{2k+2} \stackrel{\text{同除以 } 2k}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2k}}{1 + \frac{1}{k}} = 1,$$

$$\text{当 } n = 2k - 1 \text{ 时, } \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1,$$

$$\text{因为 } \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = 1, \text{ 所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

26 答案 (D).

记数列 $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n, \dots$ 的通项为 z_n , 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_{2n} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} z_{2n-1},$$

所以, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ 不存在, 故选 (D).

27 答案 (B).

逐个命题考察.

① 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 由“ $\varepsilon - N$ ”定义“对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$ ”, 从而使 $||x_n| - |a|| < |x_n - a| < \varepsilon$ 成立, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$, ①正确.

② 若取 $x_n = (-1)^n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n| = 1$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在, ②不正确.

③ 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则任意子数列极限都是 a , 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$, ③显然正确.

④ 中, 若 $a = 0$, 命题不成立; 若 $a \neq 0$, 命题才成立, 故④不正确.

综上, 应选 (B).

28 提示 找出两个子数列, 其极限不同.

【证明】记 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{n\pi}{4}$, 设 k 为正整数.

若 $n = 8k$ 时, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{8k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{8k} \right) \sin \frac{8k\pi}{4} \right] = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0$,

若 $n = 8k + 2$ 时, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{8k+2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{8k+2} \right) \sin \left(2k\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right] = 1$,

因为 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{8k} \neq \lim_{k \rightarrow \infty} x_{8k+2}$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在, 即 $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sin \frac{n\pi}{4} \right\}$ 的极限不存在.

29 提示 利用“ $\varepsilon - \delta$ ”定义.

【证明】 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 要使

$$\left| \frac{1-4x^2}{2x-1} - (-2) \right| = |1-2x| = 2 \left| x - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon, \text{ 需 } \left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ 取 } \delta = \frac{\varepsilon}{2},$$

当 $0 < \left| x - \frac{1}{2} \right| < \delta$ 时, 恒有 $\left| \frac{1-4x^2}{2x-1} - (-2) \right| < \varepsilon$, 由极限的定义知:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1-4x^2}{2x-1} = -2.$$

30 答案 (1) 不存在; (2) 不存在.

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x-1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x-1} = +\infty,$$

因为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 不存在.

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \arccot(1-x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arccot(1-x) = \pi,$$

因为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 不存在.

31 答案 0.

分段点为 $x = 0$, 需考察左、右极限.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) \sin x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \cos x) = 0,$$

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

32 答案 不存在, $0, \frac{1}{\sqrt{5}}$, 不存在.

$x=1$ 是分段点, 考察左、右极限.

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在.

事实上, 由 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x) = -\infty$ 知, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $x < 1 \Rightarrow f(x) = \ln(1-x)$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1-x) = \ln 1 = 0$.

当 $x \rightarrow 2$ 时, $x > 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

因为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1-x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2x+1}} = 0$,

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 不存在. 事实上, 由 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ 知, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 不存在.

评注

本题应注意分段点 $x=1$ 处, 需讨论左、右极限; $x=0, x=2$ 不是分段点, 不需求左、右极限; $x \rightarrow \infty$ 的极限, 需考察 $x \rightarrow -\infty, x \rightarrow +\infty$ 的极限.

33 答案 1, 不存在, 0, -1, 1, -1, 不存在.

看图可得 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$.

$x=0$ 是分段点, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$, 二者不等, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

$x=1$ 是分段点, 因 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$, 二者相等, 故 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.

$x=2$ 是分段点, 因 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -1$, 故 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$.

当 $x < 0$ 时, $f(x) = 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.

当 $x > 2$ 时, $f(x) = -1$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$.

因为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 不存在.

评注

本题也可以通过图像先求出函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & 0 < x \leq 1, \text{ 再用函数式求相应的极限.} \\ 1-x, & 1 < x < 2 \\ -1, & x \geq 2 \end{cases}$

34 答案 (B).

已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x} = -1 < 0$, 由极限的局部保号性,

存在去心邻域 $0 < |x-1| < \delta$, 有 $\frac{f(x)}{x} < 0$, 又 $x \rightarrow 1, x > 0$, 则 $f(x) < 0$.

故选 (B).

(A) 错在“任一”去心邻域, (C) 错在“ $f(x) \leq 0$ ”, (D) 错在“任一”去心邻域.

35 答案 (A).

由极限的局部保号性, 显然 (A) 正确, (B) 错误.

(B) 的反例: $f(x) = |x|, g(x) = |2x|$, 虽然 $f(x) < g(x)$, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

(C) 错在“任意的 x ”, 应在 x_0 的某去心邻域内, 有 $f(x) < g(x)$.

(D) 错误, 因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 与 $f(x)$ 在 x_0 点是否有定义无关.

故选 (A).

36 提示 找两个不同的数列, 使其极限不同.

【证明】 取 $x_n = 2n\pi$, $y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$.

因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \cos x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [2n\pi \cos(2n\pi)] = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n \cos y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(2n\pi + \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right] = 0$,

由海因定理可知, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cos x$ 不存在.

评注

类似可证, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x$ 不存在; $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在; $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ 不存在.

37 提示 利用极限的“ $\varepsilon-X$ ”定义.

【证明】 因 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 则对于给定的 $\varepsilon = 1$, 存在正数 $X > 0$, 使得当 $|x| > X$ 时, 恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon = 1;$$

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|.$$

令 $M = 1 + |A| > 0$, 当 $|x| > X$ 时, $|f(x)| < M$, 即函数 $f(x)$ 局部 (在 $|x| > X$ 内) 有界.

38 提示 $\lim_{x \rightarrow 0} y = 0$.

【证明】 方法一: 利用极限定义.

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 要使 $|y - 0| = |2x \sin \frac{1}{x} - 0| = 2|x| \cdot \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 2|x| < \varepsilon$,

需 $|x| < \frac{\varepsilon}{2}$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$, 当 $0 < |x - 0| < \delta$ 时, 恒有

$|y - 0| = |2x \sin \frac{1}{x} - 0| < \varepsilon$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} y = 0$, $y = 2x \sin \frac{1}{x}$ 是无穷小.

方法二: 利用无穷小性质.

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $2x$ 是无穷小, 而 $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$, 即有界.

由无穷小的性质 (无穷小 $\times$ 有界量 = 无穷小) 知, $y = 2x \sin \frac{1}{x}$ 是无穷小.

评注

方法一更有证明的味道.

39 答案 无界, 非无穷大.

因为对于任意大的 $M > 0$, 存在 $x_0 = [M + 1]\pi$, 使得

└ 取整数

$$|y(x_0)| = [M + 1]\pi \cdot |\cos([M + 1]\pi)| = [M + 1]\pi > M,$$

所以 $y = x \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界.

而当 $x \rightarrow +\infty$ 时, y 却不是无穷大.

因为当取 $x_n = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \rightarrow +\infty$ 时, 有 $y(x_n) = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \cdot \cos\left((2n + 1)\frac{\pi}{2}\right) = 0$,

$|y|$ 不能无限大, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y \neq \infty$, 故 $y = x \cos x$ 不是无穷大.

同理, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y = x \cos x$ 不是无穷大.

评注

无穷大是无界变量, 反之, 无界变量未必是无穷大.

40 答案 $x \rightarrow 0^-$, $f(x)$ 是无穷小, $x \rightarrow 0^+$, $f(x)$ 是无穷大;

$x \rightarrow 0$, $g(x)$ 是无穷小, $x \rightarrow \infty$, $g(x)$ 是无穷大.

因 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$, 故当 $x \rightarrow 0^-$, $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ 是无穷小.

因 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, 故当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ 是无穷大;

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \arctan x = 0$, $g(x)$ 是无穷小.

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\arctan x \rightarrow \frac{\pi}{2} \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan x = +\infty$,

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $\arctan x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \arctan x = +\infty$,

所以, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $g(x)$ 是无穷大.

41 答案 (D).

方法一: 逐项考察.

因 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x-2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+1) = 0$, 故 (A) 正确.

因 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{2x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{x-2} = \infty$, $\Rightarrow$ 无穷小与无穷大的关系

故当 $x \rightarrow 2$ 时, $f(x)$ 是无穷大.

而 $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \ln(x+1) = \ln 3$, 知 $g(x)$ 局部有界. 故 (B) 正确.

又 $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) = -\infty$, 即当 $x \rightarrow -1^+$ 时, $g(x)$ 是无穷大.

而 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x}{x-2} = \frac{2}{3}$, 知 $f(x)$ 局部有界. 故 (C) 正确.

排除 (A) (B) (C), 应选 (D).

方法二: 直接判断 (D), 更简单.

因 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty$, 故当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x)$ 是无穷大.

但 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-2} \xrightarrow{\text{同除以 } x} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1-\frac{2}{x}} = 2$, 即当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x)$ 有界, 非无穷大.

故选 (D).

42 答案 (D).

方法一: 反证法直接推导.

若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$, 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{\frac{1}{x_n}} = 0$,

则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$. 否则, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{\frac{1}{x_n}} = \infty$, 与题设矛盾.

所以 y_n 必为无穷小, 故选 (D).

方法二: 反例排除法 (自己试一下吧).

43 答案 (1) 0; (2) 0.

(1) 因 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$, $|2 + \cos \frac{3}{x}| \leq 3$, 即当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x$ 是无穷小, $2 + \cos \frac{3}{x}$ 有界.

由无穷小的性质知 $\sin x \left(2 + \cos \frac{3}{x} \right)$ 是无穷小, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \left(2 + \cos \frac{3}{x} \right) = 0$.

(2) 因 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x+1} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan |2x+1| = \frac{\pi}{2}$, 由无穷小的性质知

$\frac{1}{2x+1} \cdot \arctan |2x+1|$ 仍为无穷小, 故 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan |2x+1|}{2x+1} = 0$.

44 答案 (B).

(A) 中, 考察倒数的极限, 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} \xrightarrow{\text{同除以 } x^2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}} = 0$,

知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \infty$, 排除 (A).

(B) 中, 因 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-1}{2x^4+x^3} \xrightarrow{\text{同除以 } x^4} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^4}}{2 + \frac{1}{x}} = 0$, 而 $|3-2\sin x| \leq 5$, 由无穷小的性质知

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-1}{2x^4+x^3} (3-2\sin x) = 0$, 即 (B) 是无穷小.

因 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{x\sqrt{x}} \xrightarrow{\text{等价代换}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{x}} = +\infty$, 排除 (C).

因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{\text{等价代换}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1 \neq 0$, 排除 (D).

故选 (B).

45 答案 (D).

方法一: 反例排除法.

取 $x_n = \frac{3}{n}, y_n = 1, z_n = \frac{n}{3}$, 满足题设条件, 当 $n=1, 2, 3$ 时, $x_n \geq y_n, y_n \geq z_n$,

即 (A) 和 (B) 都不正确.

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n} \times \frac{n}{3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$, 知 (C) 不正确.

排除 (A)(B)(C), 故选 (D).

方法二: 直接计算.

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} = 0$, 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = 1$,

利用极限的运算法则: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n z_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} = 1 \times 0 = 0$,

由无穷小与无穷大的关系知 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n z_n = \infty$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n z_n$ 不存在, 故选 (D).

评注

若 $\lim f(x) = A \neq 0, \lim g(x) = \infty$, 则 $\lim f(x)g(x) = \infty$. 可直接选 (D).

46 答案 0.

方法一: 利用极限与无穷小的关系.

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 2x + \frac{f(x)}{x} \right) = 4$, 得 $1 + 2x + \frac{f(x)}{x} = 4 + \alpha$, 其中 $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha = 0$,

解出 $f(x) = x(3 - 2x + \alpha)$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x(3 - 2x + \alpha) = 0$.

方法二: 利用极限的运算.

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 2x + \frac{f(x)}{x} \right) = 4$, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 + \lim_{x \rightarrow 0} 2x + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3, \text{ 则必有 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

若不然, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 0$, 而 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \infty$, 与 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$ 矛盾.

评注

本题是由已知极限, 求另一极限, 方法一利用“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$ ” (其中 α 为无穷小), 是解此类题的通用方法.

方法二利用重要知识点: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ (常数), 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

47 答案 (C).

方法一: 因 k 为非零常数, $f(x)$ 是无穷大, 由无穷大的性质可知

$kf(x)$ 是无穷大, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} kf(x) = \infty$, 故选 (C).

方法二: 题设条件知, $f(x), g(x)$ 的极限不存在, 不满足法则 1 的条件, 从而 (A)(B) 不正确.

由 (A) 不正确, 则 (D) 也不正确. 排除 (A)(B)(D), 故选 (C).

48 答案 6.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \left(2 + \frac{2}{x} \right) \left(3 - \frac{3}{x} \right) &\stackrel{\text{乘法}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{2}{x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{3}{x} \right) \\ &\stackrel{\text{加法}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow \infty} 3 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} \right) \\ &= (1 - 0) \times (2 + 0) \times (3 - 0) = 6. \end{aligned}$$

49 答案 -6.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x + \frac{2\pi}{x}}{\cos 2x} \stackrel{\text{除法, 加法}}{=} \frac{2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x + \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2\pi}{x}}{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos 2x} = \frac{2 + 4}{-1} = -6.$$

50 答案 (1) ∞ ; (2) $\frac{3}{2}$.

$$(1) \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{4}{x^3+1} \right) \xrightarrow{\text{通分}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x-3}{x^3+1},$$

显然分母的极限为 0, 分子的极限不为 0, 考虑倒数,

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x^2-x-3} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (x^3+1)}{\lim_{x \rightarrow -1} (x^2-x-3)} = \frac{0}{-1} = 0,$$

由无穷小与无穷大的关系得 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x-3}{x^3+1} = \infty$ (极限不存在).

$$\begin{aligned} (2) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) &\xrightarrow{\text{有理化}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n+2\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} \\ &\xrightarrow{\text{同除以}\sqrt{n}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{n}}} + \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} \xrightarrow{\text{除法}} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{n}}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

常出现的经典错误:

$$(1) \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} - \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3}{x^3+1} = \infty - \infty = 0;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2\sqrt{n}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n-\sqrt{n}} = \infty - \infty = 0.$$

评注

本题属于每一项的极限都不存在, 故不能直接用减法法则.

51 答案 (1) $\frac{5}{3}$; (2) 2.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+1)} \xrightarrow{\text{约分}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+1} \xrightarrow{\text{除法}} \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x+3)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x+1)} = \frac{5}{3}.$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x}{\sqrt{x+1}-1} &\xrightarrow{\text{有理化}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+x)(\sqrt{x+1}+1)}{x} \xrightarrow{\text{约分}} \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)(\sqrt{x+1}+1) \\ &\xrightarrow{\text{乘法}} \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+1}+1) = 1 \times 2 = 2. \end{aligned}$$

52 答案 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x \cos x}{x^3 - x \sin x + 1} &\xrightarrow{\text{同除以}x^3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \cos x}{1 - \frac{1}{x^2} \sin x + \frac{1}{x^3}} \\ &\xrightarrow{\text{除法、加法}} \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \cos x}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \sin x + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0. \end{aligned}$$

其中, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0, |\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$, 由无穷小的性质得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \sin x = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \cos x = 0.$$

评注

利用法则求极限,常用的技巧:约分、分子分母同除以或乘以一个函数、通分、有理化、取倒数等.

53 答案 (1) $\frac{1}{2}$; (2) $\frac{1}{a-1}$.

$$(1) \text{ 原式 } \xrightarrow{\text{通分}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+1} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{n^2+1} = \frac{1}{2}.$$

$$(2) \text{ 原式 } \xrightarrow{\text{求和}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{a^{n+1}}}{1 - \frac{1}{a}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - 1}{a^n} \cdot \frac{1}{a-1} = \frac{1}{a-1} \cdot \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n}\right) = \frac{1}{a-1}.$$

其中, 当 $a > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n} = 0$.

54 答案 (1) $-\infty$ (或 ∞); (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \frac{k+1}{k+2} \xrightarrow{\text{求和}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \dots + \ln \frac{n+1}{n+2} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{对数性质}} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n+1}{n+2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{n+2} = -\infty.$$

$$(2) \text{ 原式 } \xrightarrow{\text{有理化}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{1+2+\dots+(n+1)} + \sqrt{1+2+\dots+n}}$$

$$\xrightarrow{\text{求和}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} + \sqrt{\frac{n(1+n)}{2}}} \xrightarrow{\text{同除以 } n} \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

评注

53 题和 54 题是关于和的极限, 后续内容仍有涉及.

55 答案 $\frac{1}{2} \ln 2$.

$$\text{将函数值代入, 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln(2^1 \cdot 2^2 \cdots 2^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= \ln 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} \ln 2.$$

56 答案 $\frac{1}{1-a}$.

分子分母同乘以 $(1-a)$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-a)(1+a)(1+a^2)(1+a^4)\cdots(1+a^{2^n})}{1-a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-a^2)(1+a^2)(1+a^4)\cdots(1+a^{2^n})}{1-a} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-a^{2^n})(1+a^{2^n})\cdots(1+a^{2^n})}{1-a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-(a^{2^n})^2}{1-a} = \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a^{2^{n+1}}}{1-a} = \frac{1}{1-a}. \end{aligned}$$

其中, 当 $|a| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a^{2^{n+1}} = 0$.

评注

55 题和 56 题是关于积的极限, 先求积, 再求极限.

57 答案 不存在.

含指数函数 $e^{\frac{1}{x+1}}$, 需分别考察 $x \rightarrow -1^-$, $x \rightarrow -1^+$ 的极限.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 1}{x + 1} e^{\frac{1}{x+1}} \stackrel{\text{约分}}{=} \lim_{x \rightarrow -1^-} (x - 1) e^{\frac{1}{x+1}} \stackrel{\text{乘法}}{=} \lim_{x \rightarrow -1^-} (x - 1) \cdot \lim_{x \rightarrow -1^-} e^{\frac{1}{x+1}} = -2 \times 0 = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 1}{x + 1} e^{\frac{1}{x+1}} \stackrel{\text{约分}}{=} \lim_{x \rightarrow -1^+} (x - 1) e^{\frac{1}{x+1}} = -\infty.$$

其中, $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x - 1) = -2 \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} e^{\frac{1}{x+1}} = +\infty$, 由无穷大的性质 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$.

因为 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, 所以当 $x \rightarrow -1$ 时, $f(x)$ 的极限不存在.

评注

含指数函数 e^u 时, 需分别求 $u \rightarrow -\infty$, $u \rightarrow +\infty$ 的极限.

58 答案 不存在.

由于平方根号里面是 x 的二次多项式, 所以需考察 $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$ 的极限.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt{x^2 - x + 3}) \stackrel{\text{有理化}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{x^2 - x + 3}}$$

上式分母提 x^2 并开方:

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}})} \stackrel{\text{除法}}{=} \frac{2}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}} = 1.$$

$$\text{同理, } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt{x^2 - x + 3}) \stackrel{\text{有理化}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{x^2 - x + 3}} \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{|x|(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}})} = -\frac{2}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}} = -1.$$

因为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt{x^2 - x + 3}) \neq \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt{x^2 - x + 3})$,

所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt{x^2 - x + 3})$ 不存在.

评注

很多同学直接用减法法则得出 “ $\infty - \infty = 0$ ” 是错误的, 请找出错误的原因.

59 答案 1.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (1 + \sin 2x)^{\ln(\tan x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (1 + \sin 2x)^{\frac{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \ln(\tan x)}{x - \frac{\pi}{4}}} = (1 + 1)^{\ln 1} = 2^0 = 1.$$

60 答案 (B).

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x \cos x - 1}{2x^2 - x \sin x} \xrightarrow{\text{同除以 } x^2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x} \cos x - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x} \sin x} = \frac{1}{2}$$

(上式中, 利用无穷小的性质得: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cos x = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin x = 0$),

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 1) = +\infty, \text{ 所以 } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x \cos x - 1}{2x^2 - x \sin x} \right)^{x^2 + 1} = 0.$$

$$\text{因 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{2}{x}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{3}{2} > 1, \text{ 而 } \lim_{x \rightarrow \infty} e^{|x|} = +\infty, \text{ 得 } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{2x-1} \right)^{e^{|x|}} = \infty.$$

故选 (B).

61 答案 $a=8, b=-20$.

$$\text{由 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 4} = 3, \text{ 及 } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 0, \text{ 得}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax + b) = 0 \Rightarrow 2a + b = -4, b = -2a - 4, \text{ 代入}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax - 2a - 4}{x^2 - 4} = 1 + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a}{x + 2} = 1 + \frac{a}{4},$$

$$\text{所以, } 1 + \frac{a}{4} = 3, \text{ 解得 } a = 8, \text{ 从而 } b = -20.$$

评注

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ (常数), 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$. 这是一个常用知识点.

62 答案 $a=1, b=-1$.

$$\text{由 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\ln(a+x)} (\cos x - b) = 4 \neq 0, \text{ 及 } \lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x = 0, \text{ 得}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(a+x) = 0 \Rightarrow \ln a = 0 \Rightarrow a = 1, \text{ 则}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1+x)} (\cos x - b) \xrightarrow{\text{等价代换}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} (\cos x - b) = 2(1-b) = 4, \text{ 解得 } b = -1.$$

评注

常用知识点: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$ (常数), 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

63 答案 $a=16, b=8$.

$$\text{由 } \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x + \sqrt{ax^2 - bx - 1}) = 1, \text{ 提取 } x, \text{ 原式为}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[4x + \sqrt{x^2 \left(a - \frac{b}{x} - \frac{1}{x^2} \right)} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(4 - \sqrt{a - \frac{b}{x} - \frac{1}{x^2}} \right) = 1,$$

又 $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 - \sqrt{a - \frac{b}{x} - \frac{1}{x^2}} \right) = 0$ (反证法可推导).

解得 $4 - \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{a - \frac{b}{x} - \frac{1}{x^2}} = 4 - \sqrt{a} = 0 \Rightarrow a = 16$. 将其代入原式左端:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (4x + \sqrt{16x^2 - bx - 1}) &\stackrel{\text{有理化}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx + 1}{4x - \sqrt{16x^2 - bx - 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx + 1}{4x + 4x \sqrt{1 - \frac{b}{16x} - \frac{1}{16x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b + \frac{1}{x}}{4 + 4 \sqrt{1 - \frac{b}{16x} - \frac{1}{16x^2}}} = \frac{b}{8} \stackrel{\text{已知}}{=} 1, \end{aligned}$$

解得 $b = 8$.

评注

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = A$ (常数), 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$. 这也是一个常用知识点.

64 答案 $a = -1, b = 0$.

$$\text{由 } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1 - x^6} - ax^2 - b) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^6} - 1} - a - \frac{b}{x^2} \right) = 0,$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^6} - 1} - a - \frac{b}{x^2} \right) = 0.$$

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^6} - 1} - a - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{x^2} = -1 - a = 0, \text{ 得 } a = -1.$$

将 $a = -1$ 代入原式: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1 - x^6} + x^2 - b) = 0$, 则

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1 - x^6} + x^2) \stackrel{\text{有理化}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[3]{1 - x^6})^2 - x^2 \sqrt[3]{1 - x^6} + x^4} \stackrel{\text{同除以 } x^4}{=} 0.$$

评注

有理化时, 利用公式 $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$.

65 答案 0.

$$\text{由 } 0 < \sin \frac{1}{n} < 1,$$

$$\text{知 } 0 < \frac{3^n}{n!} \sin \frac{1}{n} < \frac{3^n}{n!} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times \dots \times 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n} < \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{1 \times 2 \times 3 \times n} = \frac{27}{2n},$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{27}{2n} = 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} \sin \frac{1}{n} = 0$.

66 提示 抓“头与尾”.

【证明】 记 $x_n = \frac{1}{n^2 + 2n + 1} + \frac{2}{n^2 + 2n + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 + 2n + n}$, 则

$$\frac{1}{n^2 + 2n + n} + \frac{2}{n^2 + 2n + n} + \dots + \frac{n}{n^2 + 2n + n} \leq x_n \leq \frac{1}{n^2 + 2n + 1} + \frac{2}{n^2 + 2n + 1} + \dots + \frac{n}{n^2 + 2n + 1},$$

通分得 $\frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{n^2+2n+n} \leq x_n \leq \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{n^2+2n+1}$,

因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{n^2+2n+n} = \frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{n^2+2n+1} = \frac{1}{2}$, 由夹逼准则得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+2n+1} + \frac{2}{n^2+2n+2} + \dots + \frac{n}{n^2+2n+n} \right) = \frac{1}{2}.$$

67 答案 0.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x}) \stackrel{\text{和差化积}}{=} -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \cdot \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2},$$

又 $|\sin \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}| \leq 1$, 即 $\sin \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}$ 有界.

而 $0 < \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} < \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2}$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = 0$,

由夹逼准则得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} = 0$.

再由无穷小的性质可得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x}) = 0$.

68 答案 收敛, 2.

由 $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{4}{x_n} \right) \geq \frac{1}{2} \times 2 \sqrt{x_n \cdot \frac{4}{x_n}} = 2$, 知 $\{x_n\}$ 有下界.

又 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4}{(x_n)^2} \right) \stackrel{1/x_n \geq 1/2}{\leq} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4}{4} \right) = 1 \Rightarrow x_{n+1} \leq x_n$, 即 $\{x_n\}$ 单减.

因 $\{x_n\}$ 单减, 且有下界, 故数列 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{4}{x_n} \right)$ 两边求极限: $a = \frac{1}{2} \left(a + \frac{4}{a} \right)$, 解得 $a = \pm 2$.

又因 $x_n > 0$, 由极限的保号性: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \geq 0$, 故 $a = 2$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

69 答案 证 $\{x_n\}$ 单减且有下界; 0.

当 $x > 0$ 时, 有 $e^x - 1 > x$. 由 $x_1 > 0 \Rightarrow e^{x_1} - 1 > x_1 > 0$.

利用数学归纳法得: $x_n > 0$, 即 $\{x_n\}$ 有下界.

又 $e^{x_{n+1}} = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = \frac{e^{x_n} - e^0}{x_n - 0} = e^{\xi_n} < e^{x_n}$ (拉格朗日中值定理, 其中 $0 < \xi_n < x_n$).

可得 $x_{n+1} < x_n \Rightarrow \{x_n\}$ 单减, 由单调有界准则知 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n e^{x_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{x_n} - 1$, 即 $ae^a = e^a - 1$, 解得 $a = 0$.

评注

68题和69题都是单减有下界(或单增有上界)的数列有极限. 此类题通用做法:

第1步是推证数列单调有界; 第2步是利用已知数列通项的关系, 求出极限.

70 答案 (1) 利用定积分的性质与分部积分法可证; (2) 1.

(1) 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $x^{n+1} \leq x^n \Rightarrow x^{n+1}\sqrt{1-x^2} \leq x^n\sqrt{1-x^2}$, 由定积分的性质知 $a_{n+1} \leq a_n$, 即 $\{a_n\}$ 单调递减.

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{3} \int_0^1 x^{n-1} d(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \\ &\stackrel{\text{分部积分}}{=} -\frac{1}{3} x^{n-1} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 + \frac{1}{3} (n-1) \int_0^1 x^{n-2} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{1}{3} (n-1) \left[\int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1-x^2} dx - \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx \right] = \frac{1}{3} (n-1) (a_{n-2} - a_n), \end{aligned}$$

解得 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} \ (n=2, 3, \dots)$.

(2) 因为 $\{a_n\}$ 单调递减, 且 $a_n > 0$, 则 $\frac{a_n}{a_{n-2}} \leq \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq 1$, 又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+2} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1, \quad \text{由夹逼准则知 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1.$$

71 答案 (1) $\frac{2}{5}$; (2) 0.

(1) 属于“ $\frac{0}{0}$ ”型不定式, 对照典式知 $\varphi(x) = 2x$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} \stackrel{\text{典式}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2}{5} = 1 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

→ 不需写“ $2x$ ”, 以下皆如此.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{5x} = 0, |\sin 2x| \leq 1$, 由无穷小的性质知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{5x} \cdot \sin 2x = 0.$$

评注

仔细观察 (1) 与 (2) 的区别, 一不留神错把 (2) 做成 (1). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 0 \neq 1$.

72 答案 $\frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x \cdot \cos 3x} \stackrel{\text{乘法}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x} \\ &\stackrel{\text{典式}}{=} 1 \times \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

73 答案 (1) 2; (2) $\frac{1}{2}$.

(1) 令 $t = \arcsin 2x \Rightarrow 2x = \sin t$, 且 $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow t \rightarrow 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{x} \stackrel{\text{典式}}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{2x} = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 2 \times 1 = 2.$$

(2) 令 $t = \arctan x \Rightarrow x = \tan t$, 且 $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow t \rightarrow 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{2x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2 \tan t} \stackrel{\text{乘法}}{=} \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \cos t \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = \frac{1}{2}.$$

评注

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$ 可以直接使用.

74 答案 (1) $-\frac{1}{6}$; (2) 1.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 3x}{2x + \sin 4x} \stackrel{\text{同除以 } x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \frac{\sin 3x}{x}}{2 + \frac{\sin 4x}{x}} \stackrel{\text{四则运算}}{=} \frac{2 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}}{2 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}}$$

$$\stackrel{\text{重要极限}}{=} \frac{2-3}{2+4} = -\frac{1}{6}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - \sin 3x}{2x + \sin 4x} \stackrel{\text{同除以 } x}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x} \sin 3x}{2 + \frac{1}{x} \sin 4x} \stackrel{\text{四则运算}}{=} \frac{2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin 3x}{2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin 4x} \stackrel{\text{无穷小性质}}{=} \frac{2-0}{2+0} = 1.$$

评注

仔细鉴别 (1) 与 (2), (1) 属于 “ $\frac{0}{0}$ ” 型不定式, (2) 属于 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 型不定式.

75 答案 4.

由典式知 $\varphi(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$, 分母凑出 $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x^2 - 2x - 3)}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x^2 - 2x - 3)}{(x-3)(x+1)} \cdot (x+1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x^2 - 2x - 3)}{(x^2 - 2x - 3)} \cdot \lim_{x \rightarrow 3} (x+1) = 1 \times 4 = 4. \end{aligned}$$

76 答案 2.

方法一: 利用公式得 $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{x^2} = 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2.$$

方法二: 利用等价无穷小代换得 $1 - \cos 2x \sim 2x^2$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

77 答案 $x^2 + 1$.

n 是变量, 由典式知 $\varphi(n) = \frac{x^2 + 1}{n^2}$, 且 $n \rightarrow \infty, \varphi(n) \rightarrow 0$.

凑出分母 $\varphi(n)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin \frac{x^2+1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{x^2+1}{n^2}}{\frac{x^2+1}{n^2}} \cdot (x^2+1) \stackrel{\text{乘法}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{x^2+1}{n^2}}{\frac{x^2+1}{n^2}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (x^2+1)$$

$$= 1 \cdot (x^2+1) = x^2+1.$$

78 答案 e^{-4} .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{2x+100} \stackrel{\text{乘法}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{100}$$

$$\stackrel{\text{凑倒数}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2} \cdot (-4)} \cdot 1 = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}} \right)^{-4} = e^{-4}.$$

评注本题需要先用乘法法则，求出 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \text{无穷小})^{\text{常数}} = 1$ ，以简化计算。**79 答案** e^4 .

直接凑典式：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^{2x} \stackrel{\text{凑倒数}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{2} \cdot \frac{4x}{x-1}}$$

$$\stackrel{\text{幂指法则}}{=} \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{2}} \right\}^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x-1}} = e^4.$$

80 答案 e^{-1} .分子分母同除以 $2x^2$ ，再凑典式。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2-1)^{x^2}}{(2x^2+1)^{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x^2}\right)^{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x^2}\right)^{x^2}} = \frac{\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x^2}\right)^{-2x^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x^2}\right)^{2x^2} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}} = e^{-1}.$$

评注

79 题与 80 题属于同一类，分别用了两种不同的处理方法。

81 答案 $\frac{3}{k}$.属于“ $\frac{0}{0}$ ”型不定式。方法一：利用两个重要极限，需分子分母同除以 x 。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1+kx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\ln(1+kx)}{x}} \stackrel{\text{除法}}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+kx)^{\frac{1}{x}}}$$

$$\stackrel{\text{凑典式}}{=} \frac{3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+kx)^{\frac{1}{k} \cdot k}} = \frac{3 \times 1}{\ln e^k} = \frac{3}{k}.$$

方法二: 等价无穷小代换.

利用公式: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1+kx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{kx} \stackrel{\text{约分}}{=} \frac{3}{k}.$$

方法三: 运用洛必达法则.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1+kx)} \stackrel{\text{分别求导}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos 3x}{\frac{1}{1+kx}} = \frac{3}{k} \lim_{x \rightarrow 0} \cos 3x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (1+kx) = \frac{3}{k}.$$

方法四: 运用泰勒公式.

利用公式: $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$,

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n).$$

有 $\sin 3x = 3x + o(x)$, $\ln(1+kx) = kx + o(x)$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1+kx)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + o(x)}{kx + o(x)} \stackrel{\text{同除以 } x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + \frac{o(x)}{x}}{k + \frac{o(x)}{x}} \\ &= \frac{3 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x}}{k + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x}} = \frac{3+0}{k+0} = \frac{3}{k}. \end{aligned}$$

上式中, 利用高阶无穷小定义知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = 0$.

评注

本题给出 4 种解法, 解法一同时运用了两个重要极限. 求极限的题目一题多解, 常规方法, 如两个重要极限、等价无穷小代换、洛必达法则要熟练掌握.

82 答案 e^{-6} .

属于“ 1^∞ ”型不定式.

方法一: 利用两个重要极限.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan 2x)^{-\frac{3}{x}} &\stackrel{\text{凑倒数}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan 2x)^{\frac{1}{\tan 2x} \cdot \left(-\frac{3 \tan 2x}{x}\right)} \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan 2x)^{\frac{1}{\tan 2x}} \right) \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{3 \tan 2x}{x}\right) \stackrel{\text{两个重要极限}}{=} e^{-6}. \end{aligned}$$

方法二: 恒等变形.

利用公式: $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan 2x)^{-\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{3}{x} \ln(1 + \tan 2x)} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} \ln(1 + \tan 2x)},$$

其中, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} \ln(1 + \tan 2x) \xrightarrow{\text{等价代换}} 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} = 6$. 代入上式得:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan 2x)^{\frac{-3}{x}} = e^{-6}.$$

83 答案 (1) 1; (2) $e^{\frac{1}{3}}$.

(1) 直接凑典式.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{-\frac{1}{\sin x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (\cos x - 1)]^{-\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (\cos x - 1)]^{\frac{1}{\cos x - 1} \cdot (-\frac{\cos x - 1}{\sin x})} \\ &= \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (\cos x - 1)]^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right\}^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}}, \end{aligned}$$

其中, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} \xrightarrow{\text{等价代换}} \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$ (洛必达法则亦可), 则原式 $= e^0 = 1$.

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} &\xrightarrow{\text{凑典式}} \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\tan x - x}{x} \right)^{\frac{x}{\tan x - x} \cdot \frac{\tan x - x}{x^2}} \\ &= \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\tan x - x}{x} \right)^{\frac{x}{\tan x - x}} \right\}^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}}, \end{aligned}$$

其中, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} \xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sec x \cdot \tan x}{6x} = \frac{1}{3}$, 故原式 $= e^{\frac{1}{3}}$.

84 答案 $\sqrt{ab}$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a^x + b^x - 2}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a^x + b^x - 2}{2} \right)^{\frac{2}{a^x + b^x - 2} \cdot \frac{a^x + b^x - 2}{2x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + b^x - 2}{2x}}, \end{aligned}$$

其中, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + b^x - 2}{2x} \xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{2} = \frac{\ln a + \ln b}{2} = \frac{1}{2} \ln(ab)$.

代入上式得原式 $= e^{\frac{1}{2} \ln(ab)} = \sqrt{ab}$.

评注

83 题与 84 题需要凑出“1+无穷小”, 即“加1再减1”, 也可用洛必达法则求解.

85 答案 $\frac{1}{2a-1}$.

因为对数 $\ln$ 里面的 “ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2an-1}{n(1-2a)} \right)^n$ ” 属于“ 1^∞ ”型不定式.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n-2an-1}{n(1-2a)} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n(2a-1)} \right)^n$$

$$\stackrel{\text{凑例数}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n(2a-1)} \right)^{n(2a-1) \times \frac{1}{2a-1}} = \ln e^{\frac{1}{2a-1}} = \frac{1}{2a-1}.$$

86 答案 $a-b=2$.

等式左端属于“ 1^∞ ”型不定式, 利用第二重要极限.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right)^x \stackrel{\text{同除以 } x^2}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\left(1-\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{b}{x}\right)} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{x} \right)^{-x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{x} \right)^{-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{x} \right)^{-\frac{x}{a} \times a} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{x} \right)^{\frac{x}{b} \times (-b)} = e^a \cdot e^{-b} = e^{a-b}.$$

由题设知 $e^{a-b} = e^2$, 解得 $a-b=2$.

87 答案 (C).

显然, (A)(B)(D) 都与 $\sqrt{x}$ 等价, 故选 (C).

事实上, $1 - \cos \sqrt{x} \sim \frac{1}{2}(\sqrt{x})^2 = \frac{1}{2}x$.

88 答案 (D).

由 $\arctan 2x \sim 2x$, $\sqrt[3]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{3}x$, 知 (A)(B) 与 x 同阶无穷小;

由 $1 - \cos 2x \sim 2x^2$, 知 $1 - \cos 2x$ 是 x 的 2 阶无穷小;

而 $\tan x - \sin x = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x} \sim \frac{1}{2}x^3$, 即 $\tan x - \sin x$ 是 x 的 3 阶无穷小.

故选 (D).

89 答案 2.

由 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-3}{x^2-x+1} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \tan \frac{2x-3}{x^2-x+1} = 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \tan \frac{2x-3}{x^2-x+1} \stackrel{\text{等价代换}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{2x-3}{x^2-x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-3x}{x^2-x+1} = 2.$$

90 答案 (D).

由 $e^{x \cos x^2} - e^x \stackrel{\text{提 } e^x}{=} e^x (e^{x \cos x^2 - x} - 1) \sim x(\cos x^2 - 1) \sim -\frac{1}{2}x^5$,

即 $e^{x \cos x^2} - e^x$ 与 x^5 是同阶无穷小, 则 $n=5$, 故选 (D).

91 提示 利用定义.

【证明】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{\frac{1}{3}x^3} \stackrel{\text{洛必达}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{x^2} \stackrel{\text{重要极限}}{=} 1$,

所以, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3$.

92 提示 利用定义.

【证明】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^{x^2} - 1) \arctan 2x}{x^2} \stackrel{\text{等价代换}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln 2 \cdot x^3}{x^2} = 0$,

所以当 $x \rightarrow 0$ 时, $(2^{x^2} - 1) \arctan 2x = o(x^2)$.

93 答案 $a=0, b=2, c$ 为任意常数.

由等价无穷小定义知

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{ax^3 + bx^2 + c}{2x^2 + 1}} = 1, \text{ 即 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{ax^3 + bx^2 + c} = 1, \text{ 则 } a=0, b=2, c \text{ 为任意常数.}$$

94 答案 $k < 4$.

由题设知: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1) \ln(1+x^3)}{x(\arcsin x)^k} = 0$. 等价代换可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^5}{x^{k+1}} = 0 \Rightarrow k+1 < 5 \Rightarrow k < 4.$$

95 答案 $-\frac{1}{4}e$.

分子提取 $e^{\cos x}$, 及 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ 代入化简,

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} \sin x (\cos x - 1) (e^{1-\cos x} - 1)}{(2x+1) \cos x \sin^5 x}$$

$$\stackrel{\text{乘法}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x}}{(2x+1) \cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(e^{1-\cos x} - 1)}{\sin^4 x}$$

$$\stackrel{\text{等价代换}}{=} e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2(1-\cos x)}{x^4} \stackrel{\text{等价代换}}{=} -\frac{1}{4}e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4} = -\frac{1}{4}e.$$

评注

本题分子中的“ $\sin x - \tan x$ ”不能代换成“ $x - x$ ”, 同时灵活运用四则运算法则.

96 答案 $a=1, b=-\frac{1}{6}$.

由题设知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \ln(1-bx)} = 1$.

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \ln(1-bx)} \stackrel{\text{等价代换}}{=} \frac{1}{b} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^3} \stackrel{\text{洛必达}}{=} \frac{1}{b} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - a \cos ax}{3x^2},$$

因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - a \cos ax}{3x^2}$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 = 0$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - a \cos ax) = 0 \Rightarrow a = 1$. 则

$$\text{原式} = -\frac{1}{b} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \stackrel{\text{等价代换}}{=} -\frac{1}{b} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\frac{1}{6b}, \text{ 所以 } -\frac{1}{6b} = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{6}.$$

$$\text{即 } a = 1, b = -\frac{1}{6}.$$

97 答案 $A \ln a$.

方法一: 利用等价无穷小代换, 凑出所求极限.

由题设知 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{f(x)}{\sin^2 x} \right) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin^2 x} = 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{f(x)}{\sin^2 x} \right)}{a^x - 1} \stackrel{\text{等价代换}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{\sin^2 x}}{x \ln a} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3 \ln a},$$

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3 \ln a} = A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = A \ln a.$$

方法二: 利用极限与无穷小的关系求极限.

$$\text{由题设知: } \frac{\ln \left(1 + \frac{f(x)}{\sin^2 x} \right)}{a^x - 1} = A + \alpha \quad (\text{其中 } \lim_{x \rightarrow 0} \alpha = 0).$$

$$\ln \left(1 + \frac{f(x)}{\sin^2 x} \right) = (A + \alpha)(a^x - 1) \Rightarrow \frac{f(x)}{\sin^2 x} = e^{(A + \alpha)(a^x - 1)} - 1, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} &\stackrel{\sin x \sim x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(A + \alpha)(a^x - 1)} - 1}{x} \stackrel{\text{等价代换}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(A + \alpha)(a^x - 1)}{x} \\ &\stackrel{\text{等价代换}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(A + \alpha)x \ln a}{x} = A \ln a. \end{aligned}$$

98 答案 36.

方法一: 利用极限与无穷小的关系.

$$\text{由 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0, \text{ 得 } \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0 + \alpha, \text{ 其中 } \lim_{x \rightarrow 0} \alpha = 0.$$

$$xf(x) = x^3(0 + \alpha) - \sin 6x \Rightarrow f(x) = \frac{\alpha x^3 - \sin 6x}{x}, \text{ 将 } f(x) \text{ 代入:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x + \alpha x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \alpha$$

$$\stackrel{\text{洛必达}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 - 6 \cos 6x}{3x^2} \stackrel{\text{等价代换}}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(6x)^2}{x^2} = 36.$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + e^{-2x} \sin^2 x)}{\ln(1 + x^2 e^{-3x})} \stackrel{\text{等价代换}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} \sin^2 x}{x^2 e^{-3x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1.$$

103 答案 3.

利用三角函数的和差化积公式,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \cos \frac{\ln\left(1 + \frac{4}{x}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{2} \cdot \sin \frac{\ln\left(1 + \frac{4}{x}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{2} \\ &\stackrel{\text{乘法}}{=} 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{\ln\left(1 + \frac{4}{x}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{\ln \frac{x+4}{x+1}}{2} \\ &\stackrel{\text{等价代换}}{=} 2 \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{\ln \frac{x+4}{x+1}}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{3}{x+1}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x+1} = 3. \end{aligned}$$

104 答案 (D).

$$\text{因 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x (e^t - 1) dt}{x^3} \stackrel{\text{洛必达}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{3x^2} = \frac{1}{3}, \text{ 得 (A) 与 } x^3 \text{ 同阶无穷小};$$

$$\text{因 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3}) dt}{x^{\frac{5}{2}}} \stackrel{\text{洛必达}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \sqrt{x^3})}{\frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}}} \stackrel{\text{等价代换}}{=} \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}} = \frac{2}{5}, \text{ 得 (B) 与 } x^{\frac{5}{2}} \text{ 同阶无穷小};$$

$$\text{因 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sin x)^2 \cdot \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin x)^2}{3x^2} = \frac{1}{3}, \text{ 得 (C) 与 } x^3 \text{ 同阶无穷小};$$

$$\begin{aligned} \text{因 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt}{x^5} &\stackrel{\text{洛必达}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sin^3(1-\cos x)} \cdot \sin x}{5x^4} \\ &\stackrel{\text{等价代换}}{=} \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{(1-\cos x)^3}}{x^3} = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\left(\frac{1}{2} x^2\right)^3} = \frac{1}{10\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

得 (D) 与 x^5 同阶无穷小.

综上所述, 最高阶的无穷小是 (D), 故选 (D).

评注

本题综合运用了洛必达法则、变限积分函数求导数、等价无穷小代换.

105 答案 (1) 1; (2) $k=1$.

$$\begin{aligned} (1) a &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \stackrel{\text{通分}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x - \sin x}{x^2} \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} \stackrel{\text{等价代换}}{=} 1 + \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = 1. \end{aligned}$$

$$(2) f(x) - a = \frac{x^2 + x - \sin x - x \sin x}{x \sin x}, \text{ 而}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - a}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x - \sin x - x \sin x}{x^k \cdot x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)(x - \sin x)}{x^{k+2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^{k+2}} \stackrel{\text{等价代换}}{=} \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^{k+2}},$$

若 $f(x) - a$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k+2=3 \Rightarrow k=1$.

评注

本题运用了“ $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3 (x \rightarrow 0)$ ”, 使得计算简化, 利用洛必达法则亦可.

106 答案 $a=1, b=0, c=\frac{1}{2}$.

由题设及 $\lim_{x \rightarrow 0} (ax - \sin x) = 0$ 知: $\lim_{x \rightarrow 0} \int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt = 0$, 则 $b=0$.

而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} \stackrel{\text{洛必达}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}} \stackrel{\text{等价代换}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{x^2}$, 则必有 $a=1$.

原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, 所以 $c = \frac{1}{2}$.

107 答案 4.

由 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 4}{x - 1} = A$ (常数), $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$, 可得

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - 4] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4.$$

因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, 所以 $f(1) = 4$.

108 提示 利用定义.

【证明】对于任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$, 因为

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = 2(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) + 1 - (2x^2 - x + 1) \\ &= 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - \Delta x, \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - \Delta x] = 0,$$

所以 $f(x)$ 在 x 处连续, 由 x 的任意性知, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

109 答案 $\frac{1}{2}$.

由 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续知, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = k, \text{ 即 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2} = k.$$

评注

本题不需要考察左极限与右极限.

110 答案 不连续.

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{\tan x} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 2$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1 - 2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 - 2x)}{x} = -2,$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

111 答案 连续.

在分段点 $x=1$ 处, 因为 $f(1)=2\ln 1=0$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)^2 \cos \frac{1}{x-1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) \ln x = 0,$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

当 $x < 1$ 时, $f(x) = (x-1)^2 \cos \frac{1}{x-1}$ 连续; 当 $x > 1$ 时, $f(x) = (x+1) \ln x$ 连续.

综上, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

112 答案 1.

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \xrightarrow{\text{等价代换}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x^2} \xrightarrow{\text{有理化}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2})} = 1,$$

故补充定义 $f(0)=1$.

$$\text{即 } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x \arcsin x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

113 答案 (1) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq e \\ \ln x, & x > e \end{cases}$; (2) 连续.

$$(1) \text{ 当 } 0 < x < e \text{ 时, } f(x) \xrightarrow{\text{提} e^n} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^n + \ln \left[1 + \left(\frac{x}{e} \right)^n \right]}{n} = 1,$$

$$\text{当 } x > e \text{ 时, } f(x) \xrightarrow{\text{提} x^n} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^n + \ln \left[1 + \left(\frac{e}{x} \right)^n \right]}{n} = \ln x,$$

$$\text{当 } x = e \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2e^n)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2 + n}{n} = 1, \text{ 则}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq e \\ \ln x, & x > e \end{cases}$$

(2) 显然 $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = 1 = f(e)$, 即 $f(x)$ 在 $x=e$ 处连续.

又当 $0 < x < e$ 时, $f(x)=1$ 连续, 当 $x > e$ 时, $f(x)=\ln x$ 连续, 所以 $f(x)$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 内连续.

114 答案 2.

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos[\sqrt{x}f(x)]}{(e^{2x} - 1)f(x)} \xrightarrow{\text{等价代换}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x f^2(x)}{2x f(x)} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \xrightarrow{\text{连续}} \frac{1}{4} f(0),$$

所以, $\frac{1}{4}f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow f(0) = 2$.

115 答案 $x=1$ 是第一类可去间断点; $x=2$ 是第二类无穷间断点.

由 $f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-1)}$ 知, $f(x)$ 在 $x=1, x=2$ 处无定义, 从而间断点为 $x=1, x=2$.

因为 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = -2$, 所以 $x=1$ 是第一类可去间断点.

因为 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-2} = \infty$, 所以 $x=2$ 是第二类无穷间断点.

116 答案 (D).

因 $f(x)$ 在 $x=0, x=1$ 处无定义, 从而 $x=0, x=1$ 是间断点.

又 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}} - 1} = \infty$, 即 $x=0$ 是第二类无穷间断点.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}} - 1} = -1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}} - 1} = 0$,

即 $x=1$ 是第一类跳跃间断点. 故选 (D).

评注

本题中用到了 $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{x}{x-1}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{x}{x-1}} = \infty$.

117 答案 $a = -3, b \neq 0$.

由可去间断点的定义知 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq f(0) = b$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 \sin \frac{1}{2x}}{2^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 \sin \frac{1}{2x}}{x \ln 2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \sin \frac{1}{2x}}{\ln 2} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(a + \frac{\ln(1+3x)}{x} \right) = a + 3,$$

则 $a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3$, 且 $b \neq 0$.

118 答案 连续区间是 $(-\infty, 1), (1, +\infty)$; $x=1$ 是第一类跳跃间断点.

当 $|x| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 0$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}} = 1+x$.

当 $|x| > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \infty$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}} = 0$.

当 $|x| = 1$ 时, $f(-1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-1}{1+(-1)^{2n}} = 0$, $f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+1}{1+1^{2n}} = 1$. 可得

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ 1+x, & -1 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}.$$

因 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} 0 = 0$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (1+x) = 0$, 得 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = 0$,
故 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处连续, 从而 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 内连续.

因 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1+x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$, 得 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的第一类跳跃间断点, 从而 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内连续.

综上, $f(x)$ 的连续区间是 $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$; $x = 1$ 是 $f(x)$ 的第一类跳跃间断点.

119 答案 (1) 利用夹逼准则可证; (2) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 1 \leq x < 2, \text{ 连续.} \\ \frac{1}{2}x^2, & x \geq 2 \end{cases}$

(1) 不妨设 $a_m = \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, 则

$$a_m \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} \leq \sqrt[n]{ma_m^n} = m^{\frac{1}{n}} a_m, \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_m = a_m, \lim_{n \rightarrow \infty} m^{\frac{1}{n}} a_m = a_m,$$

由夹逼准则得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = a_m = \max_{1 \leq i \leq m} \{a_i\}$.

(2) 由 (1) 的结论可得 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = \max\left\{1, x, \frac{x^2}{2}\right\}, (x \geq 0)$. 即

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 1 \leq x < 2. \\ \frac{1}{2}x^2, & x \geq 2 \end{cases}$$

显然, $f(x)$ 在 $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, +\infty)$ 连续, 只需考查分段点处的连续性.

由 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1)$, 知 $f(x)$ 在 $x = 1$ 连续;

由 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x = 2$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2}x^2 = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 = f(2)$, 知 $f(x)$ 在 $x = 2$ 连续.

综上, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内连续.

120 答案 $a = -1$, $a = -2$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &\stackrel{\text{等价代换}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax^3}{x - \arcsin x} \stackrel{\text{洛必达}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3ax^2}{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3ax^2}{\sqrt{1-x^2} - 1} \stackrel{\text{等价代换}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3ax^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -6a, \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \stackrel{\text{等价代换}}{=} 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x^2} \stackrel{\text{洛必达}}{=} 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ae^{ax} + 2x - a}{2x} \stackrel{\text{洛必达}}{=} 2a^2 + 4.$$

令 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow 2a^2 + 6a + 4 = 0$, 解得 $a = -1$ 或 $a = -2$.

当 $a = -1$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 6 = f(0)$, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续;

当 $a = -2$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 12 \neq f(0) = 6$, $x = 0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

121 答案 $x=0$ 是第一类可去间断点; $x=k\pi (k=\pm 1, \pm 2, \dots)$ 是 $f(x)$ 的第二类无穷间断点.

属于“ 1^∞ ”型不定式, 利用第二重要极限求解, 且 t 是变量.

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \left(1 + \frac{\sin t - \sin x}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}} = \lim_{t \rightarrow x} \left(1 + \frac{\sin t - \sin x}{\sin x} \right)^{\frac{\frac{\sin x}{\sin t - \sin x}}{\frac{x}{\sin x}}} = e^{\frac{x}{\sin x}}.$$

可知 $x=0$, $x=k\pi (k=\pm 1, \pm 2, \dots)$ 都是 $f(x)$ 的间断点.

因 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x}{\sin x}} = e$, 故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类可去间断点.

因 $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} e^{\frac{x}{\sin x}} = +\infty$, 故 $x=\pi$ 是 $f(x)$ 的第二类无穷间断点.

同理, 在 $x=k\pi (k=\pm 1, \pm 2, \dots)$ 都有一个单侧极限不存在 (无穷发散), 所以 $x=k\pi (k=\pm 1, \pm 2, \dots)$ 都是 $f(x)$ 的第二类无穷间断点.

评注

“ $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} e^{\frac{x}{\sin x}} = \infty$ ”是错误的, 因为 $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} e^{\frac{x}{\sin x}} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} e^{\frac{x}{\sin x}} = 0 \neq \infty$.

122 答案 2.

因 $f(x)$ 是初等函数, 在 $x=0$ 处连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = \frac{\lg(100)}{1+0} = 2.$$

123 答案 (D).

使用反证法, 若 (D) $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 没有间断点, 即连续, 又 $f(x)$ 连续, 则由运算法则知:

$\frac{\varphi(x)}{f(x)} \cdot f(x) = \varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 与题设 $\varphi(x)$ 有间断点矛盾, 所以 $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点, 故选 (D). 也可举反例, 排除 (A)(B)(C).

124 提示 零点定理.

【证明】设函数 $f(x) = x^3 - 9x - 2$, 因为

$$f(-3) = -2 < 0, f(-2) = 8 > 0, f(0) = -2 < 0, f(4) = 26 > 0,$$

在 $[-3, -2]$, $[-2, 0]$, $[0, 4]$ 分别运用零点定理, 得方程 $x^3 - 9x - 2 = 0$ 在

$(-3, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 4)$ 各区间内分别至少有一个实根, 即方程至少有 3 个实根;

又 $x^3 - 9x - 2 = 0$ 是一元三次方程, 至多有 3 个实根, 故 $x^3 - 9x - 2 = 0$ 恰有 3 个实根.

125 提示 零点定理 + 单调性.

【证明】设 $f(x) = x - \frac{1}{2} \cos x$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上连续,

且 $f(0) = -\frac{1}{2} < 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0$, 由零点定理知: 至少存在一点 $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 使得

$f(\xi) = \xi - \frac{1}{2} \cos \xi = 0$, 即方程 $x = \frac{1}{2} \cos x$ 至少有一个实根.

又 $f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \sin x > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单增, 故只有一个实根.

126 提示 零点定理.

【证明】 设函数 $F(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x)$, 由题设知, $F(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上连续,

且 $F(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)$, $F\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right)$, 满足 $F(0) \cdot F\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0$.

当 $F(0) \cdot F\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ 时, 则 $\xi = 0$ 或 $\xi = \frac{1}{2}$.

当 $F(0) \cdot F\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ 时, 由零点定理得: 至少存在一点 $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \subset (0, 1)$, 使得

$$F(\xi) = 0 \Leftrightarrow f\left(\xi + \frac{1}{2}\right) = f(\xi).$$

综上, 至少存在一点 $\xi \in [0, 1]$, 使得 $f\left(\xi + \frac{1}{2}\right) = f(\xi)$.

评注

$F(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ (非 $[0, 1]$) 上运用零点定理. 证明过程需严谨, 分两种情况讨论.

127 提示 极限定义与连续的性质.

【证明】 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 由极限定义: 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 不妨设 $\varepsilon = 1$, 存在 $X > 0$, 使得当 $x > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < 1 \Rightarrow A - 1 < f(x) < A + 1$.

因 $f(x)$ 在闭区间 $[a, X]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, X]$ 上有界, 即存在 $C > 0$, 使得 $|f(x)| \leq C$.

综上, 取 $M = \max\{|A - 1|, |A + 1|, C\}$, 对任意的 $x \in [a, +\infty)$, 都有 $|f(x)| \leq M$,

即 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

128 提示 在 $[x_1, x_3]$ 上运用最值定理与介值定理.

【证明】 由题设知: $f(x)$ 在 $[x_1, x_3]$ 上连续, 存在最小值 m 与最大值 M , 使得

$$m \leq f(x_i) \leq M \quad (i = 1, 2, 3), \quad 2m \leq 2f(x_2) \leq 2M, \quad 3m \leq 3f(x_3) \leq 3M. \text{ 从而}$$

$$m \leq \frac{f(x_1) + 2f(x_2) + 3f(x_3)}{6} \leq M, \text{ 由介值定理: 至少存在 } \xi \in [x_1, x_3] \subset (a, b),$$

$$\text{使得 } \frac{f(x_1) + 2f(x_2) + 3f(x_3)}{6} = f(\xi), \text{ 即 } f(x_1) + 2f(x_2) + 3f(x_3) = 6f(\xi).$$

129 答案 (A).

$$\text{因 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sin(x-2)}{-x(x-1)(x-2)^2} = -\frac{\sin 2}{4}, \text{ 同理 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{\sin 2}{4},$$

则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的邻域内有界.

因 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处连续, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x = -1$ 的邻域内有界.

又 $f(x)$ 在闭区间 $[-1 + \delta, 0 - \delta] (\forall \delta > 0)$ 上连续, 知 $f(x)$ 在 $[-1 + \delta, 0 - \delta]$ 上有界, 故 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内有界. 故选 (A).

由 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty \Rightarrow f(x)$ 在 $x=1, x=2$ 的邻域内无界, 排除 (B)(C)(D).

130 提示 $g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ 在 $\left[0, \frac{n-1}{n}\right]$ 上运用介值定理.

【证明】 设 $g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$, $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{n-1}{n}\right]$ 上连续, 故存在最小值 m 与最大值 M , 使得 $m \leq g(x) \leq M$, 则

$$m \leq g(0) \leq M, m \leq g\left(\frac{1}{n}\right) \leq M, \dots, m \leq g\left(\frac{n-1}{n}\right) \leq M.$$

$$\text{又 } g(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{n}\right), g\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{2}{n}\right), \dots, g\left(\frac{n-1}{n}\right) = f\left(\frac{n-1}{n}\right) - f(1),$$

$$\text{一方面, } g(0) + g\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + g\left(\frac{n-1}{n}\right) = f(0) - f(1) = 0, \text{ 又}$$

$$nm \leq g(0) + g\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + g\left(\frac{n-1}{n}\right) \leq nM \Rightarrow m \leq \frac{g(0) + g\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + g\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n} \leq M,$$

由介值定理, 存在 $x_0 \in \left[0, \frac{n-1}{n}\right] \subset [0, 1]$, 使得

$$g(x_0) = \frac{g(0) + g\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + g\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n} = 0, \text{ 即 } f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right).$$

第2章 导数与微分

131 答案 11.

方法一：用导数定义.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 + 2x + 3x^3) - 6}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1) + 3(x^3 - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} [2 + 3(x^2 + x + 1)] = 11. \end{aligned}$$

方法二：先求导函数，再求导数值.

$$\text{由 } f'(x) = 2 + 9x^2, \text{ 得 } f'(1) = f'(x)|_{x=1} = (2 + 9x^2)|_{x=1} = 11.$$

132 答案 6.

方法一：用导数定义.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} (2x + 1)(3x + 2)(4x + 3) = 6.$$

方法二：用求导公式.

设 $g(x) = (2x + 1)(3x + 2)(4x + 3)$ ，则 $f(x) = x \cdot g(x)$ ，于是

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)' \cdot g(x) + x \cdot g'(x) \\ &= (2x + 1)(3x + 2)(4x + 3) + x \cdot [(2x + 1)(3x + 2)(4x + 3)]', \end{aligned}$$

└ 此处导数不必求出来

从而 $f'(0) = 1 \times 2 \times 3 + 0 = 6$.

133 答案 $-2, \frac{10}{3}$.

首先有 $f(0) = 0, f(2) = 0$. 由导数定义

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-2)\sqrt{\frac{3x^3+1}{2x^2+1}} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x-2)\sqrt{\frac{3x^3+1}{2x^2+1}} = -2.$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)\sqrt{\frac{3x^3+1}{2x^2+1}} - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x\sqrt{\frac{3x^3+1}{2x^2+1}} = \frac{10}{3}.$$

评注

本题也可以先求出导函数 $f'(x)$ ，再将 $x = 0, x = 2$ 代入 $f'(x)$ ，求得 $f'(0), f'(2)$. 请读者自己动手试试，体会两种方法的不同.

134 答案 $\frac{1}{2}$.

$$\text{由导数定义, } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 x}{2x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

135 答案 $2\varphi(0)$.**【证明】** 因为函数 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 所以有

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)\varphi(x - 1) - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)\varphi(x - 1) = 2\varphi(0),$$

由导数定义知, $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且 $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2\varphi(0)$.**评注**因为题目没有 $\varphi(x)$ 可导的条件, 所以下面的解答过程是错误的.因为 $f'(x) = (x^2 - 1)\varphi'(x - 1) + (x^2 - 1)\varphi'(x - 1) = 2x\varphi'(x - 1) + (x^2 - 1)\varphi'(x - 1)$,所以 $f'(1) = 2\varphi(0) + 0 \cdot \varphi'(0) = 2\varphi(0)$.**136 答案** 1.

由导数定义,

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2+x) - f(2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2+x) - f(2+0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - 2f(0)}{x} = 2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2f'(0) = 2 \times \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

137 答案 可导, $f'(0) = 2$.由题设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 3}{x} = 2$, 知 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + 3] = 0$.又 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续, 所以 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -3$. 于是有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 3}{x} = 2,$$

由导数定义知, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2$.**138 答案** (1) $5f'(x_0)$, (2) $3f'(x_0)$.

$$(1) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 5\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 5 \times \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 5\Delta x) - f(x_0)}{5\Delta x} = 5f'(x_0).$$

$$(2) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - 3\Delta x)}{\Delta x} = 3 \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 3\Delta x) - f(x_0)}{-3\Delta x} = 3f'(x_0).$$

评注根据导数定义可以求某些结构的极限. 若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导, 则有

$$(1) \lim_{\otimes \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \otimes) - f(x_0)}{\otimes} = f'(x_0), \quad (2) \lim_{\square \rightarrow x_0} \frac{f(\square) - f(x_0)}{\square - x_0} = f'(x_0).$$

139 答案 $2f''(x_0)$.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 4h) - f(x_0 + 2h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 4h) - f(x_0) - [f(x_0 + 2h) - f(x_0)]}{h} \\ &= 4 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 4h) - f(x_0)}{4h} - 2 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{2h} \\ &= 4f'(x_0) - 2f'(x_0) = 2f'(x_0). \end{aligned}$$

评注

若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导, 则有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + mh) - f(x_0 + nh)}{h} = (m-n)f'(x_0).$$

但反之不然, 即上述极限值存在, 函数在点 $x=x_0$ 处未必可导.

140 答案 1.

注意到当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x^3) \sim x^3$, 从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3) - f(3-3x^3)}{\ln(1+x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3) - f(3-3x^3)}{x^3} = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3-3x^3) - f(3)}{-3x^3} = 3f'(3),$$

于是 $3f'(3)=3$, 故 $f'(3)=1$.

141 答案 (1)8, (2)1.

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(-5x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(0)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0) - f(-5x)}{x} \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(0)}{3x} + 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-5x) - f(0)}{-5x} = 3f'(0) + 5f'(0) = 8f'(0) = 8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x^2) - xf'(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x^2)}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x^2) - f(0)}{2x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = 2f'(0) - f'(0) = f'(0) = 1. \end{aligned}$$

142 答案 (C).

方法一: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^3)}{h^3} \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ 存在, 由导数定义知, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 极限即为 $f'(0)$, 故 (C) 正确.

方法二: 排除法. 令 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导, 但 (A)(B) 极限均存在, 排除 (A)(B); (D) 中极限存在只能说明右导数存在, 排除 (D). 故应选 (C).

143 答案 -3.

注意, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+\sin 3x) \sim \sin 3x \sim 3x$, 于是

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin 3x) \cdot f(\cos x)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cdot f(\cos x)}{x^3} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\cos x) - f(1)}{x^2} \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\cos x) - f(1)}{\cos x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = 3f'(1) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{3}{2}f'(1) = -3. \end{aligned}$$

144 答案 (C).

选项 (A) 中, $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的左右导数不相等, 所以在 $x=0$ 处不可导; 选项 (B) 中, 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ 不存在, 所以 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处不可导; 选项 (C) 中 $y=x^3$ 处处可导, 在 $x=0$ 处也可导; 选项 (D) 中 $f(x)=x \ln x$ 在 $x=0$ 处没有定义, 所以不可导. 故应选 (C).

145 答案 $f'_-(0) = f'_+(0) = 0$, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0) = 0$.

函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义, $f(0)=1$. 由导数定义

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x} = 0,$$

显然, $f'_-(0) = f'_+(0) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且导数 $f'(0) = 0$.

146 答案 (A).

函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义, $f(0)=0$.

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(1 + e^{\frac{1}{x}}) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + e^{\frac{1}{x}}) = 1$, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左导数存在, $f'_-(0) = 1$.

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1 + e^{\frac{1}{x}}) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + e^{\frac{1}{x}}) = +\infty$, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的右导数不存在. 故应选 (A).

评注

$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$ 不存在, 需要考虑左、右极限. 类似的还有 $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x$ 等.

147 答案 不可导.

先将 $f(x)$ 写成分段函数的形式, 再根据左、右导数讨论可导性. $f(x) = x^2|x-1| =$

$$\begin{cases} x^2(x-1), & x \geq 1 \\ -x^2(x-1), & x < 1 \end{cases}, \text{ 其中 } f(1) = 0.$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x^2(x-1) - 0}{x - 1} = -1,$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2(x-1) - 0}{x - 1} = 1,$$

显然, $f'_-(1) \neq f'_+(1)$, 所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导.

148 答案 可导, $f'(1) = 0$.

因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 1)|x - 1| - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} ((x^2 + x + 1)|x - 1|) = 0$, 由导数定义知, 函

数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且 $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$.

评注

本题也可以先将 $f(x)$ 写成分段函数的形式, 再根据左、右导数讨论可导性. 仔细体会上面两道题目中函数的区别, 然后再做下一题.

149 答案 (A).

$$f(x) = |x-1|\varphi(x) = \begin{cases} (x-1)\varphi(x), & x \geq 1 \\ -(x-1)\varphi(x), & x < 1 \end{cases}, f(1) = 0.$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)\varphi(x) - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = -\varphi(1),$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)\varphi(x) - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = \varphi(1),$$

于是, $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导 $\Leftrightarrow f'_-(1) = f'_+(1) \Leftrightarrow -\varphi(1) = \varphi(1) \Leftrightarrow \varphi(1) = 0$. 故应选 (A).

评注

常用的两个结论:

(1) $f(x) = |x-a|$ 在 $x=a$ 处不可导;

(2) 若 $f(x) = |x-a|\varphi(x)$, 且 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导 $\Leftrightarrow \varphi(a) = 0$.

150 答案 (C).

$f(x) = (x^2 + x - 2)|x^3 - 4x| = (x+2)(x-1)|x||x-2||x+2|$, 所以 $f(x)$ 可能的不可导点有 3 个: $x = -2, x = 0, x = 2$.

对于 $x = -2$, $f(x) = |x+2|\varphi(x)$, 其中 $\varphi(x) = (x+2)(x-1)|x||x-2|$, 显然 $\varphi(x)$ 连续且 $\varphi(-2) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $x = -2$ 处可导.

同理分析可得 $f(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=2$ 处不可导. 所以 $f(x)$ 有两个不可导点. 故应选 (C).

151 答案 切线方程 $y = 2x + 1$, 法线方程 $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

由 $y' = (2x)' + (\cos x)' = 2 - \sin x$, 得 $y'|_{x=0} = 2$, 于是

切线斜率 $k_1 = y'|_{x=0} = 2$, 切线方程为 $y - 1 = 2(x - 0)$, 即 $y = 2x + 1$.

法线斜率 $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{2}$, 法线方程为 $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 0)$, 即 $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

152 答案 $-\sqrt[3]{\frac{1}{6}}$.

在 $x = x_0$ 处, 两曲线的切线斜率分别为 $k_1 = f'(x_0) = 2x_0$, $k_2 = g'(x_0) = 3x_0^2$.

两切线互相垂直, 则 $k_1 \cdot k_2 = 2x_0 \cdot 3x_0^2 = 6x_0^3 = -1$, 解得 $x_0 = -\sqrt[3]{\frac{1}{6}}$.

153 答案 $y = -3x - 6$.

直线 L 与 $2x - 6y + 1 = 0$ 垂直, 则斜率 $k = -3$.

设直线 L 与曲线 $y = x^3 + 3x^2 - 5$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处相切, 则斜率 $k = 3x_0^2 + 6x_0$, 于是有 $3x_0^2 + 6x_0 = -3$, 解得 $x_0 = -1$, 于是切点为 $M(-1, -3)$.

故直线 L 的方程为 $y - (-3) = -3(x - (-1))$, 即 $y = -3x - 6$.

154 证明 由 $y = \frac{1}{x}$, $y' = -\frac{1}{x^2}$ 得, 双曲线在任一点 $(x_0, \frac{1}{x_0})$ 处的切线斜率为 $k = -\frac{1}{x_0^2}$, 切线

方程为 $y - \frac{1}{x_0} = -\frac{1}{x_0^2}(x - x_0)$. 上式中分别令 $x=0$, $y=0$, 得切线在两坐标轴的截距分别为 $Y = \frac{2}{x_0}$, $X = 2x_0$, 于是切线与两坐标轴所围三角形的面积为

$$A = \frac{1}{2} \cdot |X| \cdot |Y| = \frac{1}{2} \cdot |2x_0| \cdot \left| \frac{2}{x_0} \right| = 2.$$

155 答案 $a=-1, b=1$.

两曲线在 $x=1$ 处有公共切线, 则有相同的函数值与导数值, 即

$$\begin{cases} (1 + \ln x)|_{x=1} = (x^2 + ax + b)|_{x=1} \\ (1 + \ln x)'|_{x=1} = (x^2 + ax + b)'|_{x=1} \end{cases}$$

计算得 $\begin{cases} 1 = 1 + a + b \\ 1 = 2 + a \end{cases}$, 解得 $a=-1, b=1$.

156 答案 $\frac{1}{2}$.

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(3+x) - f(3)} = -2$, 得 $f'(3) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3+x) - f(3)}{x} = -\frac{1}{2}$.

切线斜率即为函数在该点处的导数 $f'(-3)$. 又偶函数的导函数为奇函数, 故所求斜率为

$$k = f'(-3) = -f'(3) = \frac{1}{2}.$$

评注

可导的偶函数的导函数为奇函数, 奇函数的导函数为偶函数, 周期函数的导数仍为周期函数.

157 答案 5.

因为函数 $f(x)$ 在点 $x=2$ 处可导, 所以在点 $x=2$ 处连续, 于是

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5.$$

158 答案 连续, 不可导.

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x^2} = 0 = f(0)$, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续; 又极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos \frac{1}{x^2} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x^2}$$

不存在, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

159 答案 连续, 可导.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 + x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^x = 0, \quad f(0) = 0,$$

显然, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续; 又

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 1) = 1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xe^x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1,$$

显然, $f'_-(0) = f'_+(0) = 1$, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0) = 1$.

160 答案 不连续, 不可导.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^3 \ln x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 + \ln x) = 1,$$

显然, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续, 从而在 $x=1$ 处也不可导.

161 答案 $a = -\frac{\pi}{2}, b = \frac{\pi}{2}$.

要使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处必连续, 即

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1),$$

由此得 $a+b=0$, 且 $f(1)=a+b=0$. 又由导数定义知

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax^2 + b - (a+b)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} a(x+1) = 2a,$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \sin \pi x - 0}{x-1} = -\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \sin \pi(x-1)}{x-1} = -\pi,$$

要使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 则 $f'_-(1) = f'_+(1)$, 于是 $a = -\frac{\pi}{2}$, 再由 $a+b=0$ 得 $b = \frac{\pi}{2}$.

所以, 当 $a = -\frac{\pi}{2}, b = \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导.

162 答案 (C).

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \varphi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+2x^3)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^3}{x^2} = 0,$$

$$f(0) = 0 \cdot \varphi(0) = 0,$$

由 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, 知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处极限存在且连续; 又

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 \varphi(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \varphi(x) = 0,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\ln(1+2x^3)}{x^2} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+2x^3)}{x^3} = 2,$$

由 $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, 知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导. 故应选 (C).

163 答案 $9x^2 + 2e^x - \frac{5}{x}, 4 + 2e$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^3)' + (2e^x)' - (5 \ln x)' + (\sin 1)' = 3(x^3)' + 2(e^x)' - 5(\ln x)' + 0 \\ &= 9x^2 + 2e^x - \frac{5}{x}, \end{aligned}$$

$$f'(1) = f'(x)|_{x=1} = 9 + 2e - 5 = 4 + 2e.$$

164 答案 $\cos x - x \sin x + 6x, \frac{5\pi}{2}, 6\pi - 1.$

$$f'(x) = (x \cos x)' + (3x^2)' = \cos x - x \sin x + 6x,$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + 6 \times \frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{5\pi}{2},$$

$$f'(\pi) = \cos \pi - \pi \sin \pi + 6\pi = 6\pi - 1.$$

165 答案 $-e^x(\cos x + 3 \sin x).$

$$\begin{aligned} y' &= (e^x)'(\cos x - 2 \sin x) + e^x(\cos x - 2 \sin x)' \\ &= e^x(\cos x - 2 \sin x) + e^x(-\sin x - 2 \cos x) = -e^x(\cos x + 3 \sin x). \end{aligned}$$

166 答案 $2x \arctan x - \ln x.$

$$\begin{aligned} y' &= ((1+x^2) \arctan x)' - (x \ln x)' \\ &= (1+x^2)' \arctan x + (1+x^2)(\arctan x)' - \left[(x)' \ln x + x(\ln x)' \right] \\ &= 2x \arctan x + (1+x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2} - \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = 2x \arctan x - \ln x. \end{aligned}$$

167 答案 $-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} + \frac{(x-1)e^x}{x^2} - 3(\sin x + x \cos x).$

先化简函数, $y = \frac{\sqrt{x} + xe^x - 3x^3 \sin x}{x^2} = x^{-\frac{3}{2}} + \frac{e^x}{x} - 3x \sin x$, 于是

$$y' = \left(x^{-\frac{3}{2}}\right)' + \left(\frac{e^x}{x}\right)' - 3(x \sin x)' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} + \frac{(x-1)e^x}{x^2} - 3(\sin x + x \cos x).$$

评注

先化简函数, 再求导数, 可以简化计算过程.

168 答案 $\frac{x \cos x - \sin x - 1}{(x - \cos x)^2}.$

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{\sin x}{x - \cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cdot (x - \cos x) - \sin x \cdot (x - \cos x)'}{(x - \cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x \cdot (x - \cos x) - \sin x \cdot (1 + \sin x)}{(x - \cos x)^2} = \frac{x \cos x - \cos^2 x - \sin x - \sin^2 x}{(x - \cos x)^2} \\ &= \frac{x \cos x - \sin x - 1}{(x - \cos x)^2}. \end{aligned}$$

169 答案 $\frac{x^4 - 3x^2 + 2x + 9x^2 \ln x - 4x \ln x}{(3 \ln x + x^2)^2}.$

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{2 \ln x + x^3}{3 \ln x + x^2} \right)' = \frac{(2 \ln x + x^3)' \cdot (3 \ln x + x^2) - (2 \ln x + x^3) \cdot (3 \ln x + x^2)'}{(3 \ln x + x^2)^2} \\ &= \frac{\left(\frac{2}{x} + 3x^2 \right) \cdot (3 \ln x + x^2) - (2 \ln x + x^3) \cdot \left(\frac{3}{x} + 2x \right)}{(3 \ln x + x^2)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{x^4 - 3x^2 + 2x + 9x^2 \ln x - 4x \ln x}{(3 \ln x + x^2)^2}.$$

170 答案 $\frac{e^x(x^3 + 2x^2 + 3x)}{(x+1)^2}.$

$$y' = \left(\frac{e^x(x^2+1)}{x+1} \right)' = \frac{(e^x(x^2+1))' \cdot (x+1) - (e^x(x^2+1)) \cdot (x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x(x^2+2x+1) \cdot (x+1) - e^x(x^2+1)}{(x+1)^2} = \frac{e^x(x^3+2x^2+3x)}{(x+1)^2}.$$

171 答案 $\frac{2x}{(x^2+3)^2}.$

【提示】先求出函数 $f(x)$ ，再求导函数 $f'(x)$ 。

$$f\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{x^4 + 1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{(x - \frac{1}{x})^2 + 2}{(x - \frac{1}{x})^2 + 3},$$

令 $x - \frac{1}{x} = t$ ，得 $f(t) = \frac{t^2 + 2}{t^2 + 3}$ ，即 $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 3}$ ，于是

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 2)'(x^2 + 3) - (x^2 + 2)(x^2 + 3)'}{(x^2 + 3)^2} = \frac{2x(x^2 + 3) - 2x(x^2 + 2)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 3)^2}.$$

评注

$f\left(x - \frac{1}{x}\right)$ 不是 $f(x)$ ，求 $f'(x)$ 不能直接对 $f\left(x - \frac{1}{x}\right)$ 的表达式求导数，需先求出函数 $f(x)$ ，再求导函数 $f'(x)$ 。

172 答案 $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(2x-1)^2}, & x < 0 \\ e^x(\sin x + \cos x), & x > 0 \end{cases}.$

当 $x < 0$ 时， $f'(x) = \left(\frac{x}{2x-1}\right)' = -\frac{1}{(2x-1)^2}$ ；

当 $x > 0$ 时， $f'(x) = (e^x \sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$ ；

当 $x = 0$ 时， $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x}{2x-1} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2x-1} = -1$ 。

$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \sin x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$ ，

显然 $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ ，从而 $f'(0)$ 不存在。

综上所述， $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(2x-1)^2}, & x < 0 \\ e^x(\sin x + \cos x), & x > 0 \end{cases}.$

评注

求分段函数在分段点的导数, 必须用导数定义.

173 答案 $\frac{1}{4}$.

由 $f(1)=2$ 知, $y=2$ 时, 对应 $x=1$. 由反函数的求导法则知 $\varphi'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$.

评注

利用反函数求导法则求函数在某一点的导数时, 首先搞清楚与 y_0 对应的 x_0 : 若 $y_0 = f(x_0)$, 则 $\varphi'(y)|_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x)|_{x=x_0}}$. 本题容易错解成 $\varphi'(2) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{5}$.

174 答案 $\frac{1}{2}$.

先求出 $y=1$ 对应的 x 值. 令 $3x^3 + 2x + 1 = 1$, 解得 $x=0$.

又 $f'(x) = 9x^2 + 2$, $f'(0) = 2$. 由反函数的求导法则知 $\varphi'(1) = \varphi'(y)|_{y=1} = \frac{1}{f'(x)|_{x=0}} = \frac{1}{2}$.

175 答案 $-4, 160$.

$$\frac{dy}{dx} = 4(1-x+2x^3)^3 \cdot (1-x+2x^3)' = 4(6x^2-1)(1-x+2x^3)^3,$$

$$\text{所以 } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = -4, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = 160.$$

176 答案 $e^{-x} \tan e^{-x}$.

$$\frac{dy}{dx} = (\ln \cos e^{-x})' = \frac{(\cos e^{-x})'}{\cos e^{-x}} = \frac{-\sin e^{-x} \cdot (e^{-x})'}{\cos e^{-x}} = \frac{-\sin e^{-x} \cdot e^{-x}(-x)'}{\cos e^{-x}} = e^{-x} \tan e^{-x}.$$

评注

$y = \ln \cos e^{-x}$ 是由 $y = \ln u$, $u = \cos v$, $v = e^w$, $w = -x$ 复合而成的, 最内层函数是 $-x$, 求导数时不要遗漏 $(-x)'$.

177 答案 $\frac{-1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}, -\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)^2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)' \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)' = \frac{1}{\sqrt{\frac{2x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} \\ &= \frac{-1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}, \\ f'\left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{2}{3}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

178 答案 $1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

先化简函数. 分母有理化, 有

$$y = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})} = x - \sqrt{x^2 - 1},$$

$$\text{于是 } y' = (x)' - (\sqrt{x^2 - 1})' = 1 - \frac{(x^2 - 1)'}{2\sqrt{x^2 - 1}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

179 答案 $3^x \ln 3 + 3x^2 + x^x (\ln x + 1)$.

$$\begin{aligned} y' &= (3^x)' + (x^3)' + (x^x)' + (3^3)' = 3^x \ln 3 + 3x^2 + (e^{x \ln x})' + 0 \\ &= 3^x \ln 3 + 3x^2 + e^{x \ln x} (x \ln x)' = 3^x \ln 3 + 3x^2 + x^x (\ln x + 1). \end{aligned}$$

180 答案 $3 \sin^2 x \cos 4x$.

$$\begin{aligned} y' &= (\cos 3x)' \cdot \sin^3 x + \cos 3x \cdot (\sin^3 x)' \\ &= -\sin 3x (3x)' \cdot \sin^3 x + \cos 3x \cdot 3 \sin^2 x (\sin x)' \\ &= -3 \sin 3x \cdot \sin^3 x + \cos 3x \cdot 3 \sin^2 x \cos x \\ &= 3 \sin^2 x (-\sin 3x \cdot \sin x + \cos 3x \cdot \cos x) \\ &= 3 \sin^2 x \cos 4x. \end{aligned}$$

181 答案 $2\sqrt{1-x^2}$.

$$\begin{aligned} y' &= (x\sqrt{1-x^2})' - (\arccos x)' = \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \\ &= \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

182 答案 $2x + 2\sqrt{x^2 + 1}$.

$$\begin{aligned} y' &= (x^2)' + (x\sqrt{x^2 + 1})' + (\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}))' \\ &= 2x + \sqrt{x^2 + 1} + x \cdot (\sqrt{x^2 + 1})' + \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} (x + \sqrt{x^2 + 1})' \\ &= 2x + \sqrt{x^2 + 1} + x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}\right) \\ &= 2x + \sqrt{x^2 + 1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= 2x + 2\sqrt{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

183 答案 $2 \cos(\ln x)$.

$$\begin{aligned} y &= (x)' \cdot [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + x \cdot [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)]' \\ &= [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + x \cdot \left[-\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} + \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}\right] \\ &= 2 \cos(\ln x). \end{aligned}$$

184 答案 $e^{-x} \operatorname{arccot} e^x$.

$$\begin{aligned}
 y' &= (-x)' + \frac{1}{2} (\ln(1+e^{2x}))' - (e^{-x} \operatorname{arccot} e^x)' \\
 &= -1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} - \left[-e^{-x} \operatorname{arccot} e^x + e^{-x} \cdot \left(-\frac{e^x}{1+e^{2x}} \right) \right] \\
 &= -1 + \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} + e^{-x} \operatorname{arccot} e^x + \frac{1}{1+e^{2x}} \\
 &= e^{-x} \operatorname{arccot} e^x.
 \end{aligned}$$

185 答案 $(1-6x^2)e^{-3x^2}$.**【提示】** 先求函数 $f(x)$.

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} x \left(\frac{t-x}{t+2x} \right)^{tx} = x \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{x}{t} \right)^{tx}}{\left(1 + \frac{2x}{t} \right)^{tx}} = xe^{-3x^2},$$

$$f'(x) = (x)' \cdot e^{-3x^2} + x \cdot (e^{-3x^2})' = e^{-3x^2} + xe^{-3x^2} \cdot (-6x) = (1-6x^2)e^{-3x^2}.$$

评注

讨论由极限形式表示的函数时, 先计算极限求出 $f(x)$ 的表达式, 再讨论 $f(x)$ 的有关特性.

186 答案 (1) $(3^x \ln 3 + 3x^2)f'(3^x + x^3)$, (2) $(\ln x + 1)f'(x \ln x)$.

$$(1) \frac{dy}{dx} = (f(3^x + x^3))' = f'(3^x + x^3)(3^x + x^3)' = (3^x \ln 3 + 3x^2)f'(3^x + x^3).$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = (f(x \ln x))' = f'(x \ln x)(x \ln x)' = (\ln x + 1)f'(x \ln x).$$

187 答案 -6.

$$g'(x) = f'(2x^3 - 3x) \cdot (2x^3 - 3x)' = (6x^2 - 3)f'(2x^3 - 3x),$$

$$\text{于是 } g'(-1) = (6x^2 - 3)f'(2x^3 - 3x) \Big|_{x=-1} = 3f'(1) = -6.$$

188 答案 (1) $\frac{4(\sin x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)^3}$, (2) $12x \arctan x + \frac{8x^2 + 2}{1 + x^2}$.

$$\begin{aligned}
 (1) y' &= \frac{(\sin x - \cos x)'(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2} \\
 &= \frac{(\cos x + \sin x)^2 + (\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2},
 \end{aligned}$$

$$y'' = \frac{2 \times (-2)(\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^3} = \frac{4(\sin x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)^3}.$$

$$(2) y' = 6x^2 \arctan x + 2x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} = 6x^2 \arctan x + 2x,$$

$$y'' = 12x \arctan x + \frac{6x^2}{1+x^2} + 2 = 12x \arctan x + \frac{8x^2 + 2}{1+x^2}.$$

189 答案 $-12e^{\frac{3\pi}{2}}$.

$$f'(x) = 3e^{3x} \sin 2x + e^{3x} \cdot 2 \cos 2x = e^{3x} (3 \sin 2x + 2 \cos 2x),$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 3e^{3x} (3 \sin 2x + 2 \cos 2x) + e^{3x} (6 \cos 2x - 4 \sin 2x) \\ &= e^{3x} (5 \sin 2x + 12 \cos 2x), \end{aligned}$$

$$\text{所以 } f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{3\pi}{2}} (5 \sin \pi + 12 \cos \pi) = -12e^{\frac{3\pi}{2}}.$$

190 答案 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}.$

先化简函数, 再求导数. $y = \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x}) - \frac{1}{2} \ln e^{2x} = \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x}) - x,$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (\ln(1 + e^{2x}))' - (x)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}} - 1 = \frac{-1}{1 + e^{2x}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1 + e^{2x})'}{(1 + e^{2x})^2} = \frac{2e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2},$$

$$\text{于是 } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{1}{2}, \quad \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} = \frac{1}{2}.$$

191 答案 $\frac{19}{32}.$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2}} \left(\frac{x}{3}\right)' = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} = (9 - x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$y'' = -\frac{1}{2} (9 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (9 - x^2)' = x(9 - x^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$y''' = (9 - x^2)^{-\frac{3}{2}} + x \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) (9 - x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot (-2x) = \frac{2x^2 + 9}{\sqrt{(9 - x^2)^3}},$$

$$\text{于是 } y'''|_{x=\sqrt{5}} = \frac{19}{32}.$$

192 答案 (C).

$$y' = \ln x + 1, \quad y'' = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad y''' = -x^{-2}, \quad y^{(4)} = (-1)(-2)x^{-3}, \dots,$$

$$\text{继续求导, 可得 } y^{(10)} = (-1)(-2)(-3) \cdots (-8) \cdot x^{-9} = \frac{8!}{x^9}. \text{ 故应选 (C).}$$

评注

求函数 $y = f(x)$ 的 n 阶导数时, 一般先求出前几阶导数, 从中找出规律, 得到 $f(x)$ 的 n 阶导数表达式.

193 答案 (D).

$$y = \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 = \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 1 + \sin x,$$

$$\text{于是 } y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x, \quad y^{(4)} = \sin x, \quad \dots, \quad y^{(10)} = -\sin x. \text{ 故应选 (D).}$$

194 答案 (A).

方法一: $f'(x) = e^{-x} + x(e^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$,

$f''(x) = -(2-x)e^{-x}$, $f'''(x) = (3-x)e^{-x}$, $f^{(4)}(x) = -(4-x)e^{-x}$, $\dots$,

于是 $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-x) \cdot e^{-x}$.

方法二: 考虑到 $(x)' = 1$, $(x)^{(k)} = 0 (k = 2, 3, 4, \dots)$, $(e^{-x})^{(k)} = (-1)^k e^{-x} (k = 1, 2, 3, 4, \dots)$, 由莱布尼茨公式, 可得

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n C_n^k (x)^{(k)} (e^{-x})^{(n-k)} = C_n^0 \cdot x \cdot (e^{-x})^{(n)} + C_n^1 (x)' (e^{-x})^{(n-1)} \\ &= x(-1)^n e^{-x} + n(-1)^{n-1} e^{-x} = (-1)^{n-1}(n-x)e^{-x}. \end{aligned}$$

故应选 (A).

195 答案 20!, 0.

函数 y 的解析式是一个多项式, 最高次项为 $(x^2)^5(x^5)^2 = x^{20}$, 即

$$y = (x^2 + 1)^5(x^5 + 1)^2 = x^{20} + \dots +$$

所以 $y^{(20)} = 20!$, $y^{(21)} = 0$.

196 答案 $4^{n-1} \cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x, \end{aligned}$$

又 $\cos^{(n)} x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, 由复合函数的求导法则, 得

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{4} \cdot 4^n \cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right) = 4^{n-1} \cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

197 答案 (D).

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2-3x} (2-3x)' = -3(2-3x)^{-1}, \\ f''(x) &= -3 \times (-1)(2-3x)^{-2} (2-3x)' = (-3)^2 \times (-1)(2-3x)^{-2}, \\ f'''(x) &= (-3)^2 \times (-1) \times (-2)(2-3x)^{-3} (2-3x)' = (-3)^3 \times (-1) \times (-2)(2-3x)^{-3}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$f^{(n)}(x) = (-3)^n (-1) \times (-2) \times \dots \times (-(n-1)) \times (2-3x)^{-n} = \frac{-3^n (n-1)!}{(2-3x)^n}. \text{ 故应选 (D).}$$

198 答案 96.

由 $f'(x) = [f(x)]^2$, 可得

$$f''(x) = [f'(x)]' = 2f(x) \cdot f'(x) = 2[f(x)]^3,$$

$$f'''(x) = [f''(x)]' = 2 \times 3 \cdot [f(x)]^2 f'(x) = 6 \times [f(x)]^4,$$

所以 $f'''(1) = 6 \times [f(1)]^4 = 96$.

199 答案 (1) $\frac{y+y^2 \sin(xy)}{1-xy \sin(xy)}$, (2) $\frac{2y-x^2}{y^2-2x}$.

(1) 方程两边对 x 求导, 得 $-\sin(xy)(y+xy') + \frac{1}{y} y' - 1 = 0$,

解得 $\frac{dy}{dx} = y' = \frac{y + y^2 \sin(xy)}{1 - xy \sin(xy)}$.

(2) 方程两边对 x 求导, 得 $3x^2 + 3y^2 y' = 6(y + xy')$, 解得 $\frac{dy}{dx} = y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$.

评注

隐函数求导, 求导过程中牢记 y 是 x 的函数, 遇到 y 的表达式 $\varphi(y)$ 对 x 求导数实际上是复合函数求导数, y 是中间变量, x 才是自变量, $\varphi(y)$ 对 x 求导等于 $\varphi'(y) \cdot y'$.

200 答案 $-\frac{1}{2\pi}$.

方程两边对 x 求导, 得 $y + xy' - \cos(\pi y^2) \cdot 2\pi y \cdot y' = 0$,

解得 $y' = \frac{y}{2\pi y \cos(\pi y^2) - x}$, 于是 $y'|_{x=0} = -\frac{1}{2\pi}$.

201 答案 切线方程是 $2x + y + 1 = 0$; 法线方程是 $x - 2y + 3 = 0$.

方程两边对 x 求导, 得 $\sec^2\left(x + y + \frac{\pi}{4}\right)(1 + y') = y'$,

将 $x = -1, y = 1$ 代入上式求得, $y'|_{x=-1} = -2$.

于是所求切线斜率 $k_1 = -2$, 切线方程为 $y - 1 = -2(x + 1)$, 即 $2x + y + 1 = 0$.

法线斜率 $k_2 = -\frac{1}{k_1} = \frac{1}{2}$, 法线方程为 $y - 1 = \frac{1}{2}(x + 1)$, 即 $x - 2y + 3 = 0$.

202 答案 $2x - y + 1 = 0$ 和 $4x + y - 2 = 0$.

将 $x = 0$ 代入方程得 $y^2 + 2 = 3y$, 解得 $y_1 = 1, y_2 = 2$.

在方程两边对 x 求导, 得 $2yy' + 2e^{xy}(y + xy') = 3y'$,

解得 $y' = \frac{2ye^{xy}}{3 - 2xe^{xy} - 2y}$, 于是 $y'|_{x=0} = 2, y'|_{x=0} = -4$.

所以曲线在 $(0, 1)$ 的切线方程为 $y - 1 = 2(x - 0)$, 即 $2x - y + 1 = 0$;

曲线在 $(0, 2)$ 的切线方程为 $y - 2 = -4(x - 0)$, 即 $4x + y - 2 = 0$.

203 答案 $\frac{1}{e}$.

由方程 $xf(y) = e^y \ln y$ 可得, 当 $x = 0$ 时, $y = 1$.

方程两边对 x 求导, 得 $f(y) + xf'(y)y' = e^y y' \ln y + e^y \cdot \frac{1}{y} y'$,

将 $x = 0, y = 1, f(1) = 1$ 代入上式, 得 $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0} = \frac{1}{e}$.

204 答案 $a = -1, b = -1$.

由曲线 $y = x^2 + ax + b$ 过点 $(1, -1)$, 得 $-1 = 1 + a + b$, 即 $a + b = -2$.

对曲线 $y = x^2 + ax + b$, 有 $y' = 2x + a$, 在点 $(1, -1)$ 处的切线斜率为 $y'|_{x=1} = 2 + a$;

对曲线 $2y = xy^3 - 1$, 两边对 x 求导, 得 $2y' = y^3 + 3xy^2 \cdot y'$, 解得 $y' = \frac{y^3}{2 - 3xy^2}$, 在点 $(1, -1)$

处的切线斜率为 $y'|_{\substack{x=1 \\ y=-1}} = \frac{y^3}{2-3xy^2} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=-1}} = 1$.

由题意, 两曲线在点 $(1, -1)$ 处有公共切线, 所以 $2+a=1$, 解得 $a=-1$, 从而 $b=-1$.

205 答案 $\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$

方程两边对 x 求导, 得 $\frac{1}{x^2+y^2} \cdot (x^2+y^2)' = \frac{2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'$,

$$\frac{1}{x^2+y^2} (2x+2yy') = \frac{2}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{xy'-y}{x^2},$$

解得 $y' = \frac{x+y}{x-y}$. 于是

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} = y'' &= \left(\frac{x+y}{x-y} \right)' = \frac{(x+y)'(x-y) - (x-y)'(x+y)}{(x-y)^2} \\ &= \frac{(1+y')(x-y) - (1-y')(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{-2y+2xy'}{(x-y)^2} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}. \end{aligned}$$

206 答案 $y'(1) = -\frac{1}{e+1}, y''(1) = \frac{e+2}{(e+1)^3}$.

将 $x=1$ 代入原方程, 得 $y=1$.

原方程两边对 x 求导, 得 $e^y y' + y + xy' = 0$, ①

①式两边继续对 x 求导, 得 $e^y (y')^2 + e^y \cdot y'' + y' + y' + xy'' = 0$, ②

将 $x=1, y=1$ 依次代入①和②, 得 $y'(1) = -\frac{1}{e+1}, y''(1) = \frac{e+2}{(e+1)^3}$.

207 答案 -2 .

等式两边对 x 求导, 得 $3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} + 3 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \frac{d^2y}{dx^2} = 0$,

将 $x=1, y=-1$ 依次代入已知等式和上式, 得 $\frac{dy}{dx} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=-1}} = 1, \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=-1}} = -2$.

208 答案 $2 \ln x \cdot x^{\ln x-1}$.

方法一: 对数求导法.

两边取对数, 得隐函数 $\ln y = \ln x \cdot \ln x = (\ln x)^2$,

上式两边对 x 求导, 得 $\frac{1}{y} y' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$, 于是 $y' = y \cdot \frac{2 \ln x}{x} = 2 \ln x \cdot x^{\ln x-1}$.

方法二: 复合函数求导法.

$$y = x^{\ln x} = e^{\ln x^{\ln x}} = e^{(\ln x)^2},$$

所以 $y' = e^{(\ln x)^2} \cdot [(\ln x)^2]' = x^{\ln x} \cdot \left(2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \right) = 2 \ln x \cdot x^{\ln x-1}$.

评注

幂指函数 $y = u(x)^{v(x)}$ [$u(x) > 0$] 求导数, 常用两种方法.

(1) 对数求导法: 将 $y = u(x)^{v(x)}$ 两边同时取对数, 得 $\ln y = v(x) \ln u(x)$, 然后利用隐函数求导方法求出导数.

(2) 复合函数求导法: 把函数变形为 $y = e^{v(x) \ln u(x)}$, 然后利用复合函数求导法则求出导数.

209 答案 $(1 + \sin x)^{x^2} \left[2x \ln(1 + \sin x) + x^2 \cdot \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right].$

方法一: 两边取对数, 得 $\ln y = x^2 \ln(1 + \sin x)$,

上式两边对 x 求导数, 得 $\frac{y'}{y} = 2x \ln(1 + \sin x) + x^2 \cdot \frac{\cos x}{1 + \sin x}$, 所以

$$y' = (1 + \sin x)^{x^2} \left[2x \ln(1 + \sin x) + x^2 \cdot \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right].$$

方法二: $y = (1 + \sin x)^{x^2} = e^{\ln(1 + \sin x) x^2} = e^{x^2 \ln(1 + \sin x)}$,

$$y' = e^{x^2 \ln(1 + \sin x)} \cdot (x^2 \ln(1 + \sin x))' = (1 + \sin x)^{x^2} \left[2x \ln(1 + \sin x) + x^2 \cdot \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right].$$

210 答案 $x^{\sin x} \sqrt{e^x - 1} \left(\cos x \ln x + \frac{1}{x} \sin x + \frac{e^x}{2(e^x - 1)} \right).$

两边取对数, 得 $\ln y = \sin x \ln x + \frac{1}{2} \ln(e^x - 1)$,

上式两边对 x 求导, 得 $\frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \ln x + \frac{1}{x} \sin x + \frac{e^x}{2(e^x - 1)}$, 于是

$$\frac{dy}{dx} = y' = x^{\sin x} \sqrt{e^x - 1} \left(\cos x \ln x + \frac{1}{x} \sin x + \frac{e^x}{2(e^x - 1)} \right).$$

211 答案 $\frac{(1 + 2x)^{\frac{1}{x^2}}}{e^{\frac{2}{x}}} \cdot \frac{2}{x^2} \left(-\frac{1}{x} \ln(1 + 2x) + \frac{2 + 2x}{1 + 2x} \right).$

两边取对数, 得 $\ln y = \frac{1}{x^2} \ln(1 + 2x) - \frac{2}{x}$,

上式两边对 x 求导数, 得 $\frac{y'}{y} = -\frac{2}{x^3} \ln(1 + 2x) + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{2}{1 + 2x} + \frac{2}{x^2}$,

$$\text{所以 } y' = \frac{(1 + 2x)^{\frac{1}{x^2}}}{e^{\frac{2}{x}}} \cdot \frac{2}{x^2} \left(-\frac{1}{x} \ln(1 + 2x) + \frac{2 + 2x}{1 + 2x} \right).$$

212 答案 $\frac{(x + 1)^2 \cdot \sqrt{2x + 2}}{(x - 1)^3 \cdot \sqrt[3]{3x - 3}} \left(\frac{5}{2(x + 1)} - \frac{10}{3(x - 1)} \right).$

两边取对数, 得 $\ln y = 2 \ln(x + 1) + \frac{1}{2} \ln(2x + 2) - 3 \ln(x - 1) - \frac{1}{3} \ln(3x - 3)$,

上式两边对 x 求导, 得 $\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2}{x + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2x + 2} - \frac{3}{x - 1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3x - 3}$,

$$\text{所以 } \frac{dy}{dx} = y' = \frac{(x + 1)^2 \cdot \sqrt{2x + 2}}{(x - 1)^3 \cdot \sqrt[3]{3x - 3}} \left(\frac{5}{2(x + 1)} - \frac{10}{3(x - 1)} \right).$$

213 答案 $x^{x^x} [x^x \ln x (\ln x + 1) + x^{x-1}]$.

两边取对数, 得 $\ln y = x^x \ln x$.

上式两边再取对数, 得 $\ln \ln y = x \ln x + \ln \ln x$.

上式两边对 x 求导数, 得 $\frac{1}{\ln y} \cdot \frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + 1 + \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$.

所以 $y' = x^{x^x} \cdot x^x \ln x \left(\ln x + 1 + \frac{1}{x \ln x} \right) = x^{x^x} [x^x \ln x (\ln x + 1) + x^{x-1}]$.

214 答案 $4x^{2x}(\ln x + 1)^2 + 2x^{2x-1}$.

首先 $y = x^{2x} = e^{2x \ln x}$, 于是

$$y' = (x^{2x})' = (e^{2x \ln x})' = e^{2x \ln x} (2x \ln x)' = 2x^{2x} (\ln x + 1),$$

$$\begin{aligned} y'' = (y')' &= 2[x^{2x}(\ln x + 1)]' = 2(x^{2x})'(\ln x + 1) + 2x^{2x}(\ln x + 1)' \\ &= 4x^{2x}(\ln x + 1)^2 + 2x^{2x-1}. \end{aligned}$$

215 答案 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{y(\ln y + 1)^2 - x(\ln x + 1)^2}{xy(\ln y + 1)^3}$.

方程两边取对数, 得 $\frac{1}{y} \ln x = \frac{1}{x} \ln y$, 即 $x \ln x = y \ln y$.

上式两边对 x 求导数, 得 $\ln x + 1 = (\ln y + 1) \cdot y'$, 解得 $y' = \frac{\ln x + 1}{\ln y + 1}$, 于是

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = (y')' = \left(\frac{\ln x + 1}{\ln y + 1} \right)' = \frac{\frac{1}{x}(\ln y + 1) - (\ln x + 1) \frac{1}{y} \cdot y'}{(\ln y + 1)^2} = \frac{y(\ln y + 1)^2 - x(\ln x + 1)^2}{xy(\ln y + 1)^3}.$$

216 答案 (1) $\frac{2t}{1-t^2}$, (2) $-\tan t$.

$$(1) \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{2t^2}{1+t^2} \right)'}{\left(\frac{2t}{1+t^2} \right)'} = \frac{\frac{4t}{(1+t^2)^2}}{\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}} = \frac{2t}{1-t^2}.$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(\sin^3 t)'}{(\cos^3 t)'} = \frac{3 \sin^2 t \cos t}{3 \cos^2 t (-\sin t)} = -\tan t.$$

217 答案 $\frac{1}{4}e^2$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{((t^2+1)e^t)'}{(t^2e^{2t})'} = \frac{(t+1)e^t}{2t(t+1)e^{2t}} = \frac{t+1}{2te^t},$$

$$\text{所以 } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=-2} = \left. \frac{t+1}{2te^t} \right|_{t=-2} = \frac{1}{4}e^2.$$

218 答案 $x - y = 2 - \ln 3$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\ln(t + \sqrt{t^2 + 3}))'}{(\sqrt{t^2 + 3})'} = \frac{\frac{1}{\sqrt{t^2 + 3}}}{\frac{t}{\sqrt{t^2 + 3}}} = \frac{1}{t},$$

当 $t=1$ 时, 曲线上相应的点为 $M(2, \ln 3)$, 该点切线斜率 $k = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = 1$, 于是切线方程为

$$y - \ln 3 = x - 2, \text{ 即 } x - y = 2 - \ln 3.$$

219 答案 切线方程为 $x - 2y + 2 = 0$; 法线方程为 $2x + y - 1 = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(e^t \cos t)'}{(e^t \sin 2t)'} = \frac{e^t \cos t - e^t \sin t}{e^t \sin 2t + 2e^t \cos 2t} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin 2t + 2 \cos 2t},$$

当 $x=0, y=1$ 时, $t=0$, 且 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \frac{1}{2}$.

于是切线斜率为 $k_1 = \frac{1}{2}$, 切线方程为 $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 0)$, 即 $x - 2y + 2 = 0$.

法线斜率 $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -2$, 法线方程为 $y - 1 = -2(x - 0)$, 即 $2x + y - 1 = 0$.

220 答案 $t, -\frac{1}{\sin t}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(t \cos t - \sin t)'}{(\cos t)'} = \frac{(\cos t - t \sin t) - \cos t}{-\sin t} = t,$$

求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$, 即求 $\frac{dy'}{dx}$, 参数方程为 $\begin{cases} x = \cos t \\ y' = t \end{cases}$, 由参数方程的求导公式, 得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{-\sin t} = -\frac{1}{\sin t}.$$

评注

求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$, 即求 $\frac{dy'}{dx}$, 由参数方程的求导公式, 得 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$.

221 答案 48.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(3t + t^3)'}{(\arctan t)'} = \frac{3 + 3t^2}{\frac{1}{1+t^2}} = 3(1+t^2)^2.$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{(3(1+t^2)^2)'}{(\arctan t)'} = \frac{6(1+t^2) \cdot 2t}{\frac{1}{1+t^2}} = 12t(1+t^2)^2,$$

$$\text{于是 } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1} = 48.$$

222 答案 $\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(\sin t)'}{(e^t + t)'} = \frac{\cos t}{e^t + 1},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{\left(\frac{\cos t}{e^t + 1}\right)'}{\left(e^t + t\right)'} = \frac{-\sin t \cdot (e^t + 1) - e^t \cos t}{(e^t + 1)^2} = -\frac{(e^t + 1) \sin t + e^t \cos t}{(e^t + 1)^3},$$

于是 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \frac{1}{2}, \left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{t=0} = -\frac{1}{8}.$

223 答案 $dy|_{\substack{x=3 \\ \Delta x=0.1}} = 2.8, \Delta y|_{\substack{x=3 \\ \Delta x=0.1}} = 2.891; dy|_{\substack{x=3 \\ \Delta x=0.01}} = 0.28, \Delta y|_{\substack{x=3 \\ \Delta x=0.01}} = 0.280901.$

微分 $dy = f'(x)\Delta x = (3x^2 + 1)\Delta x$, 增量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

$$dy|_{\substack{x=3 \\ \Delta x=0.1}} = (3x^2 + 1)\Delta x|_{\substack{x=3 \\ \Delta x=0.1}} = 2.8, \Delta y|_{\substack{x=3 \\ \Delta x=0.1}} = 3.1^3 + 3.1 - (3^3 + 3) = 2.891.$$

$$dy|_{\substack{x=3 \\ \Delta x=0.01}} = (3x^2 + 1)\Delta x|_{\substack{x=3 \\ \Delta x=0.01}} = 0.28, \Delta y|_{\substack{x=3 \\ \Delta x=0.01}} = 3.01^3 + 3.01 - (3^3 + 3) = 0.280901.$$

224 答案 $\frac{1}{3}.$

由题设条件知, 函数增量 $\Delta y = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\Delta x + o(\Delta x)$. 于是由微分的定义知, $f(x)$ 可微, 且

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}, \text{ 所以 } f'(2) = \frac{1}{3}.$$

225 答案 (C).

在点 x_0 处, $dy = f'(x_0)\Delta x = \Delta x$, 于是 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dy}{\Delta x} = 1$, 所以 dy 是与 Δx 等价的无穷小. 故应选 (C).

226 答案 (1) $-\frac{1}{x^2} \sin \frac{2}{x} \cdot e^{\sin^2 \frac{1}{x}} dx$, (2) $\arcsin \frac{x}{2} dx$.

$$\begin{aligned} (1) y' &= e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot \left(\sin^2 \frac{1}{x}\right)' = e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot 2 \sin \frac{1}{x} \cdot \left(\sin \frac{1}{x}\right)' = e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot 2 \sin \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot 2 \sin \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2} \sin \frac{2}{x} \cdot e^{\sin^2 \frac{1}{x}}, \end{aligned}$$

所以 $dy = y'dx = -\frac{1}{x^2} \sin \frac{2}{x} \cdot e^{\sin^2 \frac{1}{x}} dx$.

$$\begin{aligned} (2) y' &= (x)' \arcsin \frac{x}{2} + x \left(\arcsin \frac{x}{2}\right)' + \left(\sqrt{4-x^2}\right)' = \arcsin \frac{x}{2} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \\ &= \arcsin \frac{x}{2} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin \frac{x}{2}, \end{aligned}$$

所以 $dy = y'dx = \arcsin \frac{x}{2} dx$.

227 答案 (1) $\frac{1}{2\sqrt{2}} dx$, (2) $-\frac{2}{5} \ln 2 dx$.

$$(1) y' = \frac{1}{2\sqrt{2+\sin x}} \cdot (2+\sin x)' = \frac{\cos x}{2\sqrt{2+\sin x}},$$

$$\text{于是 } y'|_{x=0} = \left. \frac{\cos x}{2\sqrt{2+\sin x}} \right|_{x=0} = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad dy|_{x=0} = y'|_{x=0} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} dx.$$

$$(2) y' = \frac{1}{1+2^{-2x}} \cdot (1+2^{-2x})' = \frac{1}{1+2^{-2x}} \cdot 2^{-2x} \ln 2 \cdot (-2x)' = \frac{-2 \cdot 2^{-2x} \ln 2}{1+2^{-2x}},$$

$$\text{于是 } y'|_{x=1} = \left. \frac{-2 \cdot 2^{-2x} \ln 2}{1+2^{-2x}} \right|_{x=1} = -\frac{2}{5} \ln 2, \quad dy|_{x=1} = y'|_{x=1} dx = -\frac{2}{5} \ln 2 dx.$$

228 答案 $-\frac{\cos(x+y)}{2+\cos(x+y)} dx.$

方程两边对 x 求导, 得 $2y' + \cos(x+y) \cdot (1+y') = 0$,

$$\text{解得 } y' = -\frac{\cos(x+y)}{2+\cos(x+y)}, \quad \text{于是 } dy = y' dx = -\frac{\cos(x+y)}{2+\cos(x+y)} dx.$$

229 答案 $-\frac{1}{e} dx.$

当 $x=0$ 时, $y=1$.

方程两边对 x 求导, 得 $e^y \cdot y' + (y + xy') - 0 = 0$,

$$\text{解得 } y'|_{x=0} = -\left. \frac{y}{e^y + x} \right|_{x=0, y=1} = -\frac{1}{e}, \quad \text{于是微分 } dy|_{x=0} = y'|_{x=0} dx = -\frac{1}{e} dx.$$

230 答案 $-\frac{1}{2} dx.$

$$\text{由导数定义, } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{所以微分 } df(x)|_{x=0} = f'(0) dx = -\frac{1}{2} dx.$$

231 答案 (A).

由 $y = (1+e^x)^x = e^{x \ln(1+e^x)}$, 得

$$y' = e^{x \ln(1+e^x)} \cdot (x \ln(1+e^x))' = (1+e^x)^x \left(\ln(1+e^x) + x \cdot \frac{e^x}{1+e^x} \right),$$

$$\text{所以 } dy = y' dx = (1+e^x)^x \left(\ln(1+e^x) + \frac{xe^x}{1+e^x} \right) dx. \quad \text{故应选 (A).}$$

232 答案 (1) $\frac{1}{3}x^3 + c$, (2) $\frac{1}{3}\sin 3x + c$, (3) $\ln \ln x + c$, (4) $\arctan e^x + c$.

$$(1) x^2 dx = d\left(\frac{1}{3}x^3\right) = d\left(\frac{1}{3}x^3 + c\right).$$

$$(2) \cos 3x dx = \frac{1}{3} \cos 3x d(3x) = \frac{1}{3} d(\sin 3x) = d\left(\frac{1}{3} \sin 3x + c\right).$$

$$(3) \frac{1}{x \ln x} dx = \frac{1}{\ln x} d(\ln x) = d(\ln \ln x) = d(\ln \ln x + c).$$

$$(4) \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \frac{1}{1+(e^x)^2} d(e^x) = d(\arctan e^x) = d(\arctan e^x + c).$$

233 答案 (C).

$$\text{由 } |f(x)| \leq x^2 \text{ 得 } f(0)=0. \text{ 又 } \left| \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \right| = \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \left| \frac{x^2}{x} \right| = |x|,$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \right| = 0, \text{ 于是 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0.$$

由导数定义知, $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$. 故应选 (C).

234 答案 (1) 1, (2) $100!$, (3) $-\frac{9}{8e^2}$.

(1) 用导数定义. 注意到 $f(0)=0$, 且 $\arctan \frac{2x}{1+x} \sim \frac{2x}{1+x} (x \rightarrow 0)$, 于是

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \frac{x^2-1}{x^2+1} \arctan \frac{2x}{1+x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(3 + \frac{\frac{x^2-1}{x^2+1} \arctan \frac{2x}{1+x}}{x} \right) = 3 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2-1}{x^2+1} \cdot \frac{2x}{1+x}}{x} = 3 - 2 = 1. \end{aligned}$$

(2) 用导数定义.

$$f'(100) = \lim_{x \rightarrow 100} \frac{f(x)-f(100)}{x-100} = \lim_{x \rightarrow 100} x(x-1)(x-2) \cdots (x-99) = 100!.$$

(3) 函数表达式是多因子乘幂, 用对数求导法.

$$\text{两边取对数, 得 } \ln y = \ln(x^3+1) + \frac{1}{2} \ln(3x+1) - 2 \ln(x+1) - 2x,$$

$$\text{上式两边对 } x \text{ 求导, 得 } \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{3x^2}{x^3+1} + \frac{3}{2(3x+1)} - \frac{2}{x+1} - 2,$$

$$\text{所以 } \frac{dy}{dx} = y' = \frac{(x^3+1)\sqrt{3x+1}}{(x+1)^2 e^{2x}} \left(\frac{3x^2}{x^3+1} + \frac{3}{2(3x+1)} - \frac{2}{x+1} - 2 \right), \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = -\frac{9}{8e^2}.$$

235 答案 $\frac{1}{6}$.

$f(x)$ 可导必连续, 由题设知, $\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0+3h) - 3f(x_0-h)] = -2f(x_0) = 0$, 于是 $f(x_0) = 0$. 又

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+3h) - 3f(x_0-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+3h)}{h} - 3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0-h)}{h} \\ &= 3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+3h) - f(x_0)}{3h} + 3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0-h) - f(x_0)}{-h} = 6f'(x_0), \end{aligned}$$

由题设知 $6f'(x_0) = 1$, 故 $f'(x_0) = \frac{1}{6}$.

236 答案 (D).

先求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \ln f(\sin x)$. 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f(\sin x) = f(0) = 1$, 于是

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \ln f(\sin x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \ln [1 + f(\sin x) - 1] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} [f(\sin x) - 1] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin x) - f(0)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin x) - f(0)}{\sin x - 0} \cdot \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} f'(0) = 2, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(\sin x)]^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{2x} \ln f(\sin x)} = e^2$. 故应选 (D).

237 答案 $\frac{1}{1+e^2}$.

$f'(x) = -\frac{3nx^{3n-1}}{(1+x^{3n})^2}$, 切线斜率 $k = f'(1) = -\frac{3n}{4}$, 切线方程为 $y - \frac{1}{2} = -\frac{3n}{4}(x-1)$.

令 $y=0$, 得 $\xi_n = 1 + \frac{2}{3n}$, 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{3n}} = \frac{1}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{3n}} = \frac{1}{1+e^2}.$$

238 答案 $x+y+1=0$.

由题设极限知 $\lim_{x \rightarrow 1} [f(3x-1)+3] = 0$, 从而 $f(2) = \lim_{x \rightarrow 1} f(3x-1) = -3$. 于是

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(3x-1)+3}{x-1} = 3 \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(3x-1)-f(2)}{(3x-1)-2} = 3f'(2) = 3,$$

从而 $f'(2)=1$. 故法线斜率为 $k=-1$, 法线方程为 $y+3=-(x-2)$, 即 $x+y+1=0$.

239 答案 (C).

先根据极限求出 $f(x)$ 的表达式, 再讨论 $f(x)$ 的可导性. 先求出 $f(x)$. 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}} = \max\{1, x^2\} \text{ 知}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}}} = \frac{x^2}{\max\{1, x^2\}} = \begin{cases} x^2, & |x| \leq 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x < -1 \\ x^2, & -1 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}.$$

$$\text{于是 } f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = 2, \quad f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-1}{x-1} = 0,$$

显然, $f'_-(1) \neq f'_+(1)$, 所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导. 同理可以说明 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处也不可导. 函数 $f(x)$ 有两个不可导点, 故应选 (C).

240 答案 -2.

$g(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则

$$\begin{aligned} b = g(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{2x}) + \ln(1-4x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{2x})}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-4x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{2x}) - f(1)}{e^{2x} - 1} \cdot \frac{e^{2x} - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x}{x} = 2f'(1) - 4 = -2. \end{aligned}$$

241 答案 (1) $f(x) = \begin{cases} 3ax+b, & x < 1 \\ \frac{1}{2}(3a+b+1), & x = 1 \\ x^3, & x > 1 \end{cases}$; (2) $a=1, b=-2$;

$$(3) f'(x) = \begin{cases} 3, & x \leq 1 \\ 3x^2, & x > 1 \end{cases}.$$

$$(1) \text{ 当 } x > 1 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^3}{1 + e^{-n(x-1)}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3ax+b}{e^{n(x-1)} + 1} = x^3;$$

又显然, 当 $x=1$ 时, $f(x) = \frac{1}{2}(3a+b+1)$; 当 $x < 1$ 时, $f(x) = 3ax+b$,

$$\text{所以 } f(x) \text{ 是分段函数, 解析式为 } f(x) = \begin{cases} 3ax+b, & x < 1 \\ \frac{1}{2}(3a+b+1), & x = 1 \\ x^3, & x > 1 \end{cases}.$$

(2) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导必连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, 计算得 $3a+b=1$, 且 $f(1)=1$. 此时

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3ax+b-1}{x-1} = 3a,$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3,$$

要使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 则 $f'_-(1) = f'_+(1)$, 于是 $a=1$, 从而 $b=-2$.

所以当 $a=1, b=-2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且 $f'(1)=3$.

(3) 计算易得, 当 $x < 1$ 时, $f'(x)=3$; 当 $x > 1$ 时, $f'(x)=3x^2$. 又 $f'(1)=3$, 所以

$$f'(x) = \begin{cases} 3, & x \leq 1 \\ 3x^2, & x > 1 \end{cases}.$$

242 答案 $\sin 2x(f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)), 0$.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (f(\sin^2 x))' + (f(\cos^2 x))' = f'(\sin^2 x) \cdot (\sin^2 x)' + f'(\cos^2 x) \cdot (\cos^2 x)' \\ &= f'(\sin^2 x) \cdot 2 \sin x \cos x + f'(\cos^2 x) \cdot 2 \cos x (-\sin x) \\ &= \sin 2x(f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)), \end{aligned}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\frac{\pi}{2}} = \sin 2x(f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)) \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \sin \pi(f'(1) - f'(0)) = 0.$$

243 答案 $6xf'[f(1+3x^2)] \cdot f'(1+3x^2).$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \{f[f(1+3x^2)]\}' = f'[f(1+3x^2)] \cdot [f(1+3x^2)]' \\ &= f'[f(1+3x^2)] \cdot f'(1+3x^2)(1+3x^2)' = 6xf'[f(1+3x^2)] \cdot f'(1+3x^2).\end{aligned}$$

244 答案 -12.

由题设知, 两曲线在点 $x=1$ 处的切线相同, 于是有

$$f(1) = \left(\frac{3 + \ln x}{x} \right) \Big|_{x=1} = 3, \quad f'(1) = \left(\frac{3 + \ln x}{x} \right)' \Big|_{x=1} = \left(-\frac{2 + \ln x}{x^2} \right) \Big|_{x=1} = -2.$$

由复合函数的求导法, 则

$$F'(x) = [f^2(e^x)]' = 2f(e^x)[f(e^x)]' = 2f(e^x)f'(e^x)(e^x)' = 2e^x f(e^x)f'(e^x),$$

$$\text{所以 } F'(0) = 2e^x f(e^x)f'(e^x) \Big|_{x=0} = 2f(1)f'(1) = -12.$$

245 答案 2.

方法一: 由极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{1 - \cos x} = 2$ 知, $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{f(x)} - 1) = 0$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = 2,$$

从而又得 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$, 因此 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = f''(0) = 2$.

方法二: 特例法. 令 $f(x) = x^2$, 则 $f(x)$ 二阶可导, 且满足

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2,$$

求得 $f''(x) = 2$, 于是 $f''(0) = 2$.

246 答案 0.

方法一: $\frac{dy}{dx} = f'(x^2)(x^2)' = 2xf'(x^2)$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2f'(x^2) + 2x[f'(x^2)]' = 2f'(x^2) + 2xf''(x^2) \cdot 2x = 2f'(x^2) + 4x^2f''(x^2),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2[f'(x^2)]' + (4x^2)'f''(x^2) + 4x^2[f''(x^2)]'$$

$$= 2f''(x^2) \cdot 2x + 8xf''(x^2) + 4x^2f'''(x^2) \cdot 2x = 12xf''(x^2) + 8x^3f'''(x^2),$$

$$\text{所以 } \frac{d^3y}{dx^3} \Big|_{x=0} = 0.$$

方法二: 因为 $y = f(x^2)$ 是偶函数, 所以 $\frac{dy}{dx}$ 是奇函数, $\frac{d^2y}{dx^2}$ 是偶函数, $\frac{d^3y}{dx^3}$ 是奇函数,

$$\text{于是 } \frac{d^3y}{dx^3} \Big|_{x=0} = 0.$$

247 答案 (C).由 $f'(x) = e^{f(x)}$, 可得

$$f''(x) = (f'(x))' = (e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x) = e^{2f(x)},$$

$$f'''(x) = (f''(x))' = (e^{2f(x)})' = e^{2f(x)} \cdot 2f'(x) = 2 \cdot e^{3f(x)},$$

$$f^{(4)}(x) = (f'''(x))' = (2e^{3f(x)})' = 2e^{3f(x)} \cdot 3f'(x) = 2 \times 3 \cdot e^{4f(x)},$$

.....

$$f^{(n)}(x) = (n-1)! \cdot e^{nf(x)}. \text{ 故应选 (C).}$$

248 答案 $n!e^{-1}$.令 $u(x) = (x+1)^n$, $v(x) = e^{-x^2}$, 则 $f(x) = u(x)v(x)$, 且

$$[u(x)]^{(k)} \Big|_{x=-1} = 0 (k=0, 1, 2, \dots, n-1), \quad [u(x)]^{(n)} \Big|_{x=-1} = n!, \quad v(x) \Big|_{x=-1} = e^{-1}.$$

由莱布尼茨公式, 可得 $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k [u(x)]^{(k)} [v(x)]^{(n-k)}$, 所以

$$f^{(n)}(-1) = \sum_{k=0}^n C_n^k [u(x)]^{(k)} [v(x)]^{(n-k)} \Big|_{x=-1} = C_n^n [u(x)]^{(n)} [v(x)] \Big|_{x=-1} = n!e^{-1}.$$

249 答案 $\frac{x}{(x+1)^3}$.

方法一: 用反函数和复合函数求导法则.

首先 $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$, 由反函数求导法则, 得 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{x}{x+1}$, 于是

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{x}{x+1}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{x}{x+1}\right)}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{x}{(x+1)^3}.$$

方法二: 用隐函数求导方法.

等式 $y = x + \ln x$ 两边对 y 求导, 得 $1 = \frac{dx}{dy} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dy}$,上式两边继续对 y 求导, 得 $0 = \frac{d^2x}{dy^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \frac{1}{x} \cdot \frac{d^2x}{dy^2}$,解得 $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{x+1}$, $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{x}{(x+1)^3}$.**250 答案** (1) 连续、可导; (2) $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} + \cos x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 连续、不可导;

$$(3) f''(x) = \left(6x - \frac{1}{x}\right) \sin \frac{1}{x} - 4 \cos \frac{1}{x} - \sin x (x \neq 0).$$

(1) 由 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^3 \sin \frac{1}{x} + \sin x + 1\right) = 1 = f(0)$, 知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续;

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x} + \sin x}{x} = 1$, 知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=1$.

$$(2) \text{ 当 } x \neq 0 \text{ 时, } f'(x) = \left(x^3 \sin \frac{1}{x} + \sin x + 1 \right)' = 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} + \cos x,$$

$$\text{又由 (1) 知, } f'(0)=1, \text{ 所以 } f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} + \cos x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} + \cos x \right) = 1 = f'(0)$, 所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续,

又极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} + \frac{\cos x - 1}{x} \right) = -\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ 不存在, 所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

$$(3) \text{ 当 } x \neq 0 \text{ 时, 有 } f''(x) = \left(3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} + \cos x \right)' = \left(6x - \frac{1}{x} \right) \sin \frac{1}{x} - 4 \cos \frac{1}{x} - \sin x,$$

又由 (2) 知, $f''(0)$ 不存在. 所以 $f''(x) = \left(6x - \frac{1}{x} \right) \sin \frac{1}{x} - 4 \cos \frac{1}{x} - \sin x (x \neq 0)$.

251 答案 -2.

将 $x=0$ 代入方程, 得 $f(0) = y|_{x=0} = 1$.

方程两边对 x 求导, 得 $\frac{2x+y'}{x^2+y} = (3x^2y + x^3y') + \cos x$,

将 $x=0, y=1$ 代入上式, 得 $f'(0) = y'|_{x=0} = y'|_{y=1} = 1$. 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left(1 - f\left(\frac{2}{x}\right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - f\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = -2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{2}{x}\right) - f(0)}{\frac{2}{x}} = -2f'(0) = -2.$$

252 答案 -1.

由方程 $xy - e^x + e^y = 0$ 知, $x=0$ 时, $y=0$.

方程两边对 x 求导, 得 $y + xy' - e^x + e^y y' = 0$,

上式两边继续求导, 得 $y' + y' + xy'' - e^x + e^y (y')^2 + e^y \cdot y'' = 0$

将 $x=0, y=0$ 代入上面两式, 得 $y'(0)=1, y''(0)=-2$. 于是

$$\frac{dz}{dx} = f'(e^y - \sin x) \cdot (e^y y' - \cos x),$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = f''(e^y - \sin x) \cdot (e^y y' - \cos x)^2 + f'(e^y - \sin x) \cdot [e^y (y')^2 + e^y y'' + \sin x],$$

$$\text{从而 } \left. \frac{d^2 z}{dx^2} \right|_{x=0} = f''(1) \cdot 0 + f'(1) \cdot (-1) = -f'(1) = -1.$$

253 答案 $\frac{e^2}{3}$.

当 $t=0$ 时, $x=1, y=2$.

由 $x=2t^3+3t+1$, 得 $\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = (6t^2+3)\Big|_{t=0} = 3$.

方程 $e^y \sin t - y + 2 = 0$ 两边对 t 求导, 得 $e^y \frac{dy}{dt} \sin t + e^y \cos t - \frac{dy}{dt} = 0$, 于是

$$\frac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{e^y \cos t}{1 - e^y \sin t}\Big|_{t=0} = e^2.$$

由参数方程求导公式, $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0} = \frac{\frac{dy}{dt}\Big|_{t=0}}{\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}} = \frac{e^2}{3}$.

254 答案 $(e' + 3e^{3t})(1 + e^{2t})$.

$x = t - \ln \sqrt{1 + e^{2t}} = t - \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2t})$. 由参数方程的求导公式, 得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(\arctan e^t)'}{\left(t - \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2t})\right)'} = \frac{\frac{e^t}{1 + e^{2t}}}{\frac{1}{1 + e^{2t}}} = e^t,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{(e^t)'}{\left(t - \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2t})\right)'} = \frac{e^t}{\frac{1}{1 + e^{2t}}} = e^t + e^{3t},$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{dy''}{dx} = \frac{(e^t + e^{3t})'}{\left(t - \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2t})\right)'} = \frac{e^t + 3e^{3t}}{\frac{1}{1 + e^{2t}}} = (e^t + 3e^{3t})(1 + e^{2t}).$$

255 答案 切线方程 $y = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}x$; 法线方程 $y = \frac{\pi}{2}(x+1)$.

螺线的参数方程为 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta = \theta \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta = \theta \sin \theta \end{cases}$, θ 为参数.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{(\theta \sin \theta)'}{(\theta \cos \theta)'} = \frac{\sin \theta + \theta \cos \theta}{\cos \theta - \theta \sin \theta},$$

在点 $(\rho, \theta) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 处, $x=0, y=\frac{\pi}{2}$, $\frac{dy}{dx}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$. 于是

切线斜率 $k_1 = -\frac{2}{\pi}$, 切线方程为 $y - \frac{\pi}{2} = -\frac{2}{\pi}(x-0)$, 即 $y = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}x$.

法线斜率为 $k_2 = \frac{\pi}{2}$, 法线方程为 $y - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(x-0)$, 即 $y = \frac{\pi}{2}(x+1)$.

256 答案 $\frac{1}{2}$.

$y' = 2e^{2x}f'(e^{2x})$, 增量 Δy 的线性主部即函数的微分, 于是有

$$\left. dy \right|_{\substack{x=0 \\ \Delta x=-0.1}} = y' \Delta x \Big|_{\substack{x=0 \\ \Delta x=-0.1}} = 2e^{2x}f'(e^{2x})\Delta x \Big|_{\substack{x=0 \\ \Delta x=-0.1}} = 2f'(1) \times (-0.1) = -0.1,$$

$$\text{所以 } f'(1) = \frac{1}{2}.$$

257 答案 $\frac{\pi}{12} dx.$

$$y' = \left[f\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) \right]' = f'\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) \cdot \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)' = f'\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) \cdot \frac{3}{(x+1)^2},$$

$$\text{于是 } y'(2) = f'(1) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \arctan 1 = \frac{\pi}{12}, \text{ 从而 } dy|_{x=2} = y'(2)dx = \frac{\pi}{12} dx.$$

258 答案 $3dx.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{[f(t^3-1)]'}{[f(\ln t)]'} = \frac{3t^2 \cdot f'(t^3-1)}{f'(\ln t) \cdot \frac{1}{t}} = \frac{3t^3 \cdot f'(t^3-1)}{f'(\ln t)},$$

$$\text{于是 } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = \left. \frac{3t^3 \cdot f'(t^3-1)}{f'(\ln t)} \right|_{t=1} = \frac{3 \cdot f'(0)}{f'(0)} = 3, \text{ 从而微分 } dy|_{t=1} = 3dx.$$

第3章 微分中值定理与导数的应用

259 答案 (B).

判断函数在指定区间上是否满足罗尔定理的条件①②③, 选项(A)中函数在 $x=0$ 处不可导, 不满足条件②; 选项(C)中函数在端点 $f(0) \neq f(-1)$, 不满足条件③; 选项(D)中函数在 $x=0$ 处不连续, 不满足条件①, 选项(B)满足三个条件, 故选(B).

评注

本题考查罗尔定理的条件, 务必牢记三个条件缺一不可.

260 答案 函数 $y = \ln \sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 上连续; 在 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ 内可导, 且 $y' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$;

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\ln 2$. 因此函数在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 上满足罗尔定理的三个条件, 则在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ 内至少存在一点 ξ 使得 $f'(\xi) = 0$. 由 $y'(\xi) = \cot \xi = 0 \Rightarrow \xi = \frac{\pi}{2} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$.

261 解析 令 $F(x) = f(x) - \arctan x$, 则函数 $F(x)$ 满足

- ①在 $[0,1]$ 上连续;
- ②在 $(0,1)$ 内可导;
- ③ $F(0) = F(1) = 0$.

由罗尔定理可知, 在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $F'(\xi) = 0$. 即 ξ 是 $F'(x) = f'(x) - \frac{1}{1+x^2} = 0$ 的根, 故方程 $(1+x^2)f'(x) = 1$ 在 $(0,1)$ 内至少存在一个根 ξ .

评注

利用结论倒推找原函数是中值定理证明题的常用方法.

$(1+x^2)f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) - \frac{1}{1+x^2} = 0$, 找出原函数为 $F(x) = f(x) - \arctan x$.

262 解析 令 $F(x) = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$, 显然函数在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, $F'(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ 且 $F(0) = 0$, $F(1) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$, 由罗尔定理得: 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots + a_n\xi^n = 0$, 从而得证方程 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个根.

评注

方程根的存在性的证明一般考虑如下两种方法:

(1) 闭区间 $[a,b]$ 上连续函数的零点定理; (2) 罗尔定理.

263 解析 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$, 所以 $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$.

又 $f(1) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理的三个条件, 故至少存在一点 $\xi_1 \in (0,1)$, 使

得 $f'(\xi_1) = 0$. 从而, 函数 $f'(x)$ 在区间 $[0, \xi_1] \subset [0, 1]$ 上满足罗尔定理, 因此在 $(0, \xi_1) \subset (0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $f''(\xi) = 0$.

264 解析 由题设可知, $F(x) = x^3 f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $(0, 1)$ 内可导, 且 $F(0) = F(1) = 0$. 则由罗尔定理知, 存在 $\xi_1 \in (0, 1)$, 使 $F'(\xi_1) = 0$.

又 $F'(x) = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x)$, 由于 $F'(x)$ 在 $[0, \xi_1]$ 上连续、可导, 且 $F'(0) = F'(\xi_1) = 0$, 则由罗尔定理可知, 存在 $\xi_2 \in (0, \xi_1)$, 使 $F''(\xi_2) = 0$.

再由 $F''(x) = 6xf'(x) + 6x^2 f''(x) + x^3 f'''(x)$, 因 $F''(x)$ 在 $[0, \xi_2]$ 上连续、可导, 且 $F''(0) = F''(\xi_2) = 0$, 则由罗尔定理可知, 存在 $\xi \in (0, \xi_2) \subset (0, 1)$, 使 $F'''(\xi) = 0$.

评注

在某些证明题中罗尔定理需要反复使用.

265 解析 令 $F(x) = f(x) - e^{-x}$, 则函数 $F(x)$ 满足

- ① 在 $[0, 1]$ 上连续;
- ② 在 $(0, 1)$ 内可导;
- ③ $F(0) = F(1) = 0$.

且 $F'(x) = f'(x) - (e^{-x})' = f'(x) + e^{-x}$, 由罗尔定理可知, 在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) + e^{-\xi} = 0$, ξ 是 $f'(x) + e^{-x} = 0$ 的根, 得证结论.

评注

罗尔定理证明题的关键是构造辅助函数. 要证明形如 $f'(\xi) = g'(\xi)$ 的等式, 则直接构造函数 $F(x) = f(x) - g(x)$.

266 解析 令 $F(x) = xf(x)$, 则函数 $F(x)$ 满足

- ① 在 $[0, a]$ 上连续;
- ② 在 $(0, a)$ 内可导;
- ③ $F(0) = F(a) = 0$.

且 $F'(x) = f(x) + xf'(x)$, 因此, 由罗尔定理可知, 在 $(0, a)$ 上至少存在一点 ξ , 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$, 得证.

评注

罗尔定理证明题的关键是构造辅助函数. 要证明形如 $f'(\xi) + g(\xi)f(\xi) = 0$ 的等式, 则构造函数 $F(x) = f(x) \cdot e^{\int g(x) dx}$. 如上题, 由 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ 可得 $f'(\xi) + \frac{1}{\xi} \cdot f(\xi) = 0$, 从而可知 $g(x) = \frac{1}{x}$, 故构造函数 $F(x) = f(x) \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} = f(x) \cdot e^{\ln x} = xf(x)$.

267 解析 同上题构造方法, 令 $F(x) = x^2 f(x)$, 由题设知: 函数 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $F'(x) = 2xf'(x) + x^2 f''(x)$, $F(0) = F(1) = 0$. 由罗尔定理可知, 在 $(0, 1)$ 上至少存在一点 ξ , 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $2\xi f(\xi) + \xi^2 f'(\xi) = 0$, 从而 $f'(\xi) = -\frac{2f(\xi)}{\xi}$, 得证.

268 解析 令 $F(x) = f(x)f(1-x)$, 则函数 $F(x)$ 满足

- ① 在 $[0, 1]$ 上连续;
- ② 在 $(0, 1)$ 内可导;
- ③ $F(0) = F(1) = 0$.

因此,由罗尔定理可知,在 $(0,a)$ 上至少存在一点 ξ ,使得 $F'(\xi)=0$,即 $f'(\xi)\cdot f(1-\xi)-f(\xi)f'(1-\xi)=0$,从而 $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$,得证.

评注

结论倒推找原函数.由 $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)} \Leftrightarrow f'(\xi)f(1-\xi)-f(\xi)f'(1-\xi)=0 \Leftrightarrow \xi$ 是 $f'(x)f(1-x)-f(x)f'(1-x)=0 \Leftrightarrow [f(x)f(1-x)]'=0$ 的根,因此设辅助函数为 $F(x)=f(x)f(1-x)$.

269 解析 令 $F(x)=f^2(x)-e^x$,由题设知: $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且 $F\left(\frac{1}{2}\right)=1-e^{\frac{1}{2}}<0$,

$F(1)=4-e>0$,则由零点定理可知,存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,使得 $F(\eta)=0$.

又 $F(0)=1-1=0$,函数 $F(x)$ 满足

- ①在 $[0,\eta]$ 上连续;
- ②在 $(0,\eta)$ 上可导; $F'(x)=2f(x)f'(x)-e^x$.
- ③ $F(0)=F(\eta)=0$.

由罗尔定理可知,在 $(0,\eta)\subset(0,1)$ 内至少存在一点 ξ ,使得 $F'(\xi)=0$.即 $2f(\xi)f'(\xi)=e^\xi$,从而 $f'(\xi)=\frac{e^\xi}{2f(\xi)}$,得证.

评注

由结论倒推构造辅助函数. $f'(\xi)=\frac{e^\xi}{2f(\xi)} \rightarrow f'(x)=\frac{e^x}{2f(x)} \Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=e^x \Leftrightarrow [f^2(x)]'=(e^x)'$,因此设辅助函数为 $F(x)=f^2(x)-e^x$.

270 解析 由 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续,知 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续,且在 $[0,2]$ 上必存在最大值 M 和最小值

m ,于是 $m\leq f(0)\leq M$, $m\leq f(1)\leq M$, $m\leq f(2)\leq M$.因此 $m\leq \frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}$

$\leq M$,由介值定理知至少存在一点 $c\in[0,2]$ 使 $f(c)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$.

又已知 $f(3)=1$,函数 $y=f(x)$ 在 $[c,3]$ 上连续, $(c,3)$ 内可导, $f(c)=f(3)$,由罗尔定理得:至少存在一点 $\xi\in(c,3)\subset(0,3)$,使 $f'(\xi)=0$.

271 解析 (1) 令 $F(x)=f(x)-x$,则 $F(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续,又 $F(1)=-1<0$, $F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}>0$,

由零点定理可知,存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,使得 $F(\eta)=f(\eta)-\eta=0$,即 $f(\eta)=\eta$.

(2) 令 $\Phi(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$,则 $\Phi(x)$ 在 $[0,\eta]\subset[0,1]$ 上连续,在 $(0,\eta)$ 内可导, $\Phi'(x)=e^{-\lambda x}\{f'(x)-1-\lambda[f(x)-x]\}$,且 $\Phi(0)=0$, $\Phi(\eta)=e^{-\lambda\eta}[f(\eta)-\eta]=0$,由罗尔定理可得至少存在一点 $\xi\in(0,\eta)$,使得 $\Phi'(\xi)=e^{-\lambda\xi}\{f'(\xi)-1-\lambda[f(\xi)-\xi]\}=0$,即 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

评注

此题目中分别用到了零点定理和罗尔定理, 两个定理都常用来证明点的存在性. 若不含有未知函数的导数, 可考虑利用零点定理或介值定理; 若含有未知函数的导数, 则考虑罗尔中值定理或者其他的微分中值定理.

此题第二问的辅助函数的构造, 可以参考如下推导, 结论倒推找原函数的方法:

$$f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1 \Leftrightarrow f'(\xi) - 1 = \lambda[f(\xi) - \xi] \Leftrightarrow [f(x) - x]'|_{x=\xi} = \lambda[f(x) - x]|_{x=\xi}$$

$$F(x) = f(x) - x \Leftrightarrow F'(x)|_{x=\xi} = \lambda F(x)|_{x=\xi} \Leftrightarrow [F'(x) - \lambda F(x)]|_{x=\xi} = 0, \text{ 因此辅助函数构造为 } \Phi(x) =$$

$$e^{-\int \lambda dx} F(x) = e^{-\lambda x} F(x) = e^{-\lambda x} [f(x) - x].$$

272 解析 设曲线 $y = f(x)$ 与 $y = -x^2 + Bx + C$ 在 (a, b) 内的交点为 $(c, f(c))$ ($a < c < b$), 根据题意绘图如图 272 题 - 图.

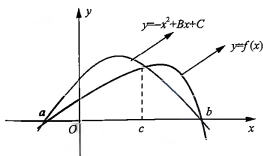
$$\text{令 } F(x) = f(x) - (-x^2 + Bx + C),$$

$$F'(x) = f'(x) + 2x - B, F''(x) = f''(x) + 2.$$

因 $F(a) = F(b) = F(c) = 0$, $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 则在 $[a, c]$ 与 $[c, b]$ 上分别运用罗尔定理, 故存在

$$\xi_1 \in (a, c), \xi_2 \in (c, b), \text{ 使得 } F'(\xi_1) = 0, F'(\xi_2) = 0.$$

从而又有 $F'(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上满足罗尔定理, 因此存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$, 使得 $F''(\xi) = f''(\xi) + 2 = 0$, 即 $f''(\xi) + 2 = 0$.



272 题 - 图

273 答案 (A).

需判断函数在 $[-1, 1]$ 上是否满足拉格朗日定理的两个条件①与②.

选项 (A) 显然满足拉格朗日定理的两个条件, 故选 (A).

选项 (B) 中函数在 $x = 0$ 处不可导, 不满足条件②; 选项 (C) 中函数在 $x = \pm 1$ 处不连续, 不满足条件①; 选项 (D) 中函数在 $x = 0$ 处不连续, 不满足条件①.

评注

本题考查拉格朗日中值定理的条件, 务必牢记两个条件缺一不可.

274 答案 (D).

因为已知条件中不能确定函数在闭区间 $[a, b]$ 上的连续性, 因此排除 (A)、(B)、(C). 对于

选项 (D): $f(x)$ 在 $\xi \in (a, b)$ 可导, 则连续, 从而 $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \xi} [f(x) - f(\xi)] = 0$, 因此选 (D).

275 解析 $y = \sin x$ 在区间 $[0, x]$ ($0 < x < \pi$) 上满足 $\begin{cases} \text{①在 } [0, x] \text{ 上连续} \\ \text{②在 } (0, x) \text{ 内可导} \end{cases}$, 由拉格朗日定理, 故存

在 $\xi \in (0, x)$, 使得 $\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = (\sin x)'|_{x=\xi} = \cos \xi$. 因 $\cos x$ 在 $(0, \pi)$ 内单减, 故 $\cos \xi > \cos x$,

$$\text{有 } \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

276 解析 由于 $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b} \Leftrightarrow \frac{a-b}{a} < \ln a - \ln b < \frac{a-b}{b}$, 故令 $f(x) = \ln x$,

则 $f(x)$ 在区间 $[b, a]$ 上满足 $\begin{cases} \text{①在}[b, a]\text{上连续} \\ \text{②在}(b, a)\text{上可导} \end{cases}$, 故存在 $\xi \in (b, a)$, 使得

$$f(a) - f(b) = f'(\xi)(a-b) \Rightarrow \ln a - \ln b = \frac{1}{\xi}(a-b),$$

因为 $0 < b < \xi < a$, 所以 $\frac{1}{b} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{a}$, 故 $\frac{a-b}{a} < \ln a - \ln b = \frac{1}{\xi}(a-b) < \frac{a-b}{b}$, 即

$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}.$$

277 解析 令 $f(x) = \ln(1+x)$, 显然 $f(x)$ 在区间 $[0, x]$ 上满足拉格朗日定理的条件, 故存在

$\xi \in (0, x)$, 使得 $f(x) - f(0) = f'(\xi)(x-0) \Rightarrow \ln(1+x) - \ln 1 = \frac{1}{1+\xi} \cdot x$, 因为 $0 < \xi < x$, 所

以 $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+\xi} < 1$, 故有 $\frac{1}{1+x} \cdot x < \ln(1+x) = \frac{1}{1+\xi} \cdot x < x$, 即 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

278 解析 设 $f(x) = e^x - ex$, 显然 $f(x)$ 在区间 $[1, x]$ 上满足拉格朗日定理的条件, 故存在

$\xi \in (1, x)$, 使得 $f(x) - f(1) = f'(\xi)(x-1) \Rightarrow e^x - ex = (e^\xi - e) \cdot (x-1)$, 因为 $1 < \xi < x$, 所以 $(e^\xi - e) \cdot (x-1) > 0$, 从而 $e^x - ex > 0$, 得证.

279 解析 因为 $(\arcsin x + \arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, 由拉格朗日中值定理的推论可知,

$$\arcsin x + \arccos x = C (\forall x \in \mathbb{R}).$$

取 $x=0$ 代入可得 $C = \arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, 得证.

280 解析 因为 $\left(2 \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'$

$$= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1+x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} (x \geq 1)$$

$$= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1+x^2}{(x^2-1)} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = 0,$$

由拉格朗日中值定理的推论可知, $2 \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = C (\forall x \geq 1)$.

取 $x=1$ 代入可得 $C = 2 \arctan 1 + \arcsin 1 = \pi$, 得证.

281 解析 构造辅助函数 $F(x) = xf(x)$, 易知 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且

$F'(x) = f(x) + xf'(x)$, 因此由拉格朗日中值定理可知, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\frac{F(b) - F(a)}{b-a} =$

$F'(\xi)$, 即 $\frac{bf(b) - af(a)}{b-a} = f(\xi) + \xi f'(\xi)$.

评注

本题的关键是辅助函数的构造, 由等式右边 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = [xf(x)]'|_{x=\xi}$ 得到构造思路.

282 解析 (1) 当 $a=0$ 时, 显然有 $f(a+b) = f(a) + f(b)$;

(2) 当 $a>0$ 时, 在闭区间 $[0, a]$ 和 $[b, a+b]$ 上函数 $f(x)$ 均满足拉格朗日中值定理, 因此在 $\xi_1 \in (0, a)$, $\xi_2 \in (b, a+b)$, 使得

$$f'(\xi_1) = \frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \frac{f(a)}{a}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(a+b) - f(b)}{(a+b) - b} = \frac{f(a+b) - f(b)}{a}.$$

又 $\xi_1 < \xi_2$, 且 $f'(x)$ 在开区间 $(0, c)$ 内单调递减, 因此 $f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$, 故 $\frac{f(a)}{a} > \frac{f(a+b) - f(b)}{a}$, 又因为 $a > 0$, 所以 $f(a+b) < f(a) + f(b)$.

综合 (1)(2) 可知, 当 $0 \leq a \leq b \leq a+b \leq c$ 时, $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$.

283 解析 由于 $f(x) = \sin x$, $F(x) = 1 + \cos x$ 是初等函数, 所以在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是连续的, 且可导, 又 $f'(x) = \cos x$, $F'(x) = -\sin x$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内满足 $F'(x) \neq 0$, 满足柯西中值定理的条件, 故

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)}{F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0)} = \frac{1}{-1} = \frac{\cos \xi}{-\sin \xi} = -\cot \xi, \quad \text{即 } \cot \xi = 1, \quad \text{解得 } \xi = \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

评注

本题是验证柯西定理的正确性, 我们需要验证柯西定理的三个条件, 并寻找到区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内的 ξ 点的存在性.

284 解析 由于 $\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = \frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}$, 因此可设 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$, $G(x) = \frac{1}{x}$. 因为 $f(x)$ 在

区间 $[a, b]$ 上可微, 所以 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导; 易知 $G(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且

$$F'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}, \quad G'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0.$$

从而 $F(x), G(x)$ 满足柯西中值定理的条件, 从而存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} \Rightarrow \frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{\frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}} = f(\xi) - \xi f'(\xi),$$

$$\text{即 } \frac{af(b)-bf(a)}{a-b} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

285 解析 由于 $\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)(a^2+ab+b^2)} = \frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3}$, 因此可设 $F(x)=x^3 \cdot f(x)$ 与 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $F'(x)=3x^2 \neq 0$; 因此满足柯西中值定理的条件, 从而存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3} = \frac{f'(\xi)}{3\xi^2}$, 即 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = (a^2+ab+b^2) \frac{f'(\xi)}{3\xi^2}$.

286 解析 设 $F(x)=\sin \ln x, G(x)=\ln x$, 则 $F(x), G(x)$ 在 $[1,e]$ 上连续, 在 $(1,e)$ 内可导, $F'(x)=\frac{1}{x} \cos \ln x, G'(x)=\frac{1}{x} \neq 0$, 由柯西中值定理, 存在 $\xi \in (1,e)$, 使得

$$\frac{F(e)-F(1)}{G(e)-G(1)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} \Rightarrow \frac{\sin 1 - 0}{1 - 0} = \frac{\frac{1}{\xi} \cdot \cos \ln \xi}{\frac{1}{\xi}} = \cos \ln \xi, \text{ 即 } \sin 1 = \cos \ln \xi.$$

287 答案 ∞ .

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 6x}{3x^2 - 2x - 1} = \infty.$$

评注

本题考查洛必达法则的应用, 使用洛必达法则前务必要先判断是否是不定式.

288 答案 1.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1} = 1.$$

289 答案 $\frac{4}{e}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1 + \ln x}{e^x - e} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{4}{e}.$$

评注

在使用洛必达法则时, 切莫不做判断反复使用, 本题中使用一次洛必达法则后, 不再是“ $\frac{0}{0}$ ”或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”, 直接可用四则运算求极限.

290 答案 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + e^x}{xe^x} \left[\frac{\infty}{\infty} \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{e^x} + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} \left[\frac{\infty}{\infty} \right] + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{e^x} \left[\frac{\infty}{\infty} \right] + 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{e^x} \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{e^x} = 0. \end{aligned}$$

291 答案 $\frac{1}{6}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} \xrightarrow{\text{等价代换}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \left[\frac{0}{0} \right] \xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \xrightarrow{\text{等价代换}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = \frac{1}{6}.$$

评注

洛必达法则和等价无穷小替换结合使用, 可以使计算更简洁. 总结几组常用的等价无穷小, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\arctan x \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $(1+x)^a - 1 \sim ax$.

292 答案 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x \ln x)}{x^a} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + \ln \ln x}{x^a} \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x \ln x}}{ax^{a-1}} \\ &= \frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 1}{x^a \ln x} \xrightarrow{\text{加法}} \frac{1}{a} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^a} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^a \ln x} \right) = 0. \end{aligned}$$

293 答案 1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{1 - \sqrt{1 - x^2}} &\xrightarrow{\text{等价代换}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{\frac{1}{2}x^2} \left[\frac{0}{0} \right] \\ &\xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{1} = 1. \end{aligned}$$

294 答案 $-\frac{1}{6}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\ln(1 + 2x^3)} &\xrightarrow{\text{等价代换}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{2x^3} \xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{6x^2} \\ &= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x^2(1+x^2)} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

295 答案 $\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &\xrightarrow{\text{等价代换}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x \cdot 2x \cdot \tan^2 x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x \cos x)(\sin x + x \cos x)}{x^4} \\ &\xrightarrow{\text{乘法}} \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \cdot 2 \xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

296 答案 (D).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{c \ln(1 - 2x) + d(1 - e^{-x^2})} \left[\frac{0}{0} \right] \xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sec^2 x + b \sin x}{c \frac{-2}{1-2x} + d(2xe^{-x^2})}$$

$$\xrightarrow{\text{乘法}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + b \sin x \cos^2 x}{-2c + 2dx e^{-x^2}(1-2x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-2x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + b \sin x \cos^2 x}{-2c + 2dx e^{-x^2}(1-2x)} = -\frac{a}{2c}.$$

因此, $-\frac{a}{2c} = 2$, 得 $a = -4c$. 故选 (D).

297 答案 $\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &\xrightarrow{\text{等价代换}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2[x - \ln(1 + \tan x)]}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1 + \tan x)}{2x^2} \\ &\xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan x - \sec^2 x}{4x(1 + \tan x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \tan^2 x}{4x(1 + \tan x)} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

298 答案 $\frac{1}{6}$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &\xrightarrow{\text{等价代换}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)]x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x^3} \\ &\xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos(\sin x) \cdot \cos x}{3x^2} \xrightarrow{\text{乘法}} \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{x^2} \\ &\xrightarrow{\text{等价代换}} \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}\sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

299 答案 $\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right) \xrightarrow{\text{通分}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

300 答案 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-\lambda x} \left[\frac{\infty}{\infty} \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{\lambda x}} \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}} \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}} \\ &= \cdots \cdots (\text{连续 } n-2 \text{ 次洛必达法则}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}} = 0. \end{aligned}$$

301 答案 $\frac{2}{\pi}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \tan \frac{\pi}{2} x &\left[\frac{0 \cdot \infty}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\cot \frac{\pi}{2} x} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{-\frac{\pi}{2} \csc^2 \frac{\pi}{2} x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2} x}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

302 答案 0.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \xrightarrow{\text{通分}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} \left[\frac{0}{0} \right] \xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

303 答案 $\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \xrightarrow{\text{通分}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \xrightarrow{\text{等价代换}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

304 答案 $\frac{1}{3}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \xrightarrow{\text{通分}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x} \xrightarrow{\text{等价代换}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

评注

本题是 $\infty - \infty$ 型不定式，通分化为 “ $\frac{0}{0}$ ” 型不定式，结合等价无穷小的替换和三角恒等式及洛必达法则求解，常用三角恒等式有 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ， $\sec^2 x - 1 = \tan^2 x$ ， $\csc^2 x - 1 = \cot^2 x$ 。

305 答案 1.

显然所求极限为 “ 0^0 ” 型不等式，利用 $\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{g(x) \ln f(x)}$ 恒等变形。

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x},$$

$$\text{其中, } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x \left[\frac{0}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0, \text{ 所以, } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^0 = 1.$$

306 答案 $\frac{1}{e}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} \left[\frac{1}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{1-x} \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x}},$$

$$\text{其中, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1. \text{ 所以, } \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

评注

本题是 1^∞ 型不定式，亦可以利用第二重要极限求解更简单：
 $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} [1 + (x-1)]^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} [1 + (x-1)]^{\frac{1}{x-1}} = e^{-1}.$

307 答案 e^6 .

方法一: 利用洛必达法则求解.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{\sin x}} \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{2}{\sin x} \ln(1+3x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1+3x)}{\sin x}},$$

$$\text{其中, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1+3x)}{\sin x} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+3x}{\cos x} = 6, \text{ 所以 } \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{\sin x}} = e^6.$$

方法二: 利用两个重要极限求解.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{3x} \cdot \frac{6x}{\sin x}} = \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{3x}} \right]^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\sin x}} = e^6.$$

308 答案 $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} \left[\frac{1}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\cos x) \cdot \frac{1}{\ln(1+x^2)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(1+x^2)}},$$

$$\text{其中, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}, \text{ 所以, } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

309 答案 e^{-1} .

因 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\frac{1}{x} \ln x} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$, 故所求极限为“ 0^0 ”型不等

式, 利用 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{g(x) \ln f(x)}$ 恒等变形. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}} - 1)}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^{\frac{1}{x}} - 1)}{\ln x}}$,

$$\begin{aligned} \text{其中, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^{\frac{1}{x}} - 1)}{\ln x} \left[\frac{\infty}{\infty} \right] &\stackrel{\text{洛必达}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\ln x} \cdot e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}}{\frac{1}{x}} \\ &\stackrel{\text{等价代换}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\ln x} \cdot e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{化简}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{x}} (1 - \ln x)}{\ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{\ln x} \stackrel{\text{洛必达}}{=} -1, \end{aligned}$$

故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1}$.

310 答案 $(ab)^{\frac{3}{2}}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\frac{1}{2} \ln(a^x + b^x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} [\ln(a^x + b^x) - \ln 2]}{x}},$$

$$\text{其中, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} [\ln(a^x + b^x) - \ln 2]}{x} \left[\frac{0}{0} \right] \xrightarrow{\text{洛必达}} 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{1} = \frac{3}{2} (\ln a + \ln b) = \ln(ab)^{\frac{3}{2}},$$

$$\text{所以, } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(ab)^{\frac{3}{2}}} = (ab)^{\frac{3}{2}}.$$

评注

本题是 1^∞ 型不定式,也可以利用第二重要极限求解.

311 答案 3.

$$\begin{aligned} \text{因 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (e^{\tan x - x} - 1)}{x^n} \xrightarrow{\text{等价代换}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^n} \left[\frac{0}{0} \right] \\ &\xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{nx^{n-1}} \xrightarrow{\text{等价代换}} \frac{1}{n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^{n-1}}, \end{aligned}$$

又两者是同阶无穷小,故 $n-1=2 \Rightarrow n=3$.

312 答案 -2.

因 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.即 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = a$.而 $\lim_{x \rightarrow 0}$

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x} \left[\frac{0}{0} \right] \xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x + 2ae^{2ax}}{1} = 2 + 2a, \text{ 所以 } 2 + 2a = a, \text{ 则 } a = -2.$$

313 答案 $e^{\frac{1}{2}}$.

$$\begin{aligned} \text{因 } f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续, 则 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= f(0) = a. \text{ 而 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(\cos x)}{x^2}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}}, \text{ 其中 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} \xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x \cos x} = -\frac{1}{2}, \text{ 所以, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^{-\frac{1}{2}}, \text{ 故 } a = e^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

314 答案 $\frac{1}{\pi}$.

观察到函数在 $x=1$ 时无意义,需要补充函数在 $x=1$ 的定义,要使函数在 $x=1$ 处连续,只需左极限值 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 等于函数值 $f(1)$ 即可.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{1}{\pi x} + \frac{1}{\sin \pi x} - \frac{1}{\pi(1-x)} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} + \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi(1-x) - \sin \pi x}{\pi(1-x) \sin \pi x} \xrightarrow{\text{令 } 1-x=y} \frac{1}{\pi} + \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\pi y - \sin \pi y}{\pi^2 y^2} \\ &= \frac{1}{\pi} + \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\pi - \pi \cos \pi y}{2\pi^2 y} = \frac{1}{\pi} + \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\pi^2 \sin \pi y}{2\pi^2} = \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

补充定义 $f(1) = \frac{1}{\pi}$, 则 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi x} + \frac{1}{\sin \pi x} - \frac{1}{\pi(1-x)}, & x \in [\frac{1}{2}, 1) \\ \frac{1}{\pi}, & x = 1 \end{cases}$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上连续.

315 解析 (1) 因 $0 < x_1 < \pi$, 则 $0 < x_2 = \sin x_1 \leq 1 < \pi$, 可推得 $0 < x_{n+1} = \sin x_n < \pi$, $n = 1, 2, \dots$, 故可知数列 $\{x_n\}$ 有界.

又当 $x > 0$ 时, $\sin x < x$, 则 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\sin x_n}{x_n} < 1$, 即 $x_{n+1} < x_n$, 因此可知数列 $\{x_n\}$ 单调递减, 由单调有界定理可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 等式 $x_{n+1} = \sin x_n$ 两边求极限得 $l = \sin l$, 解得 $l = 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$, 由 (1) 知此极限为 “ 1^∞ ” 型不定式.

令 $t = x_n$, 则 $n \rightarrow \infty$ 时, $t \rightarrow 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(\frac{\sin t}{t})}{t^2}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{\sin t}{t})}{t^2}}$, 而

其中 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{\sin t}{t})}{t^2} \xrightarrow{\text{无穷小替换}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin t}{t} - 1}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{t^3} \xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{3t^2} \xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{6t} = -\frac{1}{6}$, 因此得,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

316 答案 拉格朗日型: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}$ (ξ 在 0 与 x 之间).

佩亚诺型: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.

(1) 写出函数的各阶导数, $f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = f^{(n+1)}(x) = e^x$.

(2) 求导数值: $f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = f^{(n+1)}(0) = 1$.

(3) 代入公式③, 得带有拉格朗日型余项的麦克劳林公式为

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (\xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}).$$

代入公式④, 得带有佩亚诺型余项的麦克劳林公式为:

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

评注

几个常见函数的麦克劳林公式需要记住, 后期用时会更方便.

$$(1) f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

$$(2) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}).$$

$$(3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

$$(4) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \quad x \in (-1, 1].$$

$$(5) \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \quad |x| < 1.$$

$$(6) (1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \quad |x| < 1.$$

317 答案 2.

由麦克劳林公式 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$, 及 $x \rightarrow 0$ 时 $\ln(1+x) \sim x$, 可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{e^x - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{x^2}{2!} + o(x^2)} \stackrel{\text{同除以 } x^2}{=} \frac{1}{\frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^2)}{x^2}} = 2.$$

318 答案 $\frac{1}{3}$.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \sim x$, 分母可以先使用等价无穷小代换. 分子的 $\sin x$ 不能使用无穷小代换. 由麦克劳林公式, 有 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\tan^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)] - x[1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)]}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)] - [x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)]}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

评注

此题用洛必达法则求解更简单.

319 答案 $-\frac{1}{4}$.

由麦克劳林公式, 有 $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$, $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)] + [1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)] - 2}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4}x^2 + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

评注

此题中的 $\sqrt{1+x}$, $\sqrt{1-x}$ 不是作为因子出现的, 故在计算中不要使用无穷小代换.

320 答案 (A).

由麦克劳林公式, 有 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (ax + bx^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-a)x - (\frac{1}{2} + b)x^2 + o(x^2)}{x^2} = 2,$$

所以, $1-a=0$, $-(\frac{1}{2}+b)=2$, 即 $a=1, b=-\frac{5}{2}$. 故选 (A).

321 答案 $-\frac{1}{12}$.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x^2 \sim x^2$, 由麦克劳林公式, 有

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2), \quad e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2), \quad \sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4),$$

升小代天用或前不 x 的 升小代天

$$\begin{aligned} \text{则 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{1+x^2}}{2} \cdot \frac{1}{\sin x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - [1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)]}{\{[1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)] - [1 + x^2 + o(x^2)]\}x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8}x^4 + o(x^4)}{\{-\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8}x^4 + o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4 + o(x^4)} = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

评注

此题亦可利用洛必达法则求解.

322 答案 $-\frac{1}{12}$.

由麦克劳林公式, 有

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4), \quad e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2!} + o(x^4), \quad \text{则}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)] - [1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2!} + o(x^4)]}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

323 答案 (C).

由麦克劳林公式 $\sin 6x = 6x - \frac{(6x)^3}{3!} + o(x^3)$ 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[6x - \frac{(6x)^3}{3!} + o(x^3)] + xf(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[6 + f(x) - 36]x^2}{x^2} = 0,$$

因此, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = 36$. 故选 (C).

评注

(1) 此题不可用洛必达法则求解, 因为题目中的 $f(x)$ 不知道是否可导. (2) 此题有多种解法, 参见 98 题.

324 答案 (A).

由麦克劳林公式 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$ 知 $e^x - (ax^2 + bx + 1) = (1-b)x + \left(\frac{1}{2} - a\right)x^2 + o(x^2)$,

因 $e^x - (ax^2 + bx + 1)$ 比 x^2 高阶无穷小, 则 $1-b=0, \frac{1}{2}-a=0$, 即 $a=\frac{1}{2}, b=1$. 故选 (A).

325 答案 二阶.

由 $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$, 知

$$\sqrt{1-2x} = 1 + \frac{1}{2}(-2x) - \frac{1}{8}(-2x)^2 + o(x^2) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$\sqrt[3]{1-3x} = 1 + \frac{1}{3}(-3x) - \frac{1}{9}(-3x)^2 + o(x^2) = 1 - x - x^2 + o(x^2).$$

故 $\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x} = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, 因此当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$ 是 x 的二阶无穷小.

326 答案 $-3^n(n-1)!$.

由泰勒公式 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$, 知

$$\ln(1-3x) = -3x - \frac{(-3x)^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(-3x)^n}{n} + o(x^n) = -3x - \frac{9}{2}x^2 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(-3)^n}{n}x^n + o(x^n)$$

其中, 等式右端 x^n 的系数为 $(-1)^{n-1} \frac{(-3)^n}{n}$, 又因泰勒展开式

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \text{ 中 } x^n \text{ 的系数为 } \frac{y^{(n)}(0)}{n!}, \text{ 故 } (-1)^{n-1} \frac{(-3)^n}{n} = \frac{y^{(n)}(0)}{n!},$$

解得 $y^{(n)}(0) = -3^n(n-1)!$.

327 解析 由麦克劳林公式可知, $e^x > 1+x+\frac{1}{2}e^{\theta x} \cdot x^2$ ($0 < \theta < 1$), 其中当 $x \neq 0$ 时, $\frac{1}{2}e^{\theta x} \cdot x^2 > 0$, 因此, $e^x > 1+x$ ($x \neq 0$), 得证.

评注

此题亦可用拉格朗日中值定理或根据函数单调性证明.

328 解析 在 $x=0$ 处将函数 $f(x)$ 按泰勒公式展开得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3, \quad \eta \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}, x \in [-1, 1],$$

令 $x=-1, x=1$ 时, 有

$$0 = f(-1) = f(0) + \frac{1}{2}f''(0) - \frac{1}{6}f'''(\eta_1), \quad \eta_1 \in (-1, 0),$$

$$1 = f(1) = f(0) + \frac{1}{2}f''(0) + \frac{1}{6}f'''(\eta_2), \quad \eta_2 \in (0, 1),$$

以上两式相减得 $f'''(\eta_1) - f'''(\eta_2) = 6$.

由已知 $f'''(x)$ 连续, 则 $f'''(x)$ 在闭区间 $[\eta_1, \eta_2]$ 上必有最大值 M 和最小值 m ,

所以 $m \leq \frac{1}{2}[f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)] \leq M$, 由连续函数的介值定理可知, 至少存在一点 $\xi \in [\eta_1, \eta_2] \subset (-1, 1)$, 使得 $f'''(\xi) = \frac{1}{2}[f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)] = 3$.

评注

题设条件中若出现二阶或二阶以上导数时往往考虑泰勒定理. 本题中出现了三阶导数, 因此我们使用泰勒定理时展开到了三阶.

329 解析 设函数 $f(x)$ 在 a 点取得最小值, 则 $a \in (0, 1), f(a) = -1, f'(a) = 0$.

函数在 a 点的泰勒公式为 $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2 = -1 + \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2$,

令 $x=0, x=1$ 得

$$0 = f(0) = -1 + \frac{f''(\xi_1)}{2}a^2, \quad \xi_1 \in (0, a) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$0 = -1 + \frac{f''(\xi_2)}{2}(1-a)^2, \quad \xi_2 \in (a, 1) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

若 $0 < a < \frac{1}{2}$, 则由①可知 $f''(\xi_1) \geq 8$; 若 $\frac{1}{2} \leq a < 1$, 即 $0 < 1-a \leq \frac{1}{2}$, 则由②可知 $f''(\xi_2) \geq 8$.

综上, 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f''(\xi) \geq 8$.

330 答案 在 $(-\infty, 0), (1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, 1)$ 上单调递减.

(1) 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

(2) 因 $f'(x) = 1 - x^{-\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}$, 可知 $x=0$ 是不可导点.

令 $f'(x)=0$, 解得 $x=1$, 即为驻点.

(3) 用 $x=0$, $x=1$ 将定义域划分为小区间, 以表格形式讨论如下.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	-	0	+
$f(x)$	↑		↓		↑

因此, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, 1)$ 上单调递减.

331 解析 令 $F(x) = \tan x - x - \frac{1}{3}x^3$, 则 $F(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 上连续、可导, 且

$F'(x) = \sec^2 x - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2 = (\tan x + x)(\tan x - x)$, 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x > x > 0$,

从而 $F'(x) = (\tan x + x)(\tan x - x) > 0$, 因此, $F(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 故当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时,

有 $F(x) > F(0) = 0$, 即 $\tan x > x + \frac{1}{3}x^3$.

评注

利用单调性验证不等式的步骤: (1) 构造辅助函数 $F(x)$, 一般情况下, 我们把不等式一端整理为 0, 则另一端就为辅助函数; (2) 判断 $F(x)$ 的单调性; (3) 求出区间端点的函数值或者极值得证不等式.

332 解析 令 $F(x) = (1+x)\ln(1+x) - \arctan x$, 则 $F'(x) = \ln(1+x) + 1 - \frac{1}{1+x^2} = \ln(1+x) + \frac{x^2}{1+x^2}$,

当 $x > 0$ 时, $F'(x) = \ln(1+x) + \frac{x^2}{1+x^2} > 0$, 因此, $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续且单调递增, 故有

$F(x) > F(0) = 0$, 即 $F(x) = (1+x)\ln(1+x) - \arctan x > 0$, 故 $\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}$.

333 答案 (D).

反例: $f(x) = x^3, x \in (-\infty, +\infty)$, 则 $f'(x) = 3x^2 \geq 0$. (A) 不正确.

而 $f'(-x) = 3x^2 \geq 0$, 排除 (B). $f(-x) = -x^3$ 单减, 排除 (C). 故选 (D).

事实上, 对任意 x_1, x_2 , 当 $x_1 > x_2$ 时, 有 $-x_1 < -x_2$, 则 $f(-x_1) < f(-x_2)$, 也即 $-f(-x_1) > -f(-x_2)$, 故 $-f(-x)$ 单调递增, (D) 正确.

334 答案 (C).

因方程左端是偶函数, 先在 $(0, +\infty)$ 内讨论根的情况.

当 $x > 0$ 时, 令 $f(x) = x^4 + x^{\frac{1}{2}} - \cos x$, 则 $f(x) = x^4 + x^{\frac{1}{2}} - \cos x \geq x^4 + x^{\frac{1}{2}} - 1$,

故当 $x > 1$ 时, 有 $f(x) \geq 1 > 0$, 即方程 $f(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 内没有根.

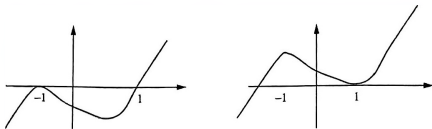
因 $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 2 - \cos 1 > 0$, 由零点定理可知, 在 $(0, 1)$ 内至少有一个根.

又 $f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \sin x$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$, 故函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 因此方程 $f(x) = 0$ 在 $(0, 1)$ 内有且仅有一个根. 故方程 $f(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且仅有一个根. 利用偶函数的对称性可知, 方程在 $(-\infty, 0)$ 内有且仅有一个根, 故方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内有且仅有两个实根, 所以选 (C).

335 答案 (B).

因为 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$, 令 $f'(x) = 0$, 得驻点为 $x = -1, x = 1$.

当 $x < -1$, $x > 1$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递增, 当 $-1 < x < 1$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递减, 且极大值为 $f(-1)$, 极小值为 $f(1)$, 又 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 若要使函数恰好有两个不同的零点, 则需要 $f(-1) = 0$ 或者 $f(1) = 0$ (如 335 题 - 图所示), 即 $f(-1) = 2 - a = 0$ 或者 $f(1) = -2 - a = 0$, 故 $a = 2$ 或 $a = -2$, 因此选 (B).



335 题 - 图

评注

函数的零点问题或者方程根的问题, 在应用中可以转化为对应函数图形与 x 轴的交点问题, 而与 x 轴的交点问题可以通过函数的单调性来判断.

336 答案 (B).

因 $f(x) = x^5 - 2ax^3 + 3bx + 4c$ 是奇次多项式, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 由极限的保号性知, 存在 $c_1 < 0$, 使得 $f(c_1) < 0$; 存在 $c_2 > 0$, 使得 $f(c_2) > 0$. 由零点定理可知, 至少存在一根.

又由于 $f'(x) = 5x^4 - 6ax^2 + 3b$, 因为 $\Delta = (-6a)^2 - 60b = 12(3a^2 - 5b)$, 由条件可知 $\Delta < 0$, 所以 $f'(x) = 0$ 没有实根, 且 $f'(x) > 0$, 从而 $f(x)$ 单调递增, 因此函数 $f(x) = x^5 - 2ax^3 + 3bx + 4c$ 仅有一个实根, 故选 (B).

337 答案 (D).

因为 $F'(x) = \frac{f'(x)(x-a) - [f(x) - f(a)]}{(x-a)^2}$

$$\stackrel{\text{拉格朗日定理}}{=} \frac{f'(x)(x-a) - f'(\xi)(x-a)}{(x-a)^2} = \frac{f'(x) - f'(\xi)}{(x-a)} \quad (\text{其中 } a < \xi < x),$$

已知 $f''(x) > 0$, 则 $f'(x)$ 单调递增, 即 $f'(x) > f'(\xi)$, 从而 $F'(x) > 0$, 于是 $F(x)$ 在 $(a, b]$

上单调递增, 故选 (D).

338 解析 因为 $y = \ln x$ 是单调递增的函数, 要证 $(a+x)^a < a^{a+x}$, 即证 $\ln(a+x)^a < \ln a^{a+x}$, 故只需证明 $a \ln(a+x) < (a+x) \ln a$ 即可.

设 $f(x) = a \ln(a+x) - (a+x) \ln a$, 则 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内连续、可导, 又 $f'(x) = \frac{a}{a+x} - \ln a$, 其中 $a > e$, $\ln a > 1$, $\frac{a}{a+x} < 1$, 故 $f'(x) < 0$, 因此函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 而 $f(0) = 0$, 因此当 $x > 0$ 时, $f(x) < f(0) = 0$, 即 $a \ln(a+x) < (a+x) \ln a$, 也即 $(a+x)^a < a^{a+x}$.

339 解析 设 $f(x) = \ln^2 x$, 因 $f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$, 可知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足拉格朗日中值定理, 故 $\ln^2 b - \ln^2 a = \frac{2 \ln \xi}{\xi} (b-a)$, $a < \xi < b$.

令 $\varphi(t) = \frac{\ln t}{t}$, 则 $\varphi'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}$, 当 $t > e$ 时, $\varphi'(t) < 0$, 即 $\varphi(t)$ 单调递减, 因此

$\varphi(\xi) > \varphi(e^2)$, 即 $\frac{\ln \xi}{\xi} > \frac{\ln e^2}{e^2} = \frac{2}{e^2}$, 因此 $\ln^2 b - \ln^2 a = \frac{2 \ln \xi}{\xi} (b-a) > \frac{4}{e^2} (b-a)$.

340 答案 在 $(-\infty, 0), \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ 是凹的, 在 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ 是凸的, 拐点 $(0, 0), \left(\frac{1}{4}, -\frac{3\sqrt[3]{4}}{64}\right)$.

(1) 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

(2) $f'(x) = (x^{\frac{8}{3}} - x^{\frac{5}{3}})' = \frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}} - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$, $f''(x) = \frac{40}{9}x^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot (4x-1)$, 可知, $x=0$ 是 $f''(x)$ 不存在的点. 令 $f''(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{4}$.

(3) 用 $x=0$, $x = \frac{1}{4}$ 将定义域划分为小区间, 以表格形式讨论如下.

x	$(-\infty, 0)$	0	$\left(0, \frac{1}{4}\right)$	$\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$
$f''(x)$	+	不存在	-	0	+
$f(x)$	∪	$(0, 0)$ 拐点	∩	$\left(\frac{1}{4}, -\frac{3\sqrt[3]{4}}{64}\right)$ 拐点	∪

因此, 曲线在 $(-\infty, 0), \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ 是凹的, 在 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ 是凸的, 拐点是 $(0, 0), \left(\frac{1}{4}, -\frac{3\sqrt[3]{4}}{64}\right)$.

341 答案 (D).

当 $x \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$ 时, $-1 < \sin x < 0$, 因此 $0 < 1 + \sin x < 1$, 则 $f(x) = |1 + \sin x| = 1 + \sin x$, 且 $f'(x) = \cos x < 0$, $f''(x) = -\sin x > 0$, $x \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$. 故 $f(x) = |1 + \sin x|$ 的图形在区间 $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$

内是单调递减的, 凹的, 故选 (D).

342 解析 令 $f(t) = e^t$, 则 $f'(t) = e^t, f''(t) = e^t > 0$, 因此曲线 $f(t) = e^t$ 在 (x, y) 或 (y, x) 上为凹的, 于是由定义可知 $\frac{1}{2}[f(x) + f(y)] > f\left(\frac{x+y}{2}\right)$, 即 $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$.

343 答案 在 $(-\infty, 1)$, $(2, +\infty)$ 凹的, 在 $(1, 2)$ 是凸的, 拐点是 $(1, 0)$, $(2, 0)$.

函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 因为 $f(x) = x^2 - 3x + 2 = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 2 \\ -x^2 + 3x - 2, & 1 < x < 2 \end{cases}$,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x < 1 \text{ 或 } x > 2 \\ \text{不存在}, & x = 1, x = 2 \\ -2x + 3, & 1 < x < 2 \end{cases} \quad f''(x) = \begin{cases} 2, & x < 1 \text{ 或 } x > 2 \\ \text{不存在}, & x = 1, x = 2 \\ -2, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

用 $x = 1$, $x = 2$ 将定义域划分为小区间, 以表格形式讨论如下.

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	+	不存在	-	不存在	+
$f(x)$	U	$(1, 0)$ 拐点	∩	$(2, 0)$ 拐点	U

因此, 曲线在 $(-\infty, 1)$, $(2, +\infty)$ 凹的, 在 $(1, 2)$ 是凸的, 拐点是 $(1, 0)$, $(2, 0)$.

评注

绝对值函数本质是分段函数, 求解时先去掉绝对值符号写成分段函数形式.

344 答案 (B).

因为点 $(0, 1)$ 在曲线上, 故代入曲线方程可得 $c = 1$.

又 $f''(x) = 6ax + b$, 而点 $(0, 1)$ 是曲线 $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ 的拐点, 则 $f''(0) = 0 \Rightarrow 6a \cdot 0 + b = 0$, 即 $b = 0$, 故 $f''(x) = 6ax$, 此时 a 取不为零的任意值, $f''(x)$ 在 $x = 0$ 两侧的符号总是相反, 即 $(0, 1)$ 为拐点. 故选 (B).

345 答案 (C).

由 $f(-x) = f(x)$ 知, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内为偶函数, 因此函数图像关于 y 轴对称.

由 $f'(x) > 0, f''(x) < 0$ 知, 在 $(-\infty, 0)$ 内曲线单调递增并且为凸的, 故在 $(0, +\infty)$ 内曲线单调递减并且仍为凸的, 因此 $f'(x) < 0, f''(x) < 0$, 故选 (C).

346 答案 (D).

因 $f'''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$, 由极限的保号性可知, 存在 $\delta > 0$, 当

$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$. 因此, 当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, $f''(x) < 0$; 当 $x_0 < x < x_0 + \delta$

时, $f''(x) > 0$. 所以 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 故选 (D).

可以进一步推导, 当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, $f'(x)$ 单减, 从而 $f'(x) > f'(x_0) = 0$.

当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, $f'(x)$ 单增, 从而 $f'(x) > f'(x_0) = 0$. 即在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内 $f(x)$ 单增, 故在 $x = x_0$ 不取得任何极值.

评注

一般地, 若 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$, 则 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 且 $f(x_0)$ 不是极值, 此结论可以直接使用.

347 答案 (D).

在 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$ 中, 令 $x = 0$ 得 $f''(0) = 0$. 原方程两边求导: $f'''(x) + 2f'(x)f''(x) = 1$, 令 $x = 0$, 得 $f'''(0) = 1 > 0$, 由 88 题评注知, $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 故选 (D).

348 答案 (D).

由 $y = f(x)$ 的图像 3-3 知, 当 $x < 0$ 时函数 $f(x)$ 单调递增, 故 $f'(x) > 0$, 因此排除 (A)(C); 当 $x > 0$ 时, $y = f(x)$ 由凸曲线变凹曲线, 因此 $f''(x)$ 由负变正, 即 $f'(x)$ 由单调递减变为单调递增, 因此可确定选 (D).

349 答案 (D).

x_0 是函数 $y = f(x)$ 的可导点, 且取得极值, 所以必为驻点, 即 $f'(x_0) = 0$, 又取得极大值, 所以 $f''(x_0) > 0$. 故选 (D). 选项 (C) 不全面.

评注

此题考查极值存在的必要条件和第二充分条件.

350 答案 极大值为 $f(0) = 1$; 极小值为 $f\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{7}{8}$.

(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

(2) 因 $f'(x) = 2 - x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x}}$, 可知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导; 令 $f'(x) = 0$ 得驻点为 $x = \frac{1}{8}$.

(3) 分割定义域讨论, 如下表所示.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{8})$	$\frac{1}{8}$	$(\frac{1}{8}, +\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	-	0	+
$f(x)$	↑	1 (极大值)	↓	$\frac{7}{8}$ (极小值)	↑

因此, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极大值 $f(0) = 1$; $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{8}$ 处取得极小值 $f\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{7}{8}$.

评注

此题利用第一充分条件判断极值, 解题方法与求函数的单调区间相同.

351 答案 $x = -\frac{1}{\ln 2}$.

因 $y' = 2^x + x \cdot 2^x \cdot \ln 2 = 2^x(1 + x \ln 2)$, 则可能为极值点的点只有驻点. 令 $y' = 2^x(1 + x \ln 2) = 0$, 得驻点 $x = -\frac{1}{\ln 2}$. 又 $y'' = 2^x \ln 2(2 + x \ln 2)$, 且 $y''\left(-\frac{1}{\ln 2}\right) = 2^{-\frac{1}{\ln 2}} \ln 2 > 0$, 因此当 $x = -\frac{1}{\ln 2}$ 时, 函数 $y = x \cdot 2^x$ 取得极小值.

评注

如果函数只有驻点(驻点可以有多个, 不存在不可导点), 且较易求出二阶导数, 则利用第二充分条件判断极值, 计算相对简单.

352 答案 (D).

由图 3-4 可知, 导函数为零的点(驻点)有三个, 导数不存在的点是 $x=0$. 根据第一充分条件, 判断这四个点两侧导数的正负, 可以判断存在两个极大值和两个极小值, 故选 (D).

353 答案 (A).

将 x_0 代入方程 $xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$, 并解出 $f''(x_0)$ 得

$$f''(x_0) = \frac{1 - e^{-x_0}}{x_0} - 3[f'(x_0)]^2 = \frac{1 - e^{-x_0}}{x_0} > 0 \quad (x_0 \neq 0),$$

由第二充分条件知, $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值, 故选 (A).

354 答案 (B).

因为 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续, 所以 $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$. 又 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x-a} = -1$, 故 $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = 0 \Rightarrow f'(a) = 0$, 则 $f''(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x-a} = -1 < 0$, 由第二充分条件可知, $x=a$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点. 故选 (B).

355 答案 (B).

由题设知 $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{x-a} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right) = -1$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = 0$.

若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \neq 0$, 又 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{x-a} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right) = \infty \neq -1$.

从而 $f'(a) = 0$, 排除 (A)(D). 由极限的保号性可知, 在 a 的某一去心邻域内有 $\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} < 0$,

即 $f(x) - f(a) < 0$, 由极大值的定义可知, $f(x)$ 在 $x=a$ 处取得极大值, 故选 (B).

356 答案 $f'(x) = \begin{cases} 2x^{2x}(1 + \ln x), & x > 0 \\ e^x(x+1), & x < 0 \end{cases}$, 极大值 $f(0) = 1$; 极小值 $f(-1) = 1 - e^{-1}$ 和 $f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2}{e}}$.

当 $x > 0$ 时, $f'(x) = (x^{2x})' = (e^{2x \ln x})' = x^{2x} (2 \ln x + 2) = 2x^{2x} (1 + \ln x)$.

当 $x < 0$ 时, $f'(x) = (xe^x + 1)' = e^x (x + 1)$.

当 $x = 0$ 时, 由导数的定义, 有

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x \ln x} - 1}{x} \stackrel{\text{等价代换}}{\sim} \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \ln x = -\infty$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 时不可

导, 于是 $f'(x) = \begin{cases} 2x^{2x}(1 + \ln x), & x > 0 \\ e^x(x + 1), & x < 0 \end{cases}$.

令 $f'(x) = 0$ 得驻点为 $x = -1$, $x = \frac{1}{e}$, 可能的极值点为 $x = 0$, $x = -1$, $x = \frac{1}{e}$.

列表讨论如下.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	不存在	-	0	+
$f(x)$	↓	$1 - e^{-1}$ (极小值)	↑	1(极大值)	↓	$(\frac{1}{e})^{\frac{2}{e}}$ (极小值)	↑

因此, 极小值为 $f(-1) = 1 - e^{-1}$, $f(\frac{1}{e}) = (\frac{1}{e})^{\frac{2}{e}}$; 极大值为 $f(0) = 1$.

357 答案 $x = 1$ 是驻点, $x = 1$ 是函数的极小值点.

方程两边对 x 求导数得 $3y^2 y' - 2yy' + xy' + y - x = 0$ ①

令 $y' = 0$ 得 $y = x$, 代入原方程求出驻点为 $x = 1$.

①两边再对 x 求导数得 $(3y^2 - 2y + x)y'' + 2(3y - 1)(y')^2 + 2y' - 1 = 0$ ②

将 $x = 1, y = 1, y'(1) = 0$ 代入, 得 $y''(1) = \frac{1}{2} > 0$, 故驻点 $x = 1$ 是函数的极小值点.

评注

此题为隐函数的极值判定问题, 直接方程两边求导(两遍), 不需要求出 y, y' 的表达式, 使得计算变简单.

58 答案 $-\frac{1}{3} \leq a \leq 0$.

显然 $f'(x) = 3x^2 + 6ax - a$, 不存在不可导点.

① 当 $\Delta = 12(3a^2 + a) < 0$, 即 $-\frac{1}{3} < a < 0$ 时, $f'(x) = 0$ 无解, 函数没有驻点, 亦无极值.

② 当 $\Delta = 12(3a^2 + a) = 0 \Rightarrow a = 0$ 或 $a = -\frac{1}{3}$.

当 $a = 0$ 时, $f'(x) = 3x^2 \geq 0 \Rightarrow f(x)$ 单增无极值.

当 $a = -\frac{1}{3}$ 时, $f'(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow f(x)$ 单增无极值.

③ 当 $\Delta = 12(3a^2 + a) > 0$ 时, $f'(x) = 0$ 有二不等实根, 函数有两个驻点且为极值.

综上所述, 当 $-\frac{1}{3} \leq a \leq 0$ 时函数无极值.

359 答案 最大值 $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}$; 最小值 $f(-5) = \sqrt{6} - 5$.

因 $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2\sqrt{1-x} - 1}{2\sqrt{1-x}}$, 可知 $x=1$ 是不可导点, $x = \frac{3}{4}$ 是驻点, 因此所有可能的最值点是 $x=1$, $x = \frac{3}{4}$, $x=-5$. 计算函数值得 $f(1)=1$, $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}$, $f(-5) = \sqrt{6} - 5$, 比较大小可知, 最大值为 $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}$, 最小值为 $f(-5) = \sqrt{6} - 5$.

360 答案 当 $h = 4r$ 时 V 最小, 最小值 $\frac{8\pi r^3}{3}$.

设圆锥底面半径为 R , 如图 360 题 - 图所示.

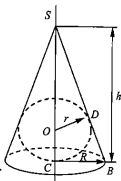
因为 $\frac{BC}{SC} = \frac{OD}{SD}$, 即 $\frac{R}{h} = \frac{r}{\sqrt{(h-r)^2 - r^2}}$, 从而

$$R = \frac{rh}{\sqrt{h^2 - 2hr}}, \text{ 于是锥体的体积 } V(h) = \frac{\pi}{3} R^2 h = \frac{\pi r^2 h^2}{3(h-2r)}, (2r < h < +\infty).$$

$$\text{令 } V'(h) = \frac{\pi r^2 h(h-4r)}{3(h-2r)^2} = 0, \text{ 得 } h = 4r \text{ 或 } h = 0 \text{ (舍)}.$$

因为圆锥体体积的最小值必存在, 且 $h = 4r$ 是 $V(h)$ 唯一的驻点, 因此当 $h = 4r$ 时 V 最小,

$$\text{最小值 } V(4r) = \frac{\pi r^2 (4r)^2}{3(4r-2r)} = \frac{8\pi r^3}{3}.$$



360 题 - 图

361 答案 当 $Q = 300$ 时利润最大, 最大利润为 $L(300) = 700$ (万元).

总利润函数为 $L(Q) = R(Q) - C(Q) = -0.01Q^2 + 6Q - 200$, 则 $L'(Q) = -0.02Q + 6$,

$L''(Q) = -0.02$. 令 $L'(Q) = -0.02Q + 6 = 0$, 得 $Q = 300$ (唯一驻点). 且 $L''(300) = -0.02 < 0$, 因此函数在 $Q = 300$ 时取得极大值. 因函数的极值点唯一, 故此极大值点就是最大值点, 即当 $Q = 300$ 时利润最大, 最大利润为 $L(300) = 700$.

362 答案 $L(x) = 18x - 3x^2 - 4x^3$, $R'(x) = 26 - 4x - 12x^2$, $C'(x) = 8 + 2x$, $x = 1$ 利润最大, 最大利润为 $L(1) = 11$.

总利润函数为 $L(x) = R(x) - C(x) = 18x - 3x^2 - 4x^3$, 边际收入函数为 $R'(x) = 26 - 4x - 12x^2$, 边际成本函数为 $C'(x) = 8 + 2x$. 由 $L'(x) = 18 - 6x - 12x^2 = 0$, 得 $x = 1, x = -1.5$ (舍). 又 $L''(x) = -6 - 24x, L''(1) = -30 < 0$, 因此利润函数在 $x = 1$ 时取得极大值, 即为最大值.

故当 $x = 1$ 时利润最大, 最大利润为 $L(1) = 11$.

363 解析 令 $f(x) = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q} - x$, 则 $f'(x) = x^{p-1} - 1$, $f''(x) = (p-1)x^{p-2}$.

令 $f'(x) = x^{p-1} - 1 = 0$, 得驻点 $x=1$. 又 $f''(1) = p-1 > 0$, 故当 $x=1$ 时, $f(x)$ 取得极小值, 也是最小值 $f(1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \stackrel{\text{已知}}{=} 0$. 所以, 对于任意 $x > 0$, $f(x) \geq f(1) = 0$, 即 $\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q} \geq x$.

364 解析 由于函数二阶可导, 因此 $f(x)$ 连续且一阶可导.

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 可知, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$, 从而 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.

令 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(0) = 0$. 因为 $F'(x) = f'(x) - 1$, $F''(x) = f''(x) > 0$, $F'(0) = f'(0) - 1 = 0$, $F''(0) = f''(0) > 0$, 故 $F(0)$ 是 $F(x)$ 的极小值.

又 $F'(x)$ 单增, 则 $F'(x)$ 仅有一个零点 $x=0$, 即 $F(x)$ 有唯一驻点, 从而 $F(0)$ 是 $F(x)$ 的最小值, 则 $F(x) \geq F(0) = 0$, 即 $f(x) \geq x$.

365 答案 $y=1$.

由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 1$, 因此 $y=1$ 是曲线的水平渐近线.

366 答案 $x=1$ 和 $x=-1$.

由于 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x^2} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{1-x^2} = \infty$, 因此 $x=1$ 和 $x=-1$ 是曲线的两条铅垂渐近线.

评注

曲线的铅垂渐近线就是函数的无穷间断点.

367 答案 水平渐近线为 $y=1$, 铅垂渐近线为 $x=1$.

由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = 1$, 因此 $y=1$ 是曲线的水平渐近线.

由于 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x-1} = \infty$, 因此 $x=1$ 是曲线的铅垂渐近线.

由于 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{x-1} = \frac{3}{2} \neq \infty$, 所以 $x=-1$ 不是曲线的铅垂渐近线.

368 答案 $y=x+1$.

由于 $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} [\frac{x^2}{x-1} - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1$.

因此, $y=x+1$ 是曲线的斜渐近线.

369 答案 铅垂渐近线 $x=0$; 斜渐近线 $y=2x+1$.

由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x-1)e^{\frac{1}{x}} = \infty$, 因此没有水平渐近线.

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x-1)e^{\frac{1}{x}} = \infty$, 所以 $x=0$ 是曲线的铅垂渐近线.

$$\text{由于 } a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x} = 2,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2x-1)e^{\frac{1}{x}} - 2x]$$

$$\stackrel{\text{令 } t = \frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(2-t)e^t - 2}{t} \stackrel{\text{洛必达}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-e^t + (2-t)e^t}{1} = \lim_{t \rightarrow 0} (1-t)e^t = 1.$$

因此, $y = 2x + 1$ 是曲线的斜渐近线.

评注

求曲线的铅垂渐近线时, 应注意 $x \rightarrow 0^+$, 而非 $x \rightarrow 0^-$ 或 $x \rightarrow 0$.

370 答案 (A).

由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$ (第一重要极限), 因此曲线有水平渐近线 $y = 1$;

又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0 \neq \infty$ (无穷小量的性质), 曲线没有铅垂渐近线. 故选 (A).

371 答案 (D).

由于 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ 都不存在, 故不存在水平渐近线;

因 $\lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{令 } t = \frac{1}{x^2}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2te^t}{1} = \infty$, 故存在铅垂渐近线 $x = 0$;

因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x^2}} = 1$, 即 $a = 1$,

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [xe^{\frac{1}{x^2}} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x^2}} - 1) \stackrel{\text{等价代换}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{1}{x^2} = 0,$$

所以, 存在斜渐近线 $y = x$. 故选 (D).

372 答案 (D).

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) \right] = 0$, 因此曲线有一条水平渐近线 $y = 0$;

又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) \right] = \infty$, 因此曲线有一条铅垂渐近线 $x = 0$;

$$\text{因 } a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{\ln(1 + e^x)}{x} \right] = 1 \neq 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1 + e^x) - \ln e^x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{1 + e^x}{e^x} \right] = 0,$$

故有一条斜渐近线 $y = x$. 总共有三条渐近线, 故选 (D).

373 答案 (C).

由 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} \arctan \frac{x^2 - x + 2}{(x-1)(x+2)} = \frac{\pi}{4}$, 得水平渐近线 $y = \frac{\pi}{4}$;

又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} \arctan \frac{x^2 - x + 2}{(x-1)(x+2)} = \infty$, 得铅垂渐近线 $x = 0$;

而当 $x \rightarrow 1$, $x \rightarrow -2$ 时, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq \infty$, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \neq \infty$, 所以 $x = 1$, $x = -2$ 不是铅垂渐近线;

由 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, 可知无斜渐近线. 因此曲线有 2 条渐近线, 故选 (C).

374 解析 (1) 函数的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

(2) 此函数非奇非偶、无周期性.

(3) 由于 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = \infty$, 故 $x = -1$ 是曲线的铅垂渐近线;

又 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2} = 1$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} (y-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1} = -5$, 故 $y = x - 5$ 是曲线的斜渐近线.

(4) 计算得 $y' = \frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$, $y'' = \frac{24(x-1)}{(x+1)^4}$.

当 $x_1 = -1$ 时, y', y'' 都不存在. 令 $y' = 0$ 得 $x_2 = -5, x_3 = 1$; 令 $y'' = 0$ 得 $x_4 = 1$.

(5) 列表如下所示.

x	$(-\infty, -5)$	-5	$(-5, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	+	0	-	不存在	+	0	+
y''	-	-	-	不存在	-	0	+
y	$\uparrow \cap$	-13.5 极大值	$\downarrow \cap$	间断	$\uparrow \cap$	(1, 0) 拐点	$\uparrow \cup$

(6) 曲线与坐标轴的交点 $(0, -1)$, $(1, 0)$, 极大值 $f(-5) = -13.5$.

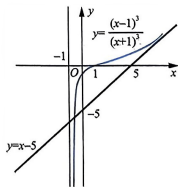
(7) 综合以上信息, 描绘出图形如 374 题 - 图所示.

75 解析 (1) 函数的定义域为 $x \neq \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, n = 0, 1, 2, \dots$.

(2) 函数是偶函数, 周期为 2π , 在 $[-\pi, \pi]$ 上关于 y 轴对称, 因此仅讨论 $[0, \pi]$ 的情况, 根据对称性得到一个周期 $[-\pi, \pi]$ 上的图像.

(3) 由于 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos 2x} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos 2x} = \infty$, 故 $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}$ 是曲线的铅垂渐近线; 无水平渐近线和斜渐近线.

(4) 计算得 $y' = \frac{\sin x(3 - 2\sin^2 x)}{\cos^2 2x}$, $y'' = \frac{\cos x(3 + 12\sin^2 x - 4\sin^4 x)}{\cos^3 2x}$,



374 题 - 图

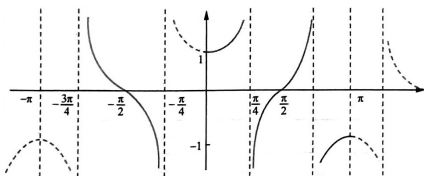
令 $y' = 0$ 得 $x_1 = 0, x_2 = \pi$; 令 $y'' = 0$ 得 $x_3 = \frac{\pi}{2}$; 在 $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}$ 处 y', y'' 都不存在.

(5) 列表如下所示.

x	0	$(0, \frac{\pi}{4})$	$\frac{\pi}{4}$	$(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$	$\frac{3\pi}{4}$	$(\frac{3\pi}{4}, \pi)$	π
y'	0	+	不存在	+	+	+	不存在	+	0
y''	+	+	不存在	-	0	+	不存在	-	-
y	1 极小值	$\uparrow \cup$	无定义	$\uparrow \cap$	$(\frac{\pi}{2}, 0)$ 拐点	$\uparrow \cup$	无定义	$\uparrow \cap$	-1 极大值

(6) 又曲线与坐标轴的交点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$, 极小值 $f(0) = 1$, 极大值 $f(\pi) = -1$.

(7) 综合以上信息作图如下.



375 题 - 图

376 答案 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由 $y = \frac{1}{x}$ 知 $y' = -\frac{1}{x^2}$, $y'' = \frac{2}{x^3}$, 代入曲率公式 (1), 得

$$\text{曲率 } K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left|\frac{2}{x^3}\right|}{\left[1+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \text{ 代入 } x=1, \text{ 得 } K = \frac{2}{(1+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

377 答案 $K = \frac{2}{|3a \sin 2t_0|}$, $\rho = \frac{|3a \sin 2t_0|}{2}$.

因为 $\varphi(t) = a \cos^3 t$, $\psi(t) = a \sin^3 t$, 计算得

$$\varphi'(t) = -3a \cos^2 t \sin t, \psi'(t) = 3a \sin^2 t \cos t, \varphi''(t) = 6a \cos t \sin^2 t - 3a \cos^3 t, \psi''(t) = 6a \sin t \cos^2 t - 3a \sin^3 t,$$

代入参数方程形式的曲率公式 (2), 得

$$K = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{|-9a^2 \sin^2 t \cos^2 t|}{[9a^2 \sin^2 t \cos^2 t]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{|3a \sin t \cos t|} = \frac{2}{|3a \sin 2t|}.$$

因此, 在点 t_0 处的曲率 $K = \frac{2}{|3a \sin 2t_0|}$, 曲率半径 $\rho = \frac{1}{K} = \frac{|3a \sin 2t_0|}{2}$.

378 答案 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$

由 $y' = 4x - 3$, $y'' = 4$, 得 $y'(1) = 1$, $y''(1) = 4$. 所以, 抛物线在 $M(1, 2)$ 处的曲率及曲率半径分别为

$$K|_{(1,2)} = \frac{|y''(1)|}{[1 + y'^2(1)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{(1+1)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{2}, \quad \rho = \frac{1}{K|_{(1,2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

因为曲率圆中心 $\alpha|_{(1,2)} = 1 - \frac{y'(1)(1 + y'^2(1))}{y''(1)} = \frac{1}{2}$, $\beta|_{(1,2)} = 2 + \frac{1 + y'^2(1)}{y''(1)} = \frac{5}{2}$.

则在 $M(1, 2)$ 处的曲率圆方程为: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$

379 答案 9.

由于 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $y'' = -\frac{1}{4\sqrt{x}^3}$, 因此抛物线在点 $M(x, y)$ ($x \geq 1$) 处的曲率半径为

$$\rho = \rho(x) = \frac{1}{K} = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = \frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}.$$

又抛物线上 AM 弧长为 $s = s(x) = \int_1^x \sqrt{1 + y'^2} dt = \int_1^x \sqrt{1 + \frac{1}{4t}} dt$, 则

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{\frac{d\rho}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{\left[\frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\right]'}{\left[\int_1^x \sqrt{1 + \frac{1}{4t}} dt\right]'} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times (4x+1)^{\frac{1}{2}} \times 4}{\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}} = 6\sqrt{x},$$

$$\frac{d^2\rho}{ds^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d\rho}{ds} \right) \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dx}} = \frac{6}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}} = \frac{6}{\sqrt{4x+1}},$$

因此, $3\rho \frac{d^2\rho}{ds^2} - \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}} \times \frac{6}{\sqrt{4x+1}} - 36x = 9.$

第4章 不定积分

380 答案 $-\frac{x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}.$

因为 $f(x) = [\ln(x + \sqrt{x^2-1})]' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$

故 $f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)' = -\frac{x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}.$

381 答案 (A).

因为 $\ln(ax) = \ln a + \ln x$, 与 $\ln x (x > 0)$ 差一个常数 $\ln a$, 所以选 (A).

评注

本题也可以将 4 个选项分别求导, 导函数是 $f(x)$ 的即为所求.

382 答案 $-\frac{\pi}{2}.$

因为 $(\arcsin(2x-1))' = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{4x-4x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}},$

$(2\arcsin\sqrt{x})' = 2 \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}},$

所以 $\arcsin(2x-1)$ 和 $2\arcsin\sqrt{x}$ 都是 $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的原函数.

设它们之间相差常数 C , 即 $\arcsin(2x-1) - 2\arcsin\sqrt{x} = C$, 令 $x=0$, 得

$\arcsin(-1) - 2\arcsin 0 = C$, 故 $C = -\frac{\pi}{2}.$

评注

函数的任何两个原函数之间只相差一个常数, 对于不同描述形式的原函数, 相差的常数可以通过取特定变量值来得到.

383 答案 不是.

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 + x + 1) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$ 不存在, 所以 $F(x)$ 在 $x=0$ 处不连续, 从而 $F(x)$ 在 $x=0$ 处不可导, 因此 $F(x)$ 不是 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的原函数.

评注

原函数与区间相联系. 在本题中, 因为当 $x > 0$ 时, 有 $F'(x) = f(x)$; 当 $x < 0$ 时, 有 $F'(x) = f(x)$; 因此, $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上和 $(0, +\infty)$ 上的原函数.

384 答案 (C).

因为 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 (a, b) 上的原函数, 所以 $F'(x) = f(x)$, 因此 $F(x)$ 在 (a, b) 上连续, 于是 $F(x)$ 在 (a, b) 上存在原函数, 从而 $f(x) + F(x)$ 在 (a, b) 上存在原函数. 故选 (C).

385 答案 (D).

由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = 1$,

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在, 即 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类跳跃间断点, 因此 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不存在原函数.

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = g(0)$, 故 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 从而 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在原函数. 因此选 (D).

评注

函数连续是原函数存在的充分条件, 而不是必要条件. 如果 $f(x)$ 在区间 I 上有第一类间断点和第二类无穷间断点, 则 $f(x)$ 在区间 I 上不存在原函数; 如果函数在区间 I 上仅仅具有第二类振荡间断点, 则有可能存在原函数.

386 答案 (B).

依题意, $f'(x) = \sin x$, 故 $f(x) = \int \sin x dx = -\cos x + C_1$, 所以

$$\int f(x) dx = \int (-\cos x + C_1) dx = -\sin x + C_1 x + C_2.$$

取 $C_1=0$, $C_2=1$, 得 $f(x)$ 的一个原函数为 $1 - \sin x$, 从而 $\int f(x) dx = 1 - \sin x + C$.

因此选 (B).

387 答案 $y = \frac{1}{2} \ln^2 x - \frac{3}{2}$.

设所求曲线的方程为 $y = f(x)$, 则依题意, $f'(x) = \frac{\ln x}{x}$, 即 $f(x)$ 是 $\frac{\ln x}{x}$ 的原函数.

由 $\left(\frac{1}{2} \ln^2 x\right)' = \frac{\ln x}{x}$ 知, $\frac{1}{2} \ln^2 x$ 是 $\frac{\ln x}{x}$ 的一个原函数, 因此, $\frac{\ln x}{x}$ 的所有原函数为 $f(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$, 即斜率为 $\frac{\ln x}{x}$ 的积分曲线簇方程为 $y = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$.

又因为所求曲线经过点 $(e, -1)$, 故将 $x=e, y=-1$ 代入方程, 得 $-1 = \frac{1}{2} \ln^2 e + C$, 解得

$$C = -\frac{3}{2}, \text{ 故所求曲线方程为 } y = \frac{1}{2} \ln^2 x - \frac{3}{2}.$$

评注

本题是用定义求出的原函数, 以后也可以用凑微分法求原函数, 读者可以自己试试.

388 答案 (D).

因为 $d\left(\int f'(x) dx\right) = d(f(x) + C) = f'(x) dx$, 故应选 (D).

389 答案 (D).

$$\text{由 } d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx, \left(\int f(x) dx\right)' = f(x), \int f'(x) dx = f(x) + C,$$

知, 选项 (A)(B)(C) 都不正确, 只有 (D) 正确, 故选 (D).

390 答案 (D).

因为 $f'(x) = g'(x)$, 所以 $f(x) = g(x) + C$, 而 (C) 与 (A) 是一样的, 故选项 (A)(B)(C) 都不正确, 只有 (D) 正确.

事实上, 对等式两边同时积分, 得 $\int f'(x)dx = \int g'(x)dx$, 即 $\int df(x) = \int dg(x)$, 因此 (D) 正确.

391 答案 $f(x) + C$.

因为 $\int df(x) = f(x) + C$, 所以 $d\left[\int df(x)\right] = d[f(x) + C] = df(x)$, 于是

$$\int d\left[\int df(x)\right] = \int df(x) = f(x) + C.$$

392 答案 $-\ln(1-x) - x^2 + C$.

$f'(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x = 1 - 2\sin^2 x + \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$, 令 $\sin^2 x = t$, 则

$$f'(t) = 1 - 2t + \frac{t}{1-t} = \frac{1}{1-t} - 2t, \text{ 于是 } f(t) = \int \left(\frac{1}{1-t} - 2t \right) dt = -\ln(1-t) - t^2 + C,$$

故 $f(x) = -\ln(1-x) - x^2 + C$.

393 答案 $\frac{1}{2}x^2 - \ln|x| - 3\arcsin x + C$.

$$\begin{aligned} \int \frac{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}-3x}{x\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \left(x - \frac{1}{x} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\ &= \int x dx - \int \frac{1}{x} dx - 3 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2}x^2 - \ln|x| - 3\arcsin x + C. \end{aligned}$$

394 答案 $-\cot x - \tan x + C$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx &= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int (\csc^2 x - \sec^2 x) dx \\ &= \int \csc^2 x dx - \int \sec^2 x dx = -\cot x - \tan x + C. \end{aligned}$$

395 答案 $-\frac{1}{2}\cot x + \csc x + C$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1-2\cos x}{1-\cos 2x} dx &= \int \frac{1-2\cos x}{2\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{2}\csc^2 x - \csc x \cot x \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \csc^2 x dx - \int \csc x \cot x dx = -\frac{1}{2}\cot x + \csc x + C. \end{aligned}$$

396 答案 $\frac{5^x e^{-x}}{\ln 5 - 1} + x - e^x + C$.

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{5^{-x}e^x} + \frac{1-e^{2x}}{1+e^x} \right) dx &= \int \left[\left(\frac{5}{e} \right)^x + \frac{(1-e^x)(1+e^x)}{(1+e^x)} \right] dx \\ &= \int \left[\left(\frac{5}{e} \right)^x + 1 - e^x \right] dx = \int \left(\frac{5}{e} \right)^x dx + \int 1 dx - \int e^x dx = \frac{5^x e^{-x}}{\ln 5 - 1} + x - e^x + C. \end{aligned}$$

397 答案 $4x\sqrt{x} + 5e^x + \frac{1}{2}(x + \sin x) + C.$

$$\begin{aligned}\int \left(6\sqrt{x} + 5e^x + \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx &= 6 \int x^{\frac{1}{2}} dx + 5 \int e^x dx + \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) dx \\ &= 6 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 5e^x + \frac{1}{2}(x + \sin x) + C = 4x\sqrt{x} + 5e^x + \frac{1}{2}(x + \sin x) + C.\end{aligned}$$

398 答案 $\frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x - 2\arcsin x + C.$

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{x^4}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx &= \int \left(\frac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\ &= \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x - 2\arcsin x + C.\end{aligned}$$

评注

通过简单的恒等变形, 将积分转化为用基本积分公式是求不定积分的最基本的技巧.

399 答案 (1) $\sqrt{2x+3} + C.$ (2) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + C.$

$$(3) \frac{1}{4}\ln|2x+3| + \frac{3}{4(2x+3)} + C.$$

$$(1) \int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+3)'}{\sqrt{2x+3}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x+3)}{\sqrt{2x+3}} = \sqrt{2x+3} + C.$$

$$\begin{aligned}(2) \int \frac{x+1}{x^2+2x+5} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+2x+5)'}{x^2+2x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+5) + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \int \frac{x dx}{(2x+3)^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{(2x+3)-3}{(2x+3)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{2x+3} dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{(2x+3)^2} dx \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{d(2x+3)}{2x+3} - \frac{3}{4} \int \frac{d(2x+3)}{(2x+3)^2} = \frac{1}{4} \ln|2x+3| + \frac{3}{4(2x+3)} + C.\end{aligned}$$

400 答案 (1) $e^{2\sqrt{x}} + C.$ (2) $-2\cos\sqrt{x} + C.$ (3) $2\arctan\sqrt{x} + C.$

$$\begin{aligned}(1) \int \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \int e^{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int e^{2\sqrt{x}} (2\sqrt{x})' dx \\ &= \int e^{2\sqrt{x}} d2\sqrt{x} = e^{2\sqrt{x}} + C.\end{aligned}$$

$$(2) \int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \sin\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \sin\sqrt{x} d\sqrt{x} = -2\cos\sqrt{x} + C.$$

$$(3) \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2 \int \frac{(\sqrt{x})' dx}{1+(\sqrt{x})^2} = 2 \int \frac{d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} = 2\arctan\sqrt{x} + C.$$

401 答案 (1) $\frac{1}{3}e^{x^3} + C$. (2) $\frac{1}{2}\arctan x^2 + C$.

(3) $\frac{1}{6(1-n)(2x^3-1)^{n-1}} + C$. (4) $\frac{1}{4}[f(x^2)]^2 + C$.

(1) $\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3} (x^3)' dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3} dx^3 = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$.

(2) $\int \frac{x dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2)' dx}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2} \arctan x^2 + C$.

(3) $\int \frac{x^2 dx}{(2x^3-1)^n} = \frac{1}{6} \int \frac{(2x^3-1)' dx}{(2x^3-1)^n} = \frac{1}{6} \int \frac{d(2x^3-1)}{(2x^3-1)^n} = \frac{1}{6(1-n)(2x^3-1)^{n-1}} + C$.

(4) $\int x f(x^2) f'(x^2) dx = \frac{1}{2} \int f(x^2) f'(x^2) dx^2 = \frac{1}{2} \int f(x^2) df(x^2) = \frac{1}{4} [f(x^2)]^2 + C$.

402 答案 (1) $\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$. (2) $-\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C$.

(3) $-\frac{1}{3}\csc^3 x + \csc x + C$. (4) $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C$.

(1) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{4} \int (1-\cos^2 2x) dx$
 $= \frac{1}{4} \int \left(1 - \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx = \frac{1}{8} \int (1-\cos 4x) dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32} \int \cos 4x d4x$
 $= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$.

(2) $\int \sin^5 x \cdot \cos^2 x dx = \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x \cdot \sin x dx = -\int (1-\cos^2 x)^2 \cdot \cos^2 x d\cos x$
 $= -\int (\cos^2 x - 2\cos^4 x + \cos^6 x) d\cos x = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C$.

(3) $\int \cot^3 x \csc x dx = \int \cot^2 x \cdot \cot x \csc x dx = -\int \cot^2 x \cdot (\csc x)' dx$
 $= -\int (\csc^2 x - 1) d\csc x = -\frac{1}{3}\csc^3 x + \csc x + C$.

(4) $\int \sin 5x \sin 3x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 8x) dx = \frac{1}{4} \int \cos 2x d2x - \frac{1}{16} \int \cos 8x d8x$
 $= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C$.

403 答案 (1) $\frac{1}{a}\arctan \frac{x}{a} + C$. (2) $\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$.

(1) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{dx}{a^2 \left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{a} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} d\frac{x}{a} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$.

(2) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \int \frac{(a+x)+(a-x)}{(a+x)(a-x)} dx = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right) dx$

$$= \frac{1}{2a} \left[\int \frac{d(a+x)}{a+x} - \int \frac{d(a-x)}{a-x} \right] = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$

404 答案 (1) $e^{\tan x} + C$. (2) $e^{\frac{1}{x}} + C$.

$$(1) \int e^{\tan x} \sec^2 x dx = \int e^{\tan x} (\tan x)' dx = \int e^{\tan x} d \tan x = e^{\tan x} + C.$$

$$(2) \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} dx = \int e^{\frac{1}{x}} \left(x + \frac{1}{x}\right)' dx = \int e^{\frac{1}{x}} d\left(x + \frac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}} + C.$$

405 答案 (1) $\arcsin(\ln x) + C$. (2) $-\frac{1}{1 + \ln \ln x} + C$. (3) $\arctan(x \ln x) + C$.

$$(1) \int \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}} = \int \frac{(\ln x)' dx}{\sqrt{1 - \ln^2 x}} = \int \frac{d \ln x}{\sqrt{1 - \ln^2 x}} = \arcsin(\ln x) + C.$$

$$(2) \int \frac{dx}{x \ln x (1 + \ln \ln x)^2} = \int \frac{(1 + \ln \ln x)' dx}{(1 + \ln \ln x)^2} = \int \frac{d(1 + \ln \ln x)}{(1 + \ln \ln x)^2} = -\frac{1}{1 + \ln \ln x} + C.$$

$$(3) \int \frac{1 + \ln x}{1 + x^2 \ln^2 x} dx = \int \frac{(x \ln x)'}{1 + x^2 \ln^2 x} dx = \int \frac{d(x \ln x)}{1 + (x \ln x)^2} = \arctan(x \ln x) + C.$$

406 答案 (1) $-\frac{1}{\arcsin x} + C$. (2) $(\arcsin \sqrt{x})^2 + C$. (3) $-\frac{1}{2}[\arcsin(1-x)]^2 + C$.

$$(1) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} (\arcsin x)^2} = \int \frac{d(\arcsin x)}{(\arcsin x)^2} = -\frac{1}{\arcsin x} + C.$$

$$\begin{aligned} (2) \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx &= \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} d\sqrt{x} \\ &= 2 \int \arcsin \sqrt{x} d(\arcsin \sqrt{x}) = (\arcsin \sqrt{x})^2 + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int \frac{\arcsin(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}} dx &= \int \frac{\arcsin(1-x)}{\sqrt{1-(1-x)^2}} dx = -\int \arcsin(1-x) [\arcsin(1-x)]' dx \\ &= -\int \arcsin(1-x) d[\arcsin(1-x)] = -\frac{1}{2}[\arcsin(1-x)]^2 + C. \end{aligned}$$

407 答案 $2 \arcsin \sqrt{x} + C$, 或者 $\arcsin(2x-1) + C$.

方法一: 直接凑微分.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = 2 \arcsin \sqrt{x} + C.$$

方法二: 先配方, 再凑微分.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \int \frac{2dx}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \int \frac{d(2x-1)}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \arcsin(2x-1) + C.$$

评注

同一个不定积分, 用不同的方法凑微分, 积分结果可能不同.

408 答案 $\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{\sin x}{3}\right) + C.$

$$\int \frac{\cos x}{9 + \sin^2 x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{3^2 + \sin^2 x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{3^2 + \sin^2 x} = \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{\sin x}{3}\right) + C.$$

评注

本题利用了公式 $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$.

409 答案 $\frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{3} + \frac{1}{4} \sqrt{9 - 4x^2} + C.$

$$\begin{aligned} \int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}} dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} - \int \frac{xdx}{\sqrt{9-4x^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{3} + \frac{1}{8} \int \frac{d(9-4x^2)}{\sqrt{9-4x^2}} \\ &= \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{3} + \frac{1}{4} \sqrt{9-4x^2} + C. \end{aligned}$$

评注

本题利用了公式 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.

410 答案 $\frac{3}{2} \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} + C.$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx &= \int \frac{(\sin x - \cos x)'}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx = \int \frac{d(\sin x - \cos x)}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} + C. \end{aligned}$$

411 答案 $\ln |\cos(\sqrt{1-x^2})| + C.$

$$\begin{aligned} \int \frac{x \tan(\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}} dx &= - \int \tan(\sqrt{1-x^2}) (\sqrt{1-x^2})' dx \\ &= - \int \tan(\sqrt{1-x^2}) d(\sqrt{1-x^2}) = \ln |\cos(\sqrt{1-x^2})| + C. \end{aligned}$$

评注

本题利用了公式 $\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$.

412 答案 $\frac{2}{3} [\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 1]^{\frac{3}{2}} + C.$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 1}{1+x^2}} dx &= \int \sqrt{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \int \sqrt{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 1} [\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 1]' dx \\ &= \int \sqrt{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 1} d[\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 1] = \frac{2}{3} [\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 1]^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

413 答案 $2e^{\sqrt{1+\sin x}} + C.$

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{\sqrt{1+\sin x}} \cos x}{\sqrt{1+\sin x}} dx &= \int e^{\sqrt{1+\sin x}} \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} dx = 2 \int e^{\sqrt{1+\sin x}} (\sqrt{1+\sin x})' dx \\ &= 2 \int e^{\sqrt{1+\sin x}} d\sqrt{1+\sin x} = 2e^{\sqrt{1+\sin x}} + C.\end{aligned}$$

414 答案 $\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{3} (\arctan x)^3 + C.$

$$\begin{aligned}\int \frac{x + (\arctan x)^2}{1+x^2} dx &= \int \frac{x}{1+x^2} dx + \int \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} + \int (\arctan x)^2 d(\arctan x) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{3} (\arctan x)^3 + C.\end{aligned}$$

415 答案 $-\frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{2} \ln(1+\cos^2 x) + C.$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} dx &= \int \frac{\cos^2 x \cdot \sin x \cos x}{1+\cos^2 x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x} d(\cos^2 x) \\ &= -\frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+\cos^2 x}\right) d(\cos^2 x) = -\frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{2} \ln(1+\cos^2 x) + C.\end{aligned}$$

416 答案 $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + C.$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} &= \int \frac{dx}{\cos^2 x (\tan^2 x + 2)} = \int \frac{\sec^2 x dx}{\tan^2 x + 2} \\ &= \int \frac{d\tan x}{\tan^2 x + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + C.\end{aligned}$$

评注

本题用了公式 $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$

417 答案 $x - \ln(1+e^x) + C.$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+e^x} &= \int \frac{dx}{e^x(1+e^{-x})} = \int \frac{e^{-x} dx}{1+e^{-x}} = -\int \frac{(1+e^{-x})' dx}{1+e^{-x}} = -\int \frac{d(1+e^{-x})}{1+e^{-x}} \\ &= -\ln(1+e^{-x}) + C = -\ln \frac{1+e^x}{e^x} + C = x - \ln(1+e^x) + C.\end{aligned}$$

418 答案 $-\frac{1}{2} \ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right) + C.$

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(x+1) - \ln x}{x(x+1)} dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) [\ln(x+1) - \ln x] dx \\ &= -\int [\ln(x+1) - \ln x] d[\ln(x+1) - \ln x] = -\frac{1}{2} [\ln(x+1) - \ln x]^2 + C\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \ln^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right) + C.$$

419 答案 $\ln x - \arctan(\ln x) + C.$

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln^2 x}{x(1+\ln^2 x)} dx &= \int \frac{\ln^2 x}{1+\ln^2 x} d\ln x = \int \frac{1+\ln^2 x-1}{1+\ln^2 x} d\ln x \\ &= \int \left(1 - \frac{1}{1+\ln^2 x} \right) d\ln x = \ln x - \int \frac{d\ln x}{1+\ln^2 x} = \ln x - \arctan(\ln x) + C. \end{aligned}$$

420 答案 $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}(x^2-1)\sqrt{x^2-1} + C.$

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{x-\sqrt{x^2-1}} &= \int \frac{x(x+\sqrt{x^2-1})}{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})} dx = \int x^2 dx + \int x\sqrt{x^2-1} dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2-1} d(x^2-1) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}(x^2-1)\sqrt{x^2-1} + C. \end{aligned}$$

421 答案 $-\frac{1}{4}e^{\sin 2x-2x} + C.$

因为 $(\sin 2x-2x)' = 2\cos 2x-2 = -2(1-\cos 2x) = -4\sin^2 x$, 故

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{\sin 2x} \sin^2 x}{e^{2x}} dx &= \int e^{\sin 2x-2x} \sin^2 x dx = -\frac{1}{4} \int e^{\sin 2x-2x} \cdot (\sin 2x-2x)' dx \\ &= -\frac{1}{4} \int e^{\sin 2x-2x} \cdot d(\sin 2x-2x) = -\frac{1}{4} e^{\sin 2x-2x} + C. \end{aligned}$$

422 答案 $\frac{1}{4}(\ln \tan x)^2 + C.$

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln \tan x}{\sin 2x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{\ln \tan x}{\sin x \cos x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\ln \tan x}{\tan x} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\ln \tan x}{\tan x} d \tan x \\ &= \frac{1}{2} \int \ln \tan x d(\ln \tan x) = \frac{1}{4} (\ln \tan x)^2 + C. \end{aligned}$$

423 答案 $\frac{1}{1-x \tan x} + C.$

$$\begin{aligned} \int \frac{x + \sin x \cos x}{(\cos x - x \sin x)^2} dx &= \int \frac{x + \tan x \cos^2 x}{\cos^2 x (1-x \tan x)^2} dx = \int \frac{x \sec^2 x + \tan x}{(1-x \tan x)^2} dx \\ &= \int \frac{d(x \tan x)}{(1-x \tan x)^2} = - \int \frac{d(1-x \tan x)}{(1-x \tan x)^2} = \frac{1}{1-x \tan x} + C. \end{aligned}$$

424 答案 $\ln \left| \frac{e^{\sin x} \cos x}{1 + e^{\sin x} \cos x} \right| + C.$

因为 $(e^{\sin x} \cos x)' = e^{\sin x} \cdot \cos x \cos x + e^{\sin x} (-\sin x) = e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x)$,

$$\begin{aligned} \text{所以} \int \frac{\cos^2 x - \sin x}{\cos x (1 + e^{\sin x} \cos x)} dx &= \int \frac{e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x)}{e^{\sin x} \cos x (1 + e^{\sin x} \cos x)} dx \\ &= \int \frac{(e^{\sin x} \cos x)'}{e^{\sin x} \cos x (1 + e^{\sin x} \cos x)} dx = \int \frac{d(e^{\sin x} \cos x)}{e^{\sin x} \cos x (1 + e^{\sin x} \cos x)} \end{aligned}$$

$$\frac{e^{\sin x} \cos x}{t(1+t)} dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) dt = \ln \left| \frac{t}{1+t} \right| + C \stackrel{t=e^{\sin x} \cos x}{=} \ln \left| \frac{e^{\sin x} \cos x}{1+e^{\sin x} \cos x} \right| + C.$$

425 答案 $\frac{e^x \sin x}{1+\cos x} + C.$

$$\text{因为} \left(\frac{\sin x}{1+\cos x} \right)' = \frac{\cos x \cdot (1+\cos x) - \sin x \cdot (-\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x},$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \int \frac{(1+\sin x)e^x}{1+\cos x} dx &= \int \left(\frac{\sin x}{1+\cos x} e^x + \frac{1}{1+\cos x} e^x \right) dx \\ &= \int \left[\frac{\sin x}{1+\cos x} (e^x)' + \left(\frac{\sin x}{1+\cos x} \right)' e^x \right] dx = \int \left(\frac{\sin x}{1+\cos x} e^x \right)' dx = \frac{e^x \sin x}{1+\cos x} + C. \end{aligned}$$

426 答案 $-\frac{1}{2} \ln \sin(1-x^2) + C.$

$$\begin{aligned} \int x f(1-x^2) dx &= \frac{1}{2} \int f(1-x^2) dx^2 = -\frac{1}{2} \int f(1-x^2) d(1-x^2) \\ &\stackrel{1-x^2=u}{=} -\frac{1}{2} \int f(u) du = -\frac{1}{2} \ln \sin u + C \stackrel{u=1-x^2}{=} -\frac{1}{2} \ln \sin(1-x^2) + C. \end{aligned}$$

427 证明 因为 $\left(\frac{f(x)}{x} \right)' = \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2},$

$$\begin{aligned} \text{所以} \int \frac{x f'(x) - (1+x)f(x)}{x^2 e^x} dx &= \int \left(\frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2} - \frac{f(x)}{x} \right) e^{-x} dx \\ &= \int \left[\left(\frac{f(x)}{x} \right)' e^{-x} + \frac{f(x)}{x} (e^{-x})' \right] dx = \int \left(\frac{f(x)}{x} e^{-x} \right)' dx = \frac{f(x)}{x} e^{-x} + C. \end{aligned}$$

428 答案 $\frac{1}{5}(\sqrt{4-x^2})^5 - \frac{4}{3}(\sqrt{4-x^2})^3 + C.$

令 $x = 2 \sin t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 则 $\sqrt{4-x^2} = 2 \cos t$, $dx = 2 \cos t dt$,

$$\begin{aligned} \int x^3 \sqrt{4-x^2} dx &= \int 8 \sin^3 t \cdot 2 \cos t \cdot 2 \cos t dt = 32 \int \sin^2 t \cos^2 t \cdot \sin t dt \\ &= 32 \int (\cos^2 t - 1) \cos^2 t d \cos t = 32 \int (\cos^4 t - \cos^2 t) d \cos t = \frac{32}{5} \cos^5 t - \frac{32}{3} \cos^3 t + C \\ &= \frac{1}{5}(\sqrt{4-x^2})^5 - \frac{4}{3}(\sqrt{4-x^2})^3 + C. \end{aligned}$$



428 题 - 图

评注

(1) 本题也可以作余弦代换 $x = 2 \cos t$, 或者凑微分.

(2) 在求出关于 t 的积分后, 可根据所作变换 $x = 2 \sin t$ 作辅助直角三角形: 以 t 为锐角, 对边为 x , 斜边为 2, 则邻边为 $\sqrt{4-x^2}$, 由此求得 $\cos t = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$.

429 答案 $\ln \left| \sqrt{x^2+1} + x \right| - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.$

令 $x = \tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 则 $\sqrt{x^2+1} = \sec t$, $dx = \sec^2 t dt$, 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}} &= \int \frac{\tan^2 t \cdot \sec^2 t dt}{\sec^3 t} = \int \frac{\tan^2 t}{\sec t} dt = \int \frac{\sec^2 t - 1}{\sec t} dt \\ &= \int (\sec t - \cos t) dt = \ln |\sec t + \tan t| - \sin t + C \\ &= \ln \left| \sqrt{x^2+1} + x \right| - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.\end{aligned}$$



429 题 - 图

430 答案 $\ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| - \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} + C.$

令 $x = a \sec t$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$, 则 $\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan t$, $dx = a \sec t \tan t dt$,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}} &= \int \frac{a^2 \sec^2 t \cdot a \sec t \tan t dt}{a^3 \tan^3 t} = \int \frac{\sec^3 t}{\tan^2 t} dt = \int \frac{1}{\sin^2 t \cos t} dt \\ &= \int \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t \cos t} dt = \int \frac{1}{\cos t} dt + \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = \int \sec t dt + \int \frac{d \sin t}{\sin^2 t} \\ &= \ln |\sec t + \tan t| - \frac{1}{\sin t} + C_1 = \ln \left| \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| - \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} + C_1 \\ &= \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| - \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} + C, \text{ 其中 } C = C_1 - \ln a.\end{aligned}$$



430 题 - 图

431 答案 $\frac{3}{2} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - 2\sqrt[3]{x+1} + 2 \ln |1 + \sqrt[3]{x+1}| \right) + C.$

令 $\sqrt[3]{x+1} = t$, 则 $x = t^3 - 1$, $dx = 3t^2 dt$, 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}} &= \int \frac{3t^2 dt}{1+t} = 3 \int \frac{(t^2-1)+1}{1+t} dt = 3 \int \left(t-1 + \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= 3 \left(\frac{1}{2} t^2 - t + \ln |1+t| \right) + C = \frac{3}{2} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - 2\sqrt[3]{x+1} + 2 \ln |1 + \sqrt[3]{x+1}| \right) + C.\end{aligned}$$

432 答案 $3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln |1 + \sqrt[6]{x}| + C.$

令 $\sqrt[6]{x} = t (t > 0)$, 则 $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$, 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}} &= \int \frac{6t^5}{t^3 + t^4} dt = 6 \int \frac{t^2}{1+t} dt = 6 \int \frac{(t^2-1)+1}{1+t} dt \\ &= 6 \int \left(t-1 + \frac{1}{1+t} \right) dt = 6 \left(\frac{1}{2} t^2 - t + \ln |1+t| \right) + C = 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln |1 + \sqrt[6]{x}| + C.\end{aligned}$$

433 答案 $\ln \left| \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{5-x}} \right| - 2 \arctan \sqrt{\frac{5-x}{x-1}} + C.$

令 $\sqrt{\frac{5-x}{x-1}} = t (t > 0)$, 则 $x = 1 + \frac{4}{1+t^2}$, $dx = -\frac{8t}{(1+t^2)^2} dt$, 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3-x} \sqrt{\frac{5-x}{x-1}} dx &= \int \frac{1+t^2}{2(t^2-1)} \cdot t \cdot \frac{-8t}{(t^2+1)^2} dt = 4 \int \frac{t^2}{(1-t^2)(1+t^2)} dt \\ &= 2 \int \left(\frac{1}{1-t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right) dt = \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - 2 \arctan t + C = \ln \left| \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{5-x}} \right| - 2 \arctan \sqrt{\frac{5-x}{x-1}} + C. \end{aligned}$$

评注

本题用到了 $\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$.

434 答案 $\ln(1+e^x) - e^{-x} - x + C$.

令 $e^x = t$, 则 $x = \ln t$, $dx = \frac{1}{t} dt$, 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{e^x + e^{2x}} &= \int \frac{1}{t+t^2} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{t^2 + (1-t^2)}{t^2(1+t)} dt = \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} \right) dt \\ &= \ln(1+t) - \frac{1}{t} - \ln t + C = \ln(1+e^x) - \frac{1}{e^x} - \ln e^x + C = \ln(1+e^x) - e^{-x} - x + C. \end{aligned}$$

435 答案 $\ln \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} + C$.

令 $\sqrt{e^x+1} = t$, 则 $x = \ln(t^2-1)$, $dx = \frac{2t}{t^2-1} dt$, 于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{2t}{t^2-1} dt = 2 \int \frac{1}{t^2-1} dt = \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \ln \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} + C.$$

评注

本题用到了 $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$.

436 答案 $\ln|x| - \frac{1}{6} \ln(x^6+1) + C$.

令 $\frac{1}{x} = t$, 则 $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2} dt$, 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(x^6+1)} &= \int \frac{t}{\frac{1}{t^6}+1} \left(-\frac{1}{t^2} \right) dt = - \int \frac{t^5}{1+t^6} dt = -\frac{1}{6} \int \frac{d(1+t^6)}{1+t^6} \\ &= -\frac{1}{6} \ln|1+t^6| + C = -\frac{1}{6} \ln|1+\frac{1}{x^6}| + C = \ln|x| - \frac{1}{6} \ln(x^6+1) + C. \end{aligned}$$

评注

本题也可以用凑微分法.

437 答案 $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{3x^3} \sqrt{(1+x^2)^3} + C$.

令 $\frac{1}{x} = t$, 则 $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2} dt$, 于是

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2+1}} &= \int \frac{t^4}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -\int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} dt^2 \\
 &= -\frac{1}{2} \int \frac{1+t^2-1}{\sqrt{1+t^2}} dt^2 = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \sqrt{1+t^2} \right) d(1+t^2) \\
 &= \sqrt{1+t^2} - \frac{1}{3} \sqrt{(1+t^2)^3} + C = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{3x^3} \sqrt{(1+x^2)^3} + C.
 \end{aligned}$$

评注

本题也可以作三角代换.

438 答案 $\ln|x + \ln x| + C.$

令 $\ln x = t$, 则 $x = e^t$, $dx = e^t dt$, 于是

$$\int \frac{1+x}{x^2 + x \ln x} dx = \int \frac{1+e^t}{e^{2t} + te^t} e^t dt = \int \frac{1+e^t}{e^t + t} dt = \int \frac{d(e^t + t)}{e^t + t} = \ln|e^t + t| + C = \ln|x + \ln x| + C.$$

439 答案 $\frac{1}{2} [\arcsin(x-1) + (x-1)\sqrt{2x-x^2}] + C.$

令 $x-1 = \sin t$, 则 $\sqrt{2x-x^2} = \cos t$, $dx = \cos t dt$, 则

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{2x-x^2} dx &= \int \sqrt{1-(x-1)^2} dx = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt \\
 &= \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t + C = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \sin t \cos t + C \\
 &= \frac{1}{2} [\arcsin(x-1) + (x-1)\sqrt{2x-x^2}] + C.
 \end{aligned}$$



439 题 - 图

440 答案 $-\ln|\sqrt{1+e^{-2x}} + e^{-x}| + C.$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \int \frac{dx}{e^x \sqrt{1+e^{-2x}}} = -\int \frac{de^{-x}}{\sqrt{1+(e^{-x})^2}}$$

令 $e^{-x} = \tan t$, 则 $\sqrt{1+(e^{-x})^2} = \sec t$, $de^{-x} = d \tan t = \sec^2 t dt$, 于是

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} &= -\int \frac{\sec^2 t dt}{\sec t} = -\int \sec t dt = -\ln|\sec t + \tan t| + C \\
 &= -\ln|\sqrt{1+e^{-2x}} + e^{-x}| + C.
 \end{aligned}$$



440 题 - 图

441 答案 $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}} \right) + C.$

令 $x = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 则 $\sqrt{1-x^2} = \cos t$, $dx = \cos t dt$, 则

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{\cos t dt}{(1+\sin^2 t)\cos t} = \int \frac{dt}{1+\sin^2 t} = \int \frac{\sec^2 t dt}{\sec^2 t + \tan^2 t} = \int \frac{d \tan t}{1+2 \tan^2 t} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2} \tan t)}{1+(\sqrt{2} \tan t)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan t) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}} \right) + C.
 \end{aligned}$$



441 题 - 图

442 答案 (1) $\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$. (2) $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$.

(3) $(-x^2 + x + 2)\cos x + (2x - 1)\sin x + C$.

(1) $\int xe^{2x} dx = \frac{1}{2} \int x d(e^{2x}) = \frac{1}{2} (xe^{2x} - \int e^{2x} dx) = \frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$.

(2) $\int x^2 \cos x dx = \int x^2 d(\sin x) = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx = x^2 \sin x + 2 \int x d(\cos x)$
 $= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$.

(3) $\int (x^2 - x) \sin x dx = - \int (x^2 - x) d \cos x = -(x^2 - x) \cos x + \int (2x - 1) \cos x dx$
 $= -(x^2 - x) \cos x + \int (2x - 1) d \sin x = -(x^2 - x) \cos x + (2x - 1) \sin x - \int 2 \sin x dx$
 $= (-x^2 + x + 2) \cos x + (2x - 1) \sin x + C$.

443 答案 (1) $-x \cot x + \ln |\sin x| + C$. (2) $x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + C$.

(3) $x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$.

(1) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx = \int x \csc^2 x dx = - \int x d \cot x = -x \cot x + \int \cot x dx$
 $= -x \cot x + \ln |\sin x| + C$.

(2) $\int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \int x \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}\right) dx$
 $= x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 1}}$
 $= x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + C$.

(3) $\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1 + x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1 + x^2)}{1 + x^2}$
 $= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$.

44 答案 (1) $\frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^{-x} + C$. (2) $-x \cot x + \ln |\sin x| - \frac{1}{2}x^2 + C$.

(3) $x \cos x \ln x + \sin x - (1 + \sin x) \ln x + C_1$.

(1) $\int e^{-x} \cos x dx = - \int \cos x d e^{-x} = -e^{-x} \cos x + \int e^{-x} (-\sin x) dx$
 $= -e^{-x} \cos x + \int \sin x d e^{-x} = -e^{-x} \cos x + e^{-x} \sin x - \int e^{-x} \cos x dx$,
 故 $\int e^{-x} \cos x dx = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^{-x} + C$.

(2) $\int x \cot^2 x dx = \int x (\csc^2 x - 1) dx = \int x \csc^2 x dx - \int x dx = - \int x d \cot x - \frac{1}{2}x^2$
 $= -x \cot x + \int \cot x dx - \frac{1}{2}x^2 = -x \cot x + \ln |\sin x| - \frac{1}{2}x^2 + C$.

(3) 依题意, $f(x) = [(1 + \sin x) \ln x + C]' = \cos x \ln x + \frac{1 + \sin x}{x}$, 故

$$\int x f'(x) dx = \int x df(x) = x f(x) - \int f(x) dx = x \cos x \ln x + \sin x - (1 + \sin x) \ln x + C_1,$$

其中 $C_1 = 1 - C$.

445 答案 $\frac{1}{2} x^2 \ln(x+1) - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C.$

$$\begin{aligned} \int x \ln(x+1) dx &= \int \ln(x+1) d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x+1} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int \left(x-1 + \frac{1}{x+1}\right) dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(x+1) - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

446 答案 $(x+1) \arcsin(x+1) + \sqrt{-x^2-2x} + C.$

$$\begin{aligned} \int \arcsin(x+1) dx &\stackrel{x+1=t}{=} \int \arcsin t dt = t \arcsin t - \int t \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= t \arcsin t + \int \frac{d(1-t^2)}{2\sqrt{1-t^2}} = t \arcsin t + \sqrt{1-t^2} + C \\ &\stackrel{t=x+1}{=} (x+1) \arcsin(x+1) + \sqrt{-x^2-2x} + C. \end{aligned}$$

447 答案 $-\frac{1}{2} x \cot^2 x - \frac{1}{2} \cot x - \frac{1}{2} x + C.$

$$\begin{aligned} \int \frac{x \cot x}{\sin^2 x} dx &= \int x \cot x \csc^2 x dx = -\int x \cot x dx \cot x = -\frac{1}{2} \int x d \cot^2 x \\ &= -\frac{1}{2} x \cot^2 x + \frac{1}{2} \int \cot^2 x dx = -\frac{1}{2} x \cot^2 x + \frac{1}{2} \int (\csc^2 x - 1) dx \\ &= -\frac{1}{2} x \cot^2 x - \frac{1}{2} \cot x - \frac{1}{2} x + C. \end{aligned}$$

448 答案 $-\frac{x}{8} \csc^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \cot \frac{x}{2} + C.$

$$\begin{aligned} \int \frac{x \cos^4 \frac{x}{2}}{\sin^3 x} dx &= \int \frac{x \cos^4 \frac{x}{2}}{\left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right)^3} dx = \int \frac{x \cos^{\frac{x}{2}}}{8 \sin^3 \frac{x}{2}} dx = -\frac{1}{8} \int x d \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= -\frac{x}{8} \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{8} \int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} dx = -\frac{x}{8} \csc^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \int \csc^2 \frac{x}{2} d \frac{x}{2} = -\frac{x}{8} \csc^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \cot \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

449 答案 $-\ln(\sin x) \cdot \cot x - \cot x - x + C.$

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx &= \int \ln(\sin x) \cdot \csc^2 x dx = -\int \ln(\sin x) d \cot x \\ &= -\ln(\sin x) \cdot \cot x + \int \cot x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} dx = -\ln(\sin x) \cdot \cot x + \int \cot^2 x dx \\ &= -\ln(\sin x) \cdot \cot x + \int (\csc^2 x - 1) dx = -\ln(\sin x) \cdot \cot x - \cot x - x + C. \end{aligned}$$

450 答案 $\frac{1}{3} (x^2 - 2) \sqrt{1+x^2} + C.$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \int x^2 \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int x^2 d\sqrt{1+x^2} = x^2 \sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} dx^2 \\
 &= x^2 \sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} d(1+x^2) = x^2 \sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C \\
 &= \frac{1}{3} (x^2 - 2) \sqrt{1+x^2} + C.
 \end{aligned}$$

评注

本题也可以用三角代换方法解答.

451 答案 $\frac{1}{13} (2 \sin 3x - 3 \cos 3x) e^{2x} + C.$

$$\begin{aligned}
 \int e^{2x} \sin 3x dx &= \frac{1}{2} \int \sin 3x d e^{2x} = \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{2} \int e^{2x} \cos 3x dx \\
 &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{4} \int \cos 3x d e^{2x} = \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{4} e^{2x} \cos 3x - \frac{9}{4} \int e^{2x} \sin 3x dx, \\
 \text{故 } \int e^{2x} \sin 3x dx &= \frac{1}{13} (2 \sin 3x - 3 \cos 3x) e^{2x} + C.
 \end{aligned}$$

452 答案 $\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C.$

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &= x \sqrt{x^2 + a^2} - \int x \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx \\
 &= x \sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = x \sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2} dx + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx, \\
 \text{故 } \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx \\
 &= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C.
 \end{aligned}$$

评注

本题用到公式 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$. 同样, 也可以用三角代换解答.

453 答案 $\frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C.$

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= x \sqrt{a^2 - x^2} - \int x \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\
 &= x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx, \\
 \text{故 } \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C.
 \end{aligned}$$

评注

本题用到公式 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$. 同样, 也可以用三角代换解答.

454 答案 $\frac{1}{4} (2x^2 - 1) \arcsin x + \frac{1}{4} x \sqrt{1 - x^2} + C.$

$$\begin{aligned}
 \int x \arcsin x \, dx &= \frac{1}{2} \int \arcsin x \, dx^2 = \frac{1}{2} x^2 \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \arcsin x + \frac{1}{4} \int \frac{xd(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} x^2 \arcsin x + \frac{1}{2} \int x d\sqrt{1-x^2} \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \int \sqrt{1-x^2} \, dx \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x \right) + C \\
 &= \frac{1}{4} (2x^2 - 1) \arcsin x + \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2} + C.
 \end{aligned}$$

评注

本题用到结果 $\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x + C$.

455 答案 $\frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{1}{x} \arctan x + C.$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x^2} \arctan x \, dx &= \int \arctan x \, d\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} \arctan x + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx \\
 &= -\frac{1}{x} \arctan x + \int \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)} \, dx = -\frac{1}{x} \arctan x + \int \frac{1}{x} \, dx - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx \\
 &= -\frac{1}{x} \arctan x + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{1}{x} \arctan x + C.
 \end{aligned}$$

456 答案 $\frac{(1+x)\ln(1+x)}{3(2-x)} + \frac{1}{3} \ln|x-2| + C.$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} \, dx &= \int \ln(1+x) \, d\frac{1}{2-x} = \ln(1+x) \cdot \frac{1}{2-x} - \int \frac{1}{2-x} \cdot \frac{1}{1+x} \, dx \\
 &= \frac{\ln(1+x)}{2-x} - \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{2-x} + \frac{1}{1+x} \right) \, dx = \frac{\ln(1+x)}{2-x} + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-2} \, d(x-2) - \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+x} \, d(1+x) \\
 &= \frac{\ln(1+x)}{2-x} + \frac{1}{3} \ln|x-2| - \frac{1}{3} \ln(1+x) + C = \frac{(1+x)\ln(1+x)}{3(2-x)} + \frac{1}{3} \ln|x-2| + C.
 \end{aligned}$$

457 答案 $2(x-2)\sqrt{e^x-1} + 4 \arctan \sqrt{e^x-1} + C.$

令 $\sqrt{e^x-1} = t$, 则 $x = \ln(t^2+1)$, $dx = \frac{2t}{t^2+1} dt$, 于是

$$\begin{aligned}
 \int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}} \, dx &= \int \frac{(t^2+1)\ln(t^2+1)}{t} \cdot \frac{2t}{t^2+1} \, dt = 2 \int \ln(t^2+1) \, dt \\
 &= 2t \ln(t^2+1) - 2 \int t \cdot \frac{2t}{t^2+1} \, dt = 2t \ln(t^2+1) - 4 \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1} \right) \, dt \\
 &= 2t \ln(t^2+1) - 4t + 4 \arctan t + C = 2(x-2)\sqrt{e^x-1} + 4 \arctan \sqrt{e^x-1} + C.
 \end{aligned}$$

458 答案 $2(\ln x - 2)\sqrt{1+x} - 2 \ln \left| \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1} \right| + C.$

令 $\sqrt{1+x}=t$, 则 $x=t^2-1$, $dx=2tdt$, 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{\sqrt{1+x}} dx &= \int \frac{\ln(t^2-1)}{t} \cdot 2tdt = 2 \int \ln(t^2-1) dt = 2t \ln(t^2-1) - 2 \int t \cdot \frac{2t}{t^2-1} dt \\ &= 2t \ln(t^2-1) - 4 \int \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right) dt = 2t \ln(t^2-1) - 4t - 2 \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C \\ &= 2(\ln x - 2)\sqrt{1+x} - 2 \ln \left| \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1} \right| + C.\end{aligned}$$

459 答案 $(x+1)\arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + C$.

令 $\sqrt{x}=t$, 则 $x=t^2$, 于是

$$\begin{aligned}\int \arctan \sqrt{x} dx &= \int \arctan t dt^2 = t^2 \arctan t - \int t^2 \frac{1}{1+t^2} dt = t^2 \arctan t - \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt \\ &= t^2 \arctan t - t + \arctan t + C = (t^2+1)\arctan t - t + C = (x+1)\arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + C.\end{aligned}$$

460 答案 $\frac{x-2}{x+2}e^x + C$.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx &= -\int x^2 e^x d \frac{1}{x+2} = -\frac{x^2 e^x}{x+2} + \int \frac{1}{x+2} (x+2) x e^x dx \\ &= -\frac{x^2 e^x}{x+2} + \int x e^x dx = -\frac{x^2 e^x}{x+2} + \int x d e^x = -\frac{x^2 e^x}{x+2} + x e^x - \int e^x dx \\ &= -\frac{x^2 e^x}{x+2} + x e^x - e^x + C = \frac{x-2}{x+2} e^x + C.\end{aligned}$$

461 答案 $-\frac{\cos x}{1+x} + C$.

$$\begin{aligned}\int \frac{(1+x)\sin x + \cos x}{(1+x)^2} dx &= \int \frac{\sin x}{1+x} dx + \int \frac{\cos x}{(1+x)^2} dx \\ &= \int \frac{\sin x}{1+x} dx - \int \cos x d \frac{1}{1+x} = \int \frac{\sin x}{1+x} dx - \frac{\cos x}{1+x} - \int \frac{\sin x}{1+x} dx = -\frac{\cos x}{1+x} + C.\end{aligned}$$

462 答案 $\frac{x}{2} [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C$.

令 $e^x=t$, 则 $x=\ln t$, $f'(t)=\cos(\ln t)$, 从而

$$\begin{aligned}f(t) &= \int \cos(\ln t) dt = t \cos(\ln t) + \int t \sin(\ln t) \cdot \frac{1}{t} dt = t \cos(\ln t) + \int \sin(\ln t) dt \\ &= t \cos(\ln t) + t \sin(\ln t) - \int t \cos(\ln t) \cdot \frac{1}{t} dt = t \cos(\ln t) + t \sin(\ln t) - \int \cos(\ln t) dt,\end{aligned}$$

于是 $f(t) = \frac{t}{2}[(\cos(\ln t) + \sin(\ln t))] + C$, 即 $f(x) = \frac{x}{2}[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C$.

463 证明 $I_n = \int \sec^n x dx = \int \sec^{n-2} x \cdot \sec^2 x dx = \int \sec^{n-2} x \tan x dx$
 $= \sec^{n-2} x \tan x - \int \tan x \cdot (n-2) \sec^{n-3} x \cdot \sec x \tan x dx$
 $= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \tan^2 x \cdot \sec^{n-2} x dx$
 $= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int (\sec^2 x - 1) \cdot \sec^{n-2} x dx$

$$\begin{aligned}
 &= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^n x dx + (n-2) \int \sec^{n-2} x dx \\
 &= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) I_n + (n-2) I_{n-2},
 \end{aligned}$$

移项, 解得 $I_n = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$.

464 答案 $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3}{x^2+1} dx &= \int \frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1} dx = \int \left(x - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \int x dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx \\
 &= \int x dx - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.
 \end{aligned}$$

465 答案 $\frac{14}{5}\ln|x+4| + \frac{1}{5}\ln|x-1| + C$.

设 $\frac{3x-2}{x^2+3x-4} = \frac{3x-2}{(x+4)(x-1)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-1}$, 则

$$3x-2 = A(x-1) + B(x+4) = (A+B)x + (4B-A),$$

故 $\begin{cases} A+B=3 \\ 4B-A=-2 \end{cases}$, 解得 $A=\frac{14}{5}$, $B=\frac{1}{5}$, 于是

$$\int \frac{3x-2}{x^2+3x-4} dx = \frac{14}{5} \int \frac{1}{x+4} dx + \frac{1}{5} \int \frac{1}{x-1} dx = \frac{14}{5} \ln|x+4| + \frac{1}{5} \ln|x-1| + C.$$

466 答案 $-\ln|x+1| + \frac{4}{5}\ln|x-3| + \frac{11}{5}\ln|x+2| + C$.

设 $\frac{2x^2-x+1}{(x+1)(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+2}$, 则

$$2x^2-x+1 = A(x-3)(x+2) + B(x+1)(x+2) + C(x+1)(x-3),$$

分别令 $x=-1, -2, 3$, 可求得 $A=-1$, $C=\frac{11}{5}$, $B=\frac{4}{5}$. 于是

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2x^2-x+1}{(x+1)(x-3)(x+2)} dx &= -\int \frac{1}{x+1} dx + \frac{4}{5} \int \frac{1}{x-3} dx + \frac{11}{5} \int \frac{1}{x+2} dx \\
 &= -\ln|x+1| + \frac{4}{5}\ln|x-3| + \frac{11}{5}\ln|x+2| + C.
 \end{aligned}$$

467 答案 $\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{x-1} + C$.

设 $\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$, 则 $1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$,

分别令 $x=1, 0, 2$, 可求得 $C=1$, $A=1$, $B=-1$. 于是

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{x-1} + C.$$

468 答案 $\frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \frac{1}{x+1} + C$.

设 $\frac{x^2+1}{(x+1)(x^2-1)} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$, 则

$$x^2+1 = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1),$$

令 $x = -1, 1, 0$, 得 $C = -1, A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}$, 于是

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + \frac{1}{x+1} + C.$$

469 答案 $\frac{2}{5} \ln|1+2x| - \frac{1}{5} \ln(1+x^2) + \frac{1}{5} \arctan x + C.$

设 $\frac{1}{(x^2+1)(1+2x)} = \frac{A}{1+2x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$, 则

$$1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(1+2x) = (A+2B)x^2 + (B+2C)x + A+C,$$

故 $\begin{cases} A+2B=0 \\ B+2C=0 \\ A+C=1 \end{cases}$, 解得 $A = \frac{4}{5}, B = -\frac{2}{5}, C = \frac{1}{5}$, 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+1)(1+2x)} &= \frac{4}{5} \int \frac{dx}{1+2x} + \frac{1}{5} \int \frac{-2x+1}{1+x^2} dx = \frac{2}{5} \int \frac{d(1+2x)}{1+2x} - \frac{1}{5} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{1}{5} \int \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \frac{2}{5} \ln|1+2x| - \frac{1}{5} \ln(1+x^2) + \frac{1}{5} \arctan x + C. \end{aligned}$$

470 答案 $\frac{3}{2} \ln(x^2+2x+5) - \arctan \frac{x+1}{2} + C.$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+1}{x^2+2x+5} dx &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2)-2}{x^2+2x+5} dx = \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5} - 2 \int \frac{dx}{4+(x+1)^2} \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+5) - \int \frac{d\frac{x+1}{2}}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+5) - \arctan \frac{x+1}{2} + C. \end{aligned}$$

471 答案 $\frac{1}{16} \arctan \frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{8(x^2+2x+5)} + C.$

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2} = \int \frac{dx}{[(x+1)^2+4]^2} = \frac{1}{8} \int \frac{1}{\left[1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right]^2} d\frac{x+1}{2}$$

$$\stackrel{\frac{x+1}{2} = \tan t}{=} \frac{1}{8} \int \frac{\sec^2 t}{\sec^4 t} dt = \frac{1}{8} \int \cos^2 t dt = \frac{1}{16} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{16} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{16} \left(t + \frac{\tan t}{\sec^2 t} \right) + C \stackrel{t = \arctan \frac{x+1}{2}}{=} \frac{1}{16} \left(\arctan \frac{x+1}{2} + \frac{\frac{x+1}{2}}{1 + \left(\frac{x+1}{2} \right)^2} \right) + C \\
 &= \frac{1}{16} \arctan \frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{8(x^2 + 2x + 5)} + C.
 \end{aligned}$$

472 答案 $\frac{1}{2} \ln |x^4 + 5x^2 + 4| + \arctan x + \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C.$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2x^3 + 2x^2 + 5x + 5}{x^4 + 5x^2 + 4} dx &= \int \frac{2x^3 + 5x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx + \int \frac{2x^2 + 5}{x^4 + 5x^2 + 4} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^4 + 5x^2 + 4)}{x^4 + 5x^2 + 4} + \int \frac{(x^2 + 1) + (x^2 + 4)}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx \\
 &= \frac{1}{2} \ln |x^4 + 5x^2 + 4| + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx + \int \frac{1}{x^2 + 4} dx \\
 &= \frac{1}{2} \ln |x^4 + 5x^2 + 4| + \arctan x + \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C.
 \end{aligned}$$

评注

将有理函数分解为部分分式进行积分, 有时比较繁琐, 可根据被积函数的结构寻求简便方法.

473 答案 $\arctan(x+1) + \frac{1}{x^2 + 2x + 2} + C.$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx &= \int \frac{(x^2 + 2x + 2) - (2x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx \\
 &= \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx - \int \frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 1} - \int \frac{d(x^2 + 2x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)^2} \\
 &= \arctan(x+1) + \frac{1}{x^2 + 2x + 2} + C.
 \end{aligned}$$

474 答案 $\arctan x + \frac{1}{3} \arctan x^3 + C.$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^4 + 1}{1 + x^6} dx &= \int \frac{(x^4 - x^2 + 1) + x^2}{(1 + x^2)(x^4 - x^2 + 1)} dx = \int \frac{1}{1 + x^2} dx + \int \frac{x^2}{1 + x^6} dx \\
 &= \arctan x + \frac{1}{3} \int \frac{dx^3}{1 + (x^3)^2} = \arctan x + \frac{1}{3} \arctan x^3 + C.
 \end{aligned}$$

475 答案 $-\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x^4 - x^6} &= \int \frac{dx}{x^4(1 - x^2)} = \int \frac{(1 - x^2) + x^2}{x^4(1 - x^2)} dx = \int \frac{1}{x^4} dx + \int \frac{1}{x^2(1 - x^2)} dx \\
 &= -\frac{1}{3x^3} + \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{1 - x^2} dx = -\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.
 \end{aligned}$$

476 答案 $-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{4}\arctan x^2 + \frac{x^2}{4(1+x^4)} + C.$

$$\begin{aligned}\int \frac{1+2x^4}{x^3(1+x^4)^2} dx &= \int \frac{(1+x^4)+x^4}{x^3(1+x^4)^2} dx = \int \frac{1}{x^3(1+x^4)} dx + \int \frac{x}{(1+x^4)^2} dx \\ &= \int \frac{1}{x^3} dx - \int \frac{x}{1+x^4} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{[1+(x^2)^2]^2} dx^2 = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2}\arctan x^2 + \frac{1}{2} \int \frac{1}{[1+(x^2)^2]^2} dx^2,\end{aligned}$$

令 $x^2 = \tan t$, 则 $\frac{1}{2} \int \frac{1}{[1+(x^2)^2]^2} dx^2 = \frac{1}{2} \int \frac{\sec^2 t}{\sec^4 t} dt = \frac{1}{2} \int \cos^2 t dt = \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2t) dt$

$$= \frac{1}{4} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \frac{1}{4} \left(t + \frac{\tan t}{\sec^2 t} \right) + C = \frac{1}{4} \left(\arctan x^2 + \frac{x^2}{1+x^4} \right) + C, \text{ 于是}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1+2x^4}{x^3(1+x^4)^2} dx &= -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2}\arctan x^2 + \frac{1}{4} \left(\arctan x^2 + \frac{x^2}{1+x^4} \right) + C \\ &= -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{4}\arctan x^2 + \frac{x^2}{4(1+x^4)} + C.\end{aligned}$$

477 答案 $\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan \frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln \left| \frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1} \right| + C.$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^4+1} &= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan \frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln \left| \frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1} \right| + C.\end{aligned}$$

478 答案 (D).

选项 (A), 因为一切初等函数在其定义区间内都连续, 故都存在原函数, 选项 (A) 正确.

选项 (B), 如函数 $f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处不连续, 但 $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

是 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的原函数, 选项 (B) 正确.

选项 (C), 设 $f(x)$ 是奇函数, 用定积分的知识可证明其原函数 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 为偶函数, 选项 (C) 正确.

选项 (D), 显然 $f(x) = x^2$ 是偶函数, 其原函数 $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$ 不是奇函数, 选项 (D) 不正确, 故应选 (D).

479 答案 (B).

因为区间上的连续函数一定存在原函数, 故选项 (B) 正确; 选项 (A), 连续不一定可导, 如函数 $f(x) = |x|, x \in (-1, 1)$; 选项 (C), 闭区间上的连续函数有最大值或最小值, 开区间上不一定成立, 如函数 $f(x) = x, x \in (0, 1)$; 选项 (D), 函数不一定有极值, 如函数 $f(x) = x, x \in (0, 1)$; 因此选 (B).

480 答案 (D).

因为 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 所以 $F(x) = \int f(x) dx$.

当 $x < 1$ 时, $F(x) = \int 2(x-1) dx = (x-1)^2 + C_1$,

当 $x \geq 1$ 时, $F(x) = \int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x(\ln x - 1) + C_2$.

又因 $F'(x) = f(x)$, 即 $F(x)$ 可导, $F(x)$ 必连续. 因此, 在 $x=1$ 处有

$$F(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x).$$

即 $\lim_{x \rightarrow 1^-} [(x-1)^2 + C_1] = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x(\ln x - 1) + C_2]$, 亦即 $C_1 = C_2 - 1$, 于是

$$F(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + C_1, & x < 1 \\ x(\ln x - 1) + C_1 + 1, & x \geq 1 \end{cases}, \text{ 其中 } C_1 \text{ 为任意实数. 令 } C_1 = 0, \text{ 则}$$

$$F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1 \end{cases}. \text{ 因此, 选 (D).}$$

481 答案 $-\frac{1}{2}e^{-2x} \arctan e^x - \frac{1}{2e^x} - \frac{1}{2} \arctan e^x + C$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx &= -\frac{1}{2} \int \arctan e^x de^{-2x} = -\frac{1}{2} e^{-2x} \arctan e^x + \frac{1}{2} \int \frac{de^x}{e^{2x}(1+e^{2x})} \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2x} \arctan e^x + \frac{1}{2} \left[\int \frac{de^x}{e^{2x}} - \int \frac{de^x}{1+e^{2x}} \right] \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2x} \arctan e^x - \frac{1}{2e^x} - \frac{1}{2} \arctan e^x + C. \end{aligned}$$

482 答案 $-\frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} + C$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx &= \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) \arctan x dx = \int \frac{\arctan x}{x^2} dx - \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \\ &= -\int \arctan x d \frac{1}{x} - \int \arctan x d \arctan x = -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx - \frac{1}{2} (\arctan x)^2, \end{aligned}$$

$$\text{因为 } \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx = \int \frac{x}{x^2(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} + C,$$

$$\text{故 } \int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx = -\frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} + C.$$

483 答案 $\ln \left| \frac{xe^x}{1+xe^x} \right| + C$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1+x}{x(1+xe^x)} dx &= \int \frac{(1+x) \cdot e^x}{x(1+xe^x) \cdot e^x} dx = \int \frac{d(xe^x)}{xe^x(1+xe^x)} \stackrel{xe^x=t}{=} \int \frac{dt}{t(1+t)} \\ &= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) dt = \ln \left| \frac{t}{1+t} \right| + C \stackrel{t=xe^x}{=} \ln \left| \frac{xe^x}{1+xe^x} \right| + C.\end{aligned}$$

484 答案 $\frac{x}{x-\ln x} + C.$

$$\begin{aligned}\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2} dx &= \int \frac{(1-\ln x)/x^2}{(x-\ln x)^2/x^2} dx = \int \frac{1}{\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^2} d\left(\frac{\ln x}{x}\right) \\ &= -\int \frac{1}{\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^2} d\left(1-\frac{\ln x}{x}\right) = \frac{1}{1-\frac{\ln x}{x}} + C = \frac{x}{x-\ln x} + C.\end{aligned}$$

485 答案 $\frac{1}{2} e^{2x} \arctan \sqrt{e^x-1} - \frac{1}{6} (e^x+2)\sqrt{e^x-1} + C.$

令 $\sqrt{e^x-1}=t$, 则 $e^x=1+t^2$, $x=\ln(1+t^2)$, $dx=\frac{2t}{1+t^2}dt$, 于是

$$\begin{aligned}\int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x-1} dx &= \int (1+t^2)^2 \arctan t \cdot \frac{2t}{1+t^2} dt \\ &= \int 2t(1+t^2) \arctan t dt = \frac{1}{2} \int \arctan t d(1+t^2)^2 \\ &= \frac{1}{2} (1+t^2)^2 \arctan t - \frac{1}{2} \int (1+t^2)^2 \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} (1+t^2)^2 \arctan t - \frac{1}{2} \int (1+t^2) dt \\ &= \frac{1}{2} (1+t^2)^2 \arctan t - \frac{1}{2} \left(t + \frac{t^3}{3} \right) + C = \frac{1}{2} e^{2x} \arctan \sqrt{e^x-1} - \frac{1}{6} (e^x+2)\sqrt{e^x-1} + C.\end{aligned}$$

486 答案 $\frac{x \sin x}{x \sin x + \cos x} + C.$

$$\begin{aligned}\int \frac{x + \sin x \cos x}{(x \sin x + \cos x)^2} dx &= \int \frac{x(\sin^2 x + \cos^2 x) + \sin x \cos x}{(x \sin x + \cos x)^2} dx \\ &= \int \frac{\sin x(x \sin x + \cos x) + x \cos^2 x}{(x \sin x + \cos x)^2} dx = \int \frac{\sin x}{x \sin x + \cos x} dx + \int \frac{x \cos^2 x}{(x \sin x + \cos x)^2} dx \\ &= \int \frac{\sin x}{x \sin x + \cos x} dx + \int x d \frac{\sin x}{x \sin x + \cos x} \\ &= \int \frac{\sin x}{x \sin x + \cos x} dx + \frac{x \sin x}{x \sin x + \cos x} - \int \frac{\sin x}{x \sin x + \cos x} dx = \frac{x \sin x}{x \sin x + \cos x} + C.\end{aligned}$$

487 答案 $\frac{1}{4} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{8} \tan^2 \frac{x}{2} + C.$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin 2x + 2 \sin x} &= \int \frac{dx}{2 \sin x (\cos x + 1)} = \frac{1}{4} \int \frac{d \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{d \tan \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{4} \int \frac{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2}} d \tan \frac{x}{2} = \frac{1}{4} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{8} \tan^2 \frac{x}{2} + C.\end{aligned}$$

488 答案 $\ln \left| \tan \frac{x}{2} + 1 \right| + C.$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx &= \int \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2} + 1} d \frac{x}{2} \\ &= \int \frac{1}{\tan \frac{x}{2} + 1} d \left(\tan \frac{x}{2} + 1 \right) = \ln \left| \tan \frac{x}{2} + 1 \right| + C. \end{aligned}$$

489 答案 $\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \frac{x}{2} \right) + C.$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2 + \cos x} dx &= \int \frac{1}{1 + (1 + \cos x)} dx = \int \frac{1}{1 + 2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{1 + \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2}} d \frac{x}{2} \\ &= \int \frac{1}{1 + \frac{1}{2} (1 + \tan^2 \frac{x}{2})} d \tan \frac{x}{2} = \int \frac{2}{3 + \tan^2 \frac{x}{2}} d \tan \frac{x}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \frac{x}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

490 答案 $x + 2 \ln |\cos x + \sin x| + C.$

令 $3 \cos x - \sin x = A(\cos x + \sin x) + B(\cos x + \sin x)'$, 则

$$3 \cos x - \sin x = A(\cos x + \sin x) + B(-\sin x + \cos x) = (A+B) \cos x + (A-B) \sin x,$$

比较系数, 得 $A+B=3, A-B=-1$, 解得 $A=1, B=2$, 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{3 \cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx &= \int \frac{(\cos x + \sin x) + 2(\cos x + \sin x)'}{\cos x + \sin x} dx = \int dx + 2 \int \frac{d(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x} \\ &= x + 2 \ln |\cos x + \sin x| + C. \end{aligned}$$

评注

被积函数的分子和分母是 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的线性组合的不定积分, 即形如

$\int \frac{a \cos x + b \sin x}{c \cos x + d \sin x} dx$ 的不定积分, 可作如下变换:

$$a \cos x + b \sin x = A(c \cos x + d \sin x) + B(c \cos x + d \sin x)'. \quad \text{①}$$

491 答案 $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \ln |1 + \sin 2x| + C.$

方法一: 令 $\sin x = A(\sin x + \cos x) + B(\sin x + \cos x)'$, 则

$$\sin x = A(\sin x + \cos x) + B(\cos x - \sin x) = (A-B) \sin x + (A+B) \cos x,$$

比较系数, 得 $A-B=1, A+B=0$, 解得 $A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}$, 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{(\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \ln |\sin x + \cos x| + C. \end{aligned}$$

方法二:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx &= \int \frac{\sin x (\cos x - \sin x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\sin 2x - (1 - \cos 2x)}{\cos 2x} dx \\&= \frac{1}{2} \int \tan 2x dx - \frac{1}{2} \int (\sec 2x - 1) dx = \frac{1}{4} \int \tan 2x dx - \frac{1}{4} \int \sec 2x dx + \frac{1}{2} x \\&= -\frac{1}{4} \ln |\cos 2x| - \frac{1}{4} \ln |\sec 2x + \tan 2x| + \frac{1}{2} x + C = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \ln |1 + \sin 2x| + C.\end{aligned}$$

492 答案 $\frac{1}{5} \arcsin x + \frac{2}{5} \ln |2x + \sqrt{1-x^2}| + C.$

令 $x = \sin t$, 则 $\sqrt{1-x^2} = \cos t$, $dx = \cos t dt$, 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2x + \sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{\cos t}{2 \sin t + \cos t} dt \\&= \frac{1}{5} \int \frac{(2 \sin t + \cos t) + 2(2 \sin t + \cos t)'}{2 \sin t + \cos t} dt \\&= \frac{1}{5} t + \frac{2}{5} \int \frac{d(2 \sin t + \cos t)}{2 \sin t + \cos t} = \frac{1}{5} t + \frac{2}{5} \ln |2 \sin t + \cos t| + C \\&= \frac{1}{5} \arcsin x + \frac{2}{5} \ln |2x + \sqrt{1-x^2}| + C.\end{aligned}$$



492 题 - 图

493 答案 $\frac{1}{2} \left[\ln(1+x^2) + \frac{x+1}{1+x^2} + \arctan x \right] + C.$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+1}{(1+x^2)^2} dx &= \int \frac{x^3}{(1+x^2)^2} dx + \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = I_1 + I_2, \\I_1 &= \int \frac{x^3}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx^2 = \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^2} dx^2 \\&= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2} \right) d(1+x^2) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2(1+x^2)} + C_1,\end{aligned}$$

令 $x = \tan t$, 则 $1+x^2 = 1+\tan^2 t = \sec^2 t$, $dx = \sec^2 t dt$, 于是

$$\begin{aligned}I_2 &= \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \int \frac{\sec^2 t}{\sec^4 t} dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\&= \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \sin t \cos t = \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C_2.\end{aligned}$$

因此, $\int \frac{x^3+1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \left[\ln(1+x^2) + \frac{x+1}{1+x^2} + \arctan x \right] + C$, 其中 $C = C_1 + C_2$.



493 题 - 图

494 答案 $\frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C.$

令 $\arctan x = t$, 则 $x = \tan t$, $1+x^2 = \sec^2 t$, $dx = \sec^2 t dt$,

$$\begin{aligned}\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int \frac{\tan t \cdot e^t}{\sec^3 t} \sec^2 t dt = \int e^t \sin t dt = \int \sin t de^t \\ &= e^t \sin t - \int \cos t de^t = e^t \sin t - e^t \cos t - \int e^t \sin t dt,\end{aligned}$$

故 $\int e^t \sin t dt = \frac{1}{2} e^t (\sin t - \cos t) + C$, 从而

$$\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{1}{2} e^{\arctan x} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) + C = \frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C.$$



494 题 - 图

495 答案 $x - 3\ln(e^{\frac{x}{3}} + 1) - \frac{3}{2}\ln(e^{\frac{x}{3}} + 1) - 3\arctan e^{\frac{x}{3}} + C.$

$$\int \frac{dx}{1+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{2x}{3}}+e^{\frac{x}{3}}} \stackrel{e^{\frac{x}{3}}=t}{=} \int \frac{6dt}{(1+t^3+t^2+t)t} = \int \frac{6dt}{t(t+1)(t^2+1)},$$

设 $\frac{6}{t(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{t^2+1}$, 解得 $A=6, B=C=D=-3$, 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{2x}{3}}+e^{\frac{x}{3}}} &= \int \left(\frac{6}{t} - \frac{3}{t+1} - \frac{3t+3}{t^2+1} \right) dt = 6 \int \frac{dt}{t} - 3 \int \frac{d(t+1)}{t+1} - \frac{3}{2} \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} - 3 \int \frac{dt}{t^2+1} \\ &= 6 \ln|t| - 3 \ln|t+1| - \frac{3}{2} \ln(t^2+1) - 3 \arctan t + C \\ &= x - 3\ln(e^{\frac{x}{3}} + 1) - \frac{3}{2} \ln(e^{\frac{x}{3}} + 1) - 3\arctan e^{\frac{x}{3}} + C.\end{aligned}$$

496 答案 $\frac{1}{3} \ln(\cos x + 2) - \frac{1}{2} \ln(\cos x + 1) + \frac{1}{6} \ln(1 - \cos x) + C.$

$$\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{(2+\cos x)\sin^2 x} dx = - \int \frac{d\cos x}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)}$$

$$\stackrel{\cos x=t}{=} - \int \frac{dt}{(2+t)(1-t^2)} = \int \frac{dt}{(2+t)(t+1)(t-1)},$$

设 $\frac{1}{(2+t)(t+1)(t-1)} = \frac{A}{2+t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{t-1}$, 解得 $A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{2}, C=\frac{1}{6}$,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x} dx &= \int \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2+t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{t-1} \right) dt \\ &= \frac{1}{3} \ln|t+2| - \frac{1}{2} \ln|t+1| + \frac{1}{6} \ln|t-1| + C \\ &\stackrel{t=\cos x}{=} \frac{1}{3} \ln(\cos x + 2) - \frac{1}{2} \ln(\cos x + 1) + \frac{1}{6} \ln(1 - \cos x) + C.\end{aligned}$$

497 答案 $\frac{2}{3}x + \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} \arcsin x + C.$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int x^2 \arcsin x \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int x^2 \arcsin x d\sqrt{1-x^2} \\
 &= -x^2 \sqrt{1-x^2} \arcsin x + \int \sqrt{1-x^2} \left(2x \arcsin x + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\
 &= -x^2 \sqrt{1-x^2} \arcsin x + \frac{1}{3} x^3 + \int 2x \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{而 } I_1 &= \int 2x \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx = -\frac{2}{3} \int \arcsin x d(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \\
 &= -\frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \arcsin x + \frac{2}{3} \int (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= -\frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \arcsin x + \frac{2}{3} \int (1-x^2) dx \\
 &= -\frac{2}{3} (1-x^2) \sqrt{1-x^2} \arcsin x + \frac{2}{3} x - \frac{2}{9} x^3 + C,
 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \int \frac{x^3 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{3} x + \frac{1}{9} x^3 - \frac{1}{3} (x^2+2) \sqrt{1-x^2} \arcsin x + C.$$

498 答案 $\frac{1}{2} \ln |(x-y)^2 - 1| + C.$

令 $x-y=t$, 则 $y=x-t$, 代入 $y(x-y)^2=x$, 得 $(x-t)^2=x$,

解得 $x = \frac{t^3}{t^2-1}$, $dx = \frac{t^2(t^2-3)}{(t^2-1)^2} dt$, $y = \frac{t}{t^2-1}$, 于是

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x-3y} dx &= \int \frac{1}{\frac{t^3}{t^2-1} - \frac{3t}{t^2-1}} \cdot \frac{t^2(t^2-3)}{(t^2-1)^2} dt = \int \frac{t}{t^2-1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2-1)}{t^2-1} \\
 &= \frac{1}{2} \ln |t^2-1| + C = \frac{1}{2} \ln |(x-y)^2-1| + C.
 \end{aligned}$$

499 答案 $-2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C.$

由 $\sqrt{x} \geq 0$, $\sqrt{1-x} > 0$, $\sin x \neq 0$, 得 $0 < x < 1$, 故 $\sin x > 0$,

令 $\sin^2 x = t$, 则 $\sin x = \sqrt{t}$, $x = \arcsin \sqrt{t}$, $f(t) = \frac{\arcsin \sqrt{t}}{\sqrt{t}}$, 于是

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) dx &= \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx = -2 \int \arcsin \sqrt{x} d\sqrt{1-x} \\
 &= -2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + 2 \int \sqrt{1-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} d\sqrt{x} \\
 &= -2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C.
 \end{aligned}$$

500 答案 $4x^3 e^{x^2} + C.$

$$\int x f''(x) dx = \int x df'(x) = x f'(x) - \int f'(x) dx = x f'(x) - f(x) + C,$$

由 $\int f(x) dx = e^{x^2} + C$, 知 $f(x) = (e^{x^2} + C)' = 2xe^{x^2}$, $f'(x) = 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2}$,

于是, $\int xf''(x)dx = x(2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}) - 2xe^{x^2} + C = 4x^3e^{x^2} + C$.

501 答案 $\ln \left| \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right| + C$.

由 $\int xf'(x)dx = \arcsin x + C$, 知 $xf'(x) = (\arcsin x + C)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

所以 $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$, $\int f(x)dx = \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx$,

令 $x = \sin t$, 则 $\sqrt{1-x^2} = \cos t$, $dx = \cos t dt$, 于是

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{1}{\sin t \cos t} \cos t dt = \int \csc t dt = \ln |\csc t - \cot t| + C \\ &= \ln \left| \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right| + C.\end{aligned}$$



501 题 - 图

502 答案 $f(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x$.

由 $\left(\int f'(e^x) dx \right)' = [-(1+x)e^{-x} + C]'$, 得 $f'(e^x) = xe^{-x}$, 令 $e^x = t$, 则 $x = \ln t$, $f'(t) = \frac{\ln t}{t}$, 即

$f'(x) = \frac{\ln x}{x}$, 积分得

$f(x) = \int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d \ln x = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$,

由 $f(1) = 0$, 得 $C = 0$, 故 $f(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x$.

503 证明

方法一: 本题有两种方法.

$$\begin{aligned}\text{左边} &= \int \frac{f(x)}{f'(x)} dx - \int \frac{f^2(x) df'(x)}{(f'(x))^3} = \int \frac{f(x)}{f'(x)} dx + \frac{1}{2} \int f^2(x) d \frac{1}{(f'(x))^2} \\ &= \int \frac{f(x)}{f'(x)} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{f^2(x)}{(f'(x))^2} - \int \frac{2f(x)f'(x)}{(f'(x))^2} dx \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{f(x)}{f'(x)} \right)^2 + C.\end{aligned}$$

方法二:

$$\begin{aligned}\text{左边} &= \int \frac{f(x)}{f'(x)} \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} dx \\ &= \int \frac{f(x)}{f'(x)} \left(\frac{f'(x)}{f'(x)} \right)' dx = \int \frac{f(x)}{f'(x)} d \left(\frac{f(x)}{f'(x)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{f(x)}{f'(x)} \right)^2 + C. \text{ 证毕.}\end{aligned}$$

504 证明

$$(a \sin x + b \cos x)^2 = (a^2 + b^2) \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right)^2$$

$= (a^2 + b^2) \sin^2(x + \varphi)$, 其中 $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, 于是

$$\cos(x + \varphi) = \cos x \cos \varphi - \sin x \sin \varphi = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x,$$

$$\text{从而 } \int \frac{1}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx = \frac{1}{a^2 + b^2} \int \frac{1}{\sin^2(x + \varphi)} d(x + \varphi)$$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2} \int \csc^2(x + \varphi) d(x + \varphi) = -\frac{1}{a^2 + b^2} \cot(x + \varphi) + C$$

$$= -\frac{1}{a^2 + b^2} \frac{\cos(x + \varphi)}{\sin(x + \varphi)} + C = -\frac{1}{a^2 + b^2} \frac{\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x}{\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x} + C$$

$$= -\frac{1}{a^2 + b^2} \frac{a \cos x - b \sin x}{a \sin x + b \cos x} + C.$$

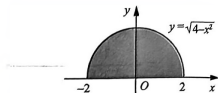
第 5 章 定积分

505 答案 (B).

因为定积分的值是一个常数, 故导数为 0.

506 答案 2π .

根据定积分的几何意义, $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$ 表示图中半圆的面积, 所以 $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{1}{2} \pi \cdot 2^2 = 2\pi$.



506 题 - 图

507 答案 $\frac{1}{2}$.

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

评注

(1) 这是和的极限, 该极限即为函数 $f(x) = x$ 在区间 $[0, 1]$ 上的定积分. 事实上, $f(x) = x$ 在 $[0, 1]$ 上是连续的, 因此可积, 于是可将区间 $[0, 1]$ n 等分, 并取 ξ_i 为第 i 个小区间的左端点, 这样作出的和的极限就是题目中所要求的极限.

(2) 此题的另一解法是通分求和, 仿照第一章 53(1) 题.

508 答案 $\ln 2$.

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2.$$

509 答案 $\frac{\pi}{4}$.

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2 + i^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

510 答案 (B).

所有选项中只有 (B) 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $x \leq \tan x$, 从而 $I_1 \leq I_2$.

评注

相同区间内的定积分大小的比较, 根据定积分的比较性质, 直接比较被积函数在积分区间内的大小即可.

511 答案 (A).

因为当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $\sqrt{1+x^2} \geq \sqrt{1+x^3}$, 且 $\sqrt{1+x^2} \neq \sqrt{1+x^3}$, 所以有 $I_1 > I_2$.

评注

若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $f(x) \leq g(x)$, 且 $f(x) \neq g(x)$, 则 $\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$.

512 答案 $\frac{3}{4}\pi \leq I \leq \frac{3}{2}\pi.$

令 $f(x) = 1 + \cos^2 x$, 显然在区间 $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ 上, $0 \leq \cos^2 x \leq 1$, 所以 $1 \leq f(x) \leq 2$,

由估值定理可得 $1 \cdot \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (1 + \cos^2 x) dx \leq 2 \cdot \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$, 即 $\frac{3\pi}{4} \leq I \leq \frac{3\pi}{2}$.

513 答案 $\frac{1}{10\sqrt{2}} \leq I \leq \frac{1}{10}.$

由于 $\frac{x^9}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} \leq x^9$ ($0 \leq x \leq 1$), 从而

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 x^9 dx \leq \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx \leq \int_0^1 x^9 dx,$$

$$\text{又 } \int_0^1 x^9 dx = \frac{1}{10}, \text{ 则 } \frac{1}{10\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx \leq \frac{1}{10}.$$

评注

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最值不容易求得, 可对 $f(x)$ 进行适当的缩放, 以便于估值.

514 证明 利用最值和缩放相结合.

$$\text{令 } f(x) = \frac{\sin x}{x}, \text{ 有 } f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}, \text{ 又令 } g(x) = x \cos x - \sin x,$$

$$\text{有 } g'(x) = -x \sin x < 0, x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], \text{ 则 } g(x) \text{ 单调递减, 可知 } g(x) \leq g\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0,$$

$$\text{从而 } f'(x) < 0, \text{ 则 } f(x) \text{ 单调递减, 有 } f\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{4}\right), \text{ 即 } \frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi},$$

$$\text{由估值定理可得: } \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \text{ 即 } \frac{1}{2} \leq I \leq \frac{\sqrt{2}}{2}. \dots\dots(1)$$

$$\text{又当 } \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \frac{\sqrt{2}}{\pi} \leq \frac{1}{\sqrt{2}x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{4}{\pi}, \text{ 所以}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1, \text{ 即 } \frac{\sqrt{2}}{4} \leq I \leq 1. \dots\dots(2)$$

$$\text{结合 (1)(2) 可得 } \frac{\sqrt{2}}{4} \leq I \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

515 证明 利用积分中值定理和罗尔定理.

由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 可知 $f(x)$ 在 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ 上连续, 则由积分中值定理, 存在 $\eta \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, 使得 $f(\eta) = \frac{2}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx$. 于是 $f(\eta) = f(b)$, 且 $\eta < b$, $f(x)$ 在 $[\eta, b]$ 上满足罗尔定理的条件, 则至少存在一点 $\xi \in (\eta, b) \subset (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

516 证明 利用积分中值定理.

由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 可知 $F(x)$ 在 (a, b) 内可导, 且

$$F'(x) = \frac{f(x)}{x-a} - \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x f(t) dt,$$

由积分中值定理知, 存在 $\xi \in [a, x]$, 使得 $\int_a^x f(t) dt = (x-a)f(\xi)$, 代入上式得:

$$F'(x) = \frac{f(x) - f(\xi)}{x-a}.$$

又由 $f'(x) \leq 0$, 知 $f(x)$ 在 (a, b) 内单减, 则当 $\xi \leq x$ 时, 有 $f(\xi) \geq f(x)$, 于是 $x \in (a, b)$ 时, $F'(x) \leq 0$.

517 答案 $\frac{\pi}{2}$.

根据平均值公式可知函数 $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ 在 $[-2, 2]$ 上的平均值为

$$f(\xi) = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx,$$

由定积分的几何意义可得 $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = 2\pi$, 故所求平均值为 $f(\xi) = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$.

518 答案 $0; \sin b^2; -\sin a^2$.

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} \int_a^b \sin x^2 dx = 0.$$

$$\frac{df}{db} = \frac{d}{db} \int_a^b \sin x^2 dx = \sin b^2.$$

$$\frac{df}{da} = \frac{d}{da} \int_a^b \sin x^2 dx = -\frac{d}{da} \int_b^a \sin x^2 dx = -\sin a^2.$$

519 答案 $2x\sqrt{1+x^4}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt = \sqrt{1+(x^2)^2} \cdot (x^2)' = 2x\sqrt{1+x^4}.$$

评注

当积分上限是 $\varphi(x)$ 时, 求导要利用复合函数的求导法则.

一般地, $\frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$.

10 答案 $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^6}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{d}{dx} \int_{x^2}^0 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{d}{dx} \int_0^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{d}{dx} \int_0^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^6}} \cdot (x^3)' - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \cdot (x^2)' = \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^6}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}.\end{aligned}$$

评注

当积分上下限均是 x 的函数时, 要利用积分区间的可加性和复合函数的求导法则, 熟练之后, 过程可以简化:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{(x^3)'}{\sqrt{1+(x^3)^2}} - \frac{(x^2)'}{\sqrt{1+(x^2)^2}} = \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^6}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}.$$

一般地, $\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x).$

521 答案 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{洛必达法则}}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \cos x' = 1.$$

522 答案 $\frac{1}{2}.$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arctan t dt}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{洛必达法则}}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

523 答案 2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x t e^{2t^2} dt} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{洛必达法则}}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right) e^{x^2}}{x e^{2x^2}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{x e^{x^2}} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{洛必达法则}}{=}} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}(1+2x^2)} = 2.$$

524 答案 $\frac{1}{2} f(0).$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)(x-t) dt}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{洛必达法则}}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt + x f(x) - x f(x)}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2} = \frac{1}{2} f(0).\end{aligned}$$

对 t 积分时, x 视为常量

525 答案 $\frac{\pi^2}{4}.$

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 必有 $x > 1$, 则

$$\int_0^x (\arctan t)^2 dt = \int_0^1 (\arctan t)^2 dt + \int_1^x (\arctan t)^2 dt \geq \int_1^x (\arctan t)^2 dt \geq \int_1^x (\arctan 1)^2 dt = \frac{\pi^2}{16}(x-1) \rightarrow +\infty,$$

因此 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x (\arctan t)^2 dt = +\infty$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{1+x^2}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\arctan x)^2}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} \stackrel{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{1} = \frac{\pi^2}{4}.$$

526 答案 $-\frac{\cos x}{e^y}.$

方程两边对 x 求导, 得 $e^y \frac{dy}{dx} + \cos x = 0$, 解得 $\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{e^y}$.

527 答案 单调增区间 $(-\infty, +\infty)$, 奇函数.

因为 $f'(x) = e^{\frac{1}{2}x^2} > 0$ ($-\infty < x < +\infty$), 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增.

又 $f(-x) = \int_0^{-x} e^{\frac{1}{2}t^2} dt \stackrel{\text{令 } t=-u}{=} \int_0^x e^{\frac{1}{2}u^2} d(-u) = -\int_0^x e^{\frac{1}{2}u^2} du = -f(x)$, 故 $f(x)$ 是奇函数.

528 答案 2.

因 $\varphi(x) = \int_0^{x^2} xf(t)dt = x \int_0^{x^2} f(t)dt$, 则 $\varphi'(x) = \int_0^{x^2} f(t)dt + 2x^2 f(x^2)$,

又由条件知 $\varphi(1) = \int_0^1 f(t)dt = 1$, $\varphi'(1) = \int_0^1 f(t)dt + 2f(1) = 5$, 于是 $1 + 2f(1) = 5$, 故 $f(1) = 2$.

529 答案 利用零点存在定理和单调性.

设 $F(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_b^x \frac{dt}{f(t)}$, 可知 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt + \int_b^a \frac{dt}{f(t)} = -\int_a^b \frac{dt}{f(t)} < 0, \quad F(b) = \int_a^b f(t)dt + \int_b^b \frac{dt}{f(t)} = \int_a^b f(t)dt > 0,$$

由零点存在定理可知, $F(x) = 0$ 在 (a, b) 内至少存在一个根.

又 $F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} > 0$, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增, 从而 $F(x) = 0$ 在 (a, b) 内最多有一个根.

综上, $F(x) = 0$ 在 (a, b) 内有且仅有一个实根.

530 答案 $\frac{1}{2}(e-1).$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x} d(2x) = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(e-1).$$

531 答案 $\sqrt{5}-1.$

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} d(1+x^2) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1+x^2} \Big|_0^2 = \sqrt{5}-1.$$

532 答案 $\ln \frac{9}{8}$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+5x+6} &= \int_0^1 \frac{dx}{x+2} - \int_0^1 \frac{dx}{x+3} = \ln(x+2)\Big|_0^1 - \ln(x+3)\Big|_0^1 \\ &= (\ln 3 - \ln 2) - (2\ln 2 - \ln 3) = 2\ln 3 - 3\ln 2 = \ln \frac{9}{8}.\end{aligned}$$

533 答案 5.

因为 $|2-x| = \begin{cases} 2-x, & x < 2 \\ x-2, & x > 2 \end{cases}$, 所以

$$\int_{-1}^3 |2-x| dx = \int_{-1}^2 (2-x) dx + \int_2^3 (x-2) dx = \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big|_2^3 = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5.$$

534 答案 4.

因为 $|\sin x| = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ -\sin x, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$, 所以

$$\int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} = 2 + 2 = 4.$$

评注

当被积函数在积分区间上是分段函数或带有绝对值符号时, 应根据被积函数的取值情况, 利用积分区间的可加性分段进行积分.

535 答案 $P(x) = \int_0^x f(t) dt = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $P(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x 2t dt = t^2\Big|_0^x = x^2$.

当 $1 < x \leq 2$ 时, $P(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^1 2t dt + \int_1^x (2+t) dt$

$$= t^2\Big|_0^1 + \left(2t + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^x = 1 + \left(2x + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2},$$

所以, $P(x) = \int_0^x f(t) dt = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

评注

当 $1 < x \leq 2$ 时, 注意积分区间要分段.

536 答案 $\frac{\pi}{4-\pi}$.

因定积分为一常数, 可设 $\int_0^1 f(x) dx = C$, 对等式两边求定积分, 有

$$C = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + C \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \arctan x\Big|_0^1 + C \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} C,$$

└─ 四分之一圆面积

解得: $C = \frac{\pi}{4-\pi}$, 即 $\int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{4-\pi}$.

537 答案 $\int_0^1 f(x)dx = -2$; $f(x) = -2x - 1$.

设 $\int_0^1 f(x)dx = C$, 对等式两边求定积分, 有

$$C = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (Cx - 1)dx = \left(\frac{1}{2}Cx^2 - x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}C - 1,$$

解得 $C = \int_0^1 f(x)dx = -2$, 且由条件知 $f(x) = x \int_0^1 f(t)dt - 1 = -2x - 1$.

538 答案 $\frac{1}{2}\ln 3$.

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x + x^3}{1 + x^4} = \frac{\frac{1}{x} + x}{\frac{1}{x^2} + x^2} = \frac{\frac{1}{x} + x}{\left(\frac{1}{x} + x\right)^2 - 2}, \text{ 令 } t = \frac{1}{x} + x, \text{ 则 } f(t) = \frac{t}{t^2 - 2}, \text{ 于是}$$

$$\int_2^{2\sqrt{2}} f(x)dx = \int_2^{2\sqrt{2}} \frac{x}{x^2 - 2}dx = \frac{1}{2} \int_2^{2\sqrt{2}} \frac{1}{x^2 - 2}d(x^2 - 2) = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2) \Big|_2^{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} (\ln 6 - \ln 2) = \frac{1}{2} \ln 3.$$

评注

已知复合函数 $f[\varphi(x)]$, 需先求出 $f(x)$, 再计算定积分.

539 答案 $7 + 2\ln 2$.

令 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2$, $dx = 2t dt$, $x = 4$ 时, $t = 2$; $x = 9$ 时, $t = 3$.

$$\begin{aligned} \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx &= \int_2^3 \frac{t^2}{t-1} dt = 2 \int_2^3 \left(t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = \left[t^2 + 2t + 2\ln(t-1) \right]_2^3 \\ &= [15 + 2\ln 2 - (8 + 2\ln 1)] = 7 + 2\ln 2. \end{aligned}$$

540 答案 $\frac{3\sqrt{3}-2}{5}$.

令 $\sqrt{3-2x} = t$, 则 $x = \frac{1}{2}(3-t^2)$, $dx = -t dt$, $x = 0$ 时, $t = \sqrt{3}$; $x = 1$ 时, $t = 1$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\sqrt{3-2x}dx &= -\int_{\sqrt{3}}^1 \frac{1}{2}(3-t^2)t^2 dt = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} (3t^2 - t^4) dt \\ &= \frac{1}{2} t^3 \Big|_1^{\sqrt{3}} - \frac{1}{10} t^5 \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} (3\sqrt{3} - 1) - \frac{1}{10} (9\sqrt{3} - 1) = \frac{3\sqrt{3}-2}{5}. \end{aligned}$$

541 答案 $2(\sqrt{2}-1)$.

方法一: 令 $\ln x = t$, 则 $x = e^t$, $dx = e^t dt$, $x = 1$ 时, $t = 0$; $x = e$ 时, $t = 1$.

$$\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{e^t \sqrt{1+t}} \cdot e^t dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t}} dt = 2\sqrt{1+t} \Big|_0^1 = 2(\sqrt{2}-1).$$

方法二: 令 $\sqrt{1+\ln x} = t$, 则 $x = e^{t^2-1}$, $dx = 2te^{t^2-1}dt$, $x=1$ 时, $t=1$; $x=e$ 时, $t=\sqrt{2}$.

$$\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{e^{t^2-1}t} \cdot 2te^{t^2-1} dt = \int_1^{\sqrt{2}} 2dt = 2t \Big|_1^{\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2}-1).$$

方法三: $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{1+\ln x}} d(1+\ln x) = 2\sqrt{1+\ln x} \Big|_1^e = 2(\sqrt{2}-1).$

542 答案 $2(1-\sqrt{1-e^{-1}}).$

方法一: 令 $1+xe^x = t$, 则 $dt = (1+x)e^x dx$, $x=-1$ 时, $t=1-e^{-1}$; $x=0$ 时, $t=1$.

$$\int_{-1}^0 \frac{(1+x)e^x}{\sqrt{1+xe^x}} dx = \int_{1-e^{-1}}^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} \Big|_{1-e^{-1}}^1 = 2(1-\sqrt{1-e^{-1}}).$$

注意此处不是 $dx = \varphi'(t)dt$

方法二: 令 $\sqrt{1+xe^x} = t$, 则 $dt = \frac{1}{2\sqrt{1+xe^x}} d(1+xe^x) = \frac{(1+x)e^x}{2\sqrt{1+xe^x}} dx$,

$x=-1$ 时, $t=\sqrt{1-e^{-1}}$; $x=0$ 时, $t=1$.

$$\int_{-1}^0 \frac{(1+x)e^x}{\sqrt{1+xe^x}} dx = \int_{\sqrt{1-e^{-1}}}^1 2dt = 2t \Big|_{\sqrt{1-e^{-1}}}^1 = 2(1-\sqrt{1-e^{-1}}).$$

方法三: $\int_{-1}^0 \frac{(1+x)e^x}{\sqrt{1+xe^x}} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1+xe^x}} d(1+xe^x) = 2\sqrt{1+xe^x} \Big|_{-1}^0 = 2(1-\sqrt{1-e^{-1}}).$

543 答案 $\frac{\pi}{6}.$

令 $x = \frac{\sqrt{2}}{3} \sin t$, 则 $dx = \frac{\sqrt{2}}{3} \cos t dt$, $x=0$ 时, $t=0$; $x=\frac{\sqrt{2}}{3}$ 时, $t=\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{3}} \sqrt{2-9x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} \cos t \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cos t dt = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + 1) dt = \left(\frac{1}{6} \sin 2t + \frac{1}{3} t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

544 答案 $\ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}.$

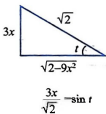
令 $x = \tan t$, 则 $dx = \sec^2 t dt$, $x=1$ 时, $t=\frac{\pi}{4}$; $x=\sqrt{3}$ 时, $t=\frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^3 t dt}{\tan t \sec t} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \csc t dt = \ln(\csc t - \cot t) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \ln \frac{1}{\sqrt{3}} - \ln(\sqrt{2}-1) = \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

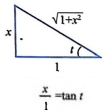
545 答案 $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}.$

令 $x = \sec t$, 则 $dx = \sec t \tan t dt$, $x=1$ 时, $t=0$; $x=2$ 时, $t=\frac{\pi}{3}$.

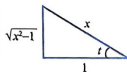
$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan t}{\sec t} \cdot \sec t \tan t dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 t dt$$



543 题 - 图



544 题 - 图



545 题 - 图

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 t - 1) dt = (\tan t - t) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

546 答案 $\pi - 2$.

令 $x = \sin t$, 则 $dx = \cos t dt$, $x = 0$ 时, $t = 0$; $x = 1$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{1-x^2}} &= 2 \int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{1-x^2}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t dt}{1 + \cos t} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{1 + \cos t} \right) dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{t}{2}} dt = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2 \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = \pi - 2 \tan \frac{t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2. \end{aligned}$$

547 答案 $\frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx &= \int_0^1 \sqrt{1-(1-x)^2} dx \stackrel{\text{令 } 1-x=\sin t}{=} - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

548 答案 $\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln(2 + \sqrt{3})$.

$$\begin{aligned} \int_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}} dx &\stackrel{\text{令 } e^{2x}=t}{=} \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1-t}}{2t} dt \stackrel{\text{令 } \sqrt{1-t}=u}{=} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{-u^2}{1-u^2} du \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(1 - \frac{1}{1-u^2} \right) du = \left(u - \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u} \right) \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln(2 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

评注

也可直接令 $\sqrt{1-e^{2x}} = t$.

549 答案 $\frac{7}{3} - \frac{1}{e}$.

$$\begin{aligned} \text{方法一: } \int_1^3 f(x-2) dx &\stackrel{\text{令 } x-2=t}{=} \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^0 (1+t^2) dt + \int_0^1 e^{-t} dt \\ &= \left(t + \frac{1}{3} t^3 \right) \Big|_{-1}^0 + (-e^{-t}) \Big|_0^1 = \frac{4}{3} + 1 - \frac{1}{e} = \frac{7}{3} - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

$$\text{方法二: 由条件得 } f(x-2) = \begin{cases} 1+(x-2)^2, & x-2 < 0 \\ e^{-(x-2)}, & x-2 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2-4x+5, & x < 2 \\ e^{2-x}, & x \geq 2 \end{cases},$$

$$\text{则 } \int_1^3 f(x-2) dx = \int_1^2 (x^2-4x+5) dx + \int_2^3 e^{2-x} dx = \left(\frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + 5x \right) \Big|_1^2 - e^{2-x} \Big|_2^3 = \frac{7}{3} - \frac{1}{e}.$$

评注

此类问题两种方法均可, 但显然方法一用变量代换将 $\int_1^3 f(x-2) dx$ 化为 $\int_{-1}^1 f(t) dt$ 计算更简洁.

550 答案 $-\frac{1}{2}$.

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x-1) dx \stackrel{\text{令 } x-1=t}{=} \int_{-\frac{1}{2}}^1 f(t) dt = \underbrace{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x e^{x^2} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-1) dt}_{\substack{\text{对称区间, 奇函数} \\ \longrightarrow}} = 0 - \left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

551 答案 $e^{-2} - 1$.

因 $\int_0^x f(x-t) dt \stackrel{\text{令 } x-t=u}{=} \int_x^0 f(u)(-du) = \int_0^x f(u) du$, 则 $\int_0^x f(u) du = e^{-2x} - 1$,

取 $x=1$, 代入等式得 $\int_0^1 f(u) du = e^{-2} - 1$, 即 $\int_0^1 f(x) dx = e^{-2} - 1$.

评注

也可以求出 $f(x) = -2e^{-2x}$, 代入 $\int_0^1 f(x) dx$ 中求出定积分.

552 答案 e^x .

$$\begin{aligned} \int_0^x f(x-t) t dt &\stackrel{\text{令 } x-t=u}{=} \int_x^0 f(u)(x-u)(-du) = \int_0^x f(u)(x-u) du \\ &= x \int_0^x f(u) du - \int_0^x u f(u) du, \end{aligned}$$

$$\text{则 } x \int_0^x f(u) du - \int_0^x u f(u) du = e^x - x - 1,$$

$$\text{等式两边对 } x \text{ 求导, 得 } \left[\int_0^x f(u) du + x f(x) \right] - x f(x) = e^x - 1, \text{ 即 } \int_0^x f(u) du = e^x - 1,$$

$$\text{等式两边再次对 } x \text{ 求导, 得 } f(x) = e^x.$$

553 答案 0.

$$\text{设 } f(x) = \frac{x}{1 + \cos x}, \text{ 由 } f(-x) = \frac{-x}{1 + \cos(-x)} = -\frac{x}{1 + \cos x} = -f(x), \text{ 知 } f(x) \text{ 是奇函数,}$$

$$\text{故 } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1 + \cos x} dx = 0.$$

554 答案 0.

$$\text{设 } f(x) = \sin^2 x \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \text{ 由}$$

$$f(-x) = \sin^2(-x) \ln(-x + \sqrt{1+(-x)^2}) = \sin^2 x \ln(-x + \sqrt{1+x^2})$$

$$= \sin^2 x \ln(x + \sqrt{1+x^2})^{-1} = -\sin^2 x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x),$$

$$\text{知 } f(x) \text{ 是奇函数, 故 } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx = 0.$$

555 答案 0.

显然 $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ 是偶函数, 设 $f(x) = \frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{2}$, 由

$$f(-x) = \frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{2} = \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{e^x+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{e^x+1} + \frac{1}{2} = -f(x),$$

知 $f(x)$ 是奇函数, 则 $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \left(\frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{2} \right)$ 亦为奇函数, 故 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \left(\frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{2} \right) dx = 0$.

556 答案 $\pi \sin 1$.

$$\int_{-1}^1 \cos x \arccos x dx = \int_{-1}^1 \cos x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x \right) dx = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \cos x dx - \int_{-1}^1 \cos x \arcsin x dx,$$

利用公式 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

其中 $\cos x$ 为偶函数, $\arcsin x$ 为奇函数, 则 $\int_{-1}^1 \cos x \arcsin x dx = 0$, 于是

$$\int_{-1}^1 \cos x \arccos x dx = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \cos x dx = \pi \int_0^1 \cos x dx = \pi \sin x \Big|_0^1 = \pi \sin 1.$$

557 答案 (D).

经检验可知 $\frac{\tan x}{1+x^4}$, $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $e^x \cos x - e^{-x} \cos x$ 均为奇函数, 且 x^8 , $\sin^8 x$, $\tan^8 x$ 均为偶函数, 故

$$M = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{1+x^4} dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^8 dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^8 dx,$$

$$N = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^8 x dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \ln(x+\sqrt{x^2+1}) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^8 x dx,$$

$$P = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^8 x dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (e^x \cos x - e^{-x} \cos x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^8 x dx,$$

又知当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时, $\sin x < x < \tan x < 1$, 根据定积分的性质, 可得 $P > M > N$.

故正确选项为 (D).

评注

当积分区间为对称区间时, 应首先考虑被积函数的奇偶性, 以便简化运算.

558 答案 $2n$.

$\int_0^{n\pi} \sqrt{1-\sin^2 x} dx = \int_0^{n\pi} |\cos x| dx$, 显然 $|\cos x|$ 是以 π 为周期的函数,

所以 $\int_0^{n\pi} \sqrt{1-\sin^2 x} dx = \int_0^{n\pi} |\cos x| dx = n \int_0^{\pi} |\cos x| dx$

$$= n \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) dx \right] = n \left[\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right] = 2n.$$

559 答案 $\frac{\pi}{2}$.

因为 $\sin^2 x$ 与 $\tan x$ 均是以 π 为周期的函数, 所以

$$\begin{aligned} \int_a^{a+\pi} \sin^2 x (\tan x + 1) dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 x (\tan x + 1) dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 x \tan x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 x dx = 0 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

560 证明 利用三角函数的诱导公式做变量代换; $I_n = \frac{\pi^2}{4}$.

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx \stackrel{\text{令 } x=\frac{\pi}{2}-t}{=} - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx.$$

$$(2) \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x) dx,$$

$$\text{其中 } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x) dx \stackrel{\text{令 } x=\pi-t}{=} - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\pi-t)f(\sin t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi-t)f(\sin t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi-x)f(\sin x) dx,$$

$$\text{所以 } \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi-x)f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx.$$

因 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, 所以 $\frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}$ 是 $f(\sin x)$ 型的函数, 由 (2) 可知

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx,$$

$$\text{再由 (1) 可知 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x} dx,$$

$$\text{于是 } I_n = \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x} dx \right) = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x} dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

561 答案 $\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1+x^2) dx &= x \ln(1+x^2) \Big|_0^1 - \int_0^1 x d \ln(1+x^2) = \ln 2 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2} dx \\ &= \ln 2 - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \ln 2 - 2(x - \arctan x) \Big|_0^1 = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

562 答案 $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx &= x \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x d \arcsin x = \frac{\pi}{12} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2) = \frac{\pi}{12} + \sqrt{1-x^2} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1. \end{aligned}$$

563 答案 $-\frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 x \arccos x dx &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \arccos x d(x^2) \\&= \frac{1}{2} \left(x^2 \arccos x \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 x^2 d \arccos x \right) = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{x^2}{-\sqrt{1-x^2}} dx \\&= -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} \right) dx = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \left(\arcsin x \Big|_{-1}^1 - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

564 答案 $\frac{1}{3} \ln 2$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx &= \int_0^1 \ln(1+x) d\left(\frac{1}{2-x}\right) = \frac{\ln(1+x)}{2-x} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2-x} d \ln(1+x) \\&= \ln 2 + \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x-2)} dx = \ln 2 + \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\&= \ln 2 + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| \Big|_0^1 = \ln 2 + \frac{1}{3} (-\ln 2 - \ln 2) = \frac{1}{3} \ln 2.\end{aligned}$$

565 答案 $\frac{2}{5} (1 + e^{\frac{\pi}{2}})$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin 2x dx &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x d(e^{-x}) = -e^{-x} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos 2x dx \\&= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x d(e^{-x}) = -2 \left(e^{-x} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} d(\cos 2x) \right) \\&= -2 \left(-e^{-\frac{\pi}{2}} - 1 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin 2x dx \right) = 2(1 + e^{-\frac{\pi}{2}}) - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin 2x dx,\end{aligned}$$

移项, 解得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin 2x dx = \frac{2}{5} (1 + e^{-\frac{\pi}{2}})$.

评注

分部积分法可多次使用. 此题也可选用 $\sin 2x$ 凑微分做 v , 过程类似, 也需两次使用分部积分, 注意 u 和 v 的选择前后保持一致即可.

566 答案 $2 - \frac{4}{e}$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-\sqrt{x}} dx &\stackrel{\text{令 } \sqrt{x}=t}{=} \int_0^{-1} e^t \cdot 2t dt = 2 \int_0^{-1} t de^t = 2 \left(te^t \Big|_0^{-1} - \int_0^{-1} e^t dt \right) \\&= 2 \left(-e^{-1} - e^t \Big|_0^{-1} \right) = -4e^{-1} + 2 = 2 - \frac{4}{e}.\end{aligned}$$

评注

可综合使用换元法和分部积分法.

567 答案 $\frac{1}{16}(\pi^2 + 4).$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx &\stackrel{\text{令 } x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \frac{1-\cos 2t}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t dt - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t d(\sin 2t) = \frac{1}{4} t^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(\frac{1}{4} t \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt \\ &= \frac{\pi^2}{16} - \left(\frac{1}{8} \cos 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4} = \frac{1}{16}(\pi^2 + 4). \end{aligned}$$

568 答案 $\frac{16}{3}\pi - 2\sqrt{3}.$

$$\begin{aligned} \int_1^{16} \arctan \sqrt{\sqrt{x}-1} dx &\stackrel{\text{令 } \sqrt{\sqrt{x}-1}=t}{=} \int_0^{\sqrt{3}} \arctan t d[(t^2+1)^2] \\ &= (t^2+1)^2 \arctan t \Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} (t^2+1)^2 d \arctan t = \frac{16}{3}\pi - \int_0^{\sqrt{3}} (t^2+1) dt \\ &= \frac{16}{3}\pi - \left(\frac{1}{3}t^3 + t \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{16}{3}\pi - 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

569 答案 $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}.$

$$\begin{aligned} \text{方法一: } \int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} dx &\stackrel{\text{令 } \frac{1}{x}=t}{=} -\int_1^{\frac{1}{2}} t^3 e^t \cdot \frac{1}{t^2} dt = -\int_{\frac{1}{2}}^1 t e^t dt = -\int_{\frac{1}{2}}^1 t de^t \\ &= t e^t \Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 e^t dt = e - \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} - e^t \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{方法二: } \int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} dx = -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} d(e^{\frac{1}{x}}) = -\frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} \Big|_1^{\frac{1}{2}} + \int_1^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{x}} d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} + e + e^{\frac{1}{2}} \Big|_1^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}}.$$

570 答案 $-4\pi.$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx &\stackrel{\text{令 } \sqrt{x}=t}{=} \int_0^{\pi} 2t^2 \cos t dt = 2 \int_0^{\pi} t^2 d(\sin t) = 2 \left(t^2 \sin t \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2t \sin t dt \right) \\ &= 4 \int_0^{\pi} t d(\cos t) = 4 \left(t \cos t \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos t dt \right) = 4 \left(-\pi - \sin t \Big|_0^{\pi} \right) = -4\pi. \end{aligned}$$

571 答案 8.

$$\begin{aligned} \int_0^2 x f''(x) dx &= \int_0^2 x df'(x) = x f'(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 f'(x) dx \\ &= 2 f'(2) - f(x) \Big|_0^2 = 2 f'(2) - [f(2) - f(0)] = 2 \times 5 - 3 + 1 = 8. \end{aligned}$$

572 答案 (A).

由于 $F'(x) = e^{\sin(x+2\pi)} \sin(x+2\pi) - e^{\sin x} \sin x = 0$, 则 $F(x) \equiv C$,

$$\begin{aligned} \text{又 } F(0) &= \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t \, dt = -\int_0^{2\pi} e^{\sin t} d(\cos t) = -e^{\sin t} \cos t \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t \, d(e^{\sin t}) \\ &= \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \cos^2 t \, dt > 0, \quad (\because e^{\sin t} \cos^2 t > 0) \end{aligned}$$

于是 $F(x) \equiv C \equiv F(0) > 0$, 故正确选项为 (A).

573 答案 $e+1$.

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{\ln x f'(\ln x)}{x} dx &\stackrel{\text{令 } \ln x = t}{=} \int_0^1 t f'(t) dt = \int_0^1 t df(t) = t f(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(t) dt \\ &= f(1) - e^t \Big|_0^1 = f(1) - e + 1, \end{aligned}$$

$$\text{又 } f(x) = (e^x)^x = 2xe^{x^2}, \text{ 则 } f(1) = 2e, \text{ 代入上式得 } \int_1^e \frac{\ln x f'(\ln x)}{x} dx = 2e - e + 1 = e + 1.$$

574 答案 $\frac{5}{2} - \pi$.

令 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos x dx = I$, 则 $f(x) = x + 2I$, 两端同乘以 $\cos x$, 再积分, 得

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + 2I) \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d(\sin x) + 2I \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ &= x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + 2I \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2I = \frac{\pi}{2} - 1 + 2I, \end{aligned}$$

即 $I = \frac{\pi}{2} - 1 + 2I \Rightarrow I = 1 - \frac{\pi}{2}$, 于是 $f(x) = x + 2I = x + 2 - \pi$, 从而

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x + 2 - \pi) dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 + (2 - \pi) x \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + 2 - \pi = \frac{5}{2} - \pi.$$

575 答案 2.

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = x f(x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x df(x) = \pi f(\pi) - \int_0^{\pi} x f'(x) dx,$$

而 $f(\pi) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\pi - t} dt = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\pi - x} dx$, $f'(x) = \frac{\sin x}{\pi - x}$, 将 $f(\pi)$ 和 $f'(x)$ 代入上式:

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\pi - x} dx - \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{\pi - x} dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin x}{\pi - x} dx = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2.$$

评注

$f(x)$ 无法用初等函数表示, 但 $f'(x)$ 可以求得, 因此被积函数中含有变限积分时, 一般采用分部积分法.

576 答案 $\frac{1}{3e} - \frac{1}{6}$.

由 $f(x) = \int_1^x e^{-y^2} dy$, 得 $f'(x) = e^{-x^2}$, $f(1) = \int_1^1 e^{-y^2} dy = 0$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) d\left(\frac{1}{3}x^3\right) = \frac{1}{3}x^3 f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}x^3 f'(x) dx = \frac{1}{3}f(1) - \frac{1}{3}\int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx \\ &= \frac{1}{6}\int_0^1 x^2 d(e^{-x^2}) = \frac{1}{6}\left(x^2 e^{-x^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-x^2} d(x^2)\right) = \frac{1}{6}\left(e^{-1} + e^{-x^2}\Big|_0^1\right) = \frac{1}{3e} - \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

577 答案 $\ln 2$.

由 $f(x) = x - \int_0^x f'(t) \cos t dt$, 两边对 x 求导, 得 $f'(x) = 1 - f'(x) \cos x$

$$\text{解得 } f'(x) = \frac{1}{1 + \cos x}, \text{ 从而 } f(x) = \int \frac{1}{1 + \cos x} dx = \int \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} dx = \tan \frac{x}{2} + c,$$

又由条件可知 $f(0) = 0$, 于是 $c = 0$, 则 $f(x) = \tan \frac{x}{2}$,

$$\text{故 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan \frac{x}{2} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan \frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) = -2 \ln \cos \frac{x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -2 \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \ln 2.$$

578 答案 (D).

$$(A) \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_2^{+\infty} = +\infty, \text{ 发散.}$$

$$(B) \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \int_2^{+\infty} \ln x d \ln x = \frac{1}{2} \ln^2 x \Big|_2^{+\infty} = +\infty, \text{ 发散.}$$

$$(C) \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln x} d \ln x = \ln \ln x \Big|_2^{+\infty} = +\infty, \text{ 发散.}$$

$$(D) \int_2^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx = -\int_2^{+\infty} x de^{-x} = -xe^{-x} \Big|_2^{+\infty} + \int_2^{+\infty} e^{-x} dx = 2e^{-2} - e^{-x} \Big|_2^{+\infty} = 2e^{-2} + e^{-2} = 3e^{-2}, \text{ 收敛.}$$

利用洛必达法则求极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

故正确选项为 (D).

579 答案 $\frac{1}{\ln 2}$.

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln^2 x} d(\ln x) = -\frac{1}{\ln x} \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}.$$

580 答案 π .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+2)^2 + 1} d(x+2) = \arctan(x+2) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

581 答案 $\ln 2$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| \Big|_1^{+\infty} = \ln 2.$$

评注

注意, 下面这样运算是错误的.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x+1} dx = \ln|x| \Big|_1^{+\infty} - \ln|x+1| \Big|_1^{+\infty}$$

这是因为 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ 与 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+1} dx$ 都是发散的, 不能应用性质 3.

582 答案 $\frac{2}{3} - \frac{3}{8}\sqrt{3}.$

$$\begin{aligned} \int_3^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^4 \sqrt{x^2-2x}} dx &= \int_3^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^4 \sqrt{(x-1)^2-1}} dx \stackrel{\text{令 } x-1=\sec t}{=} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t \tan t}{\sec^4 t \tan t} dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t) d(\sin t) = \left(\sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} - \frac{3}{8}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

评注

可以看到, 经过变量代换, 无穷限反常积分转化为定积分了.

583 答案 $\frac{\pi}{2}.$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \stackrel{\text{令 } e^x=t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} \cdot \frac{1}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan t \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

评注

此题也可直接凑微分.

584 答案 $\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2}.$

在 $(0, +\infty)$ 内 e^{-x} 单调递减, 令 $e^{-x} = \frac{1}{2}$, 得 $x = \ln 2$,

$$\text{所以 } \min \left\{ e^{-x}, \frac{1}{2} \right\} = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \leq x < \ln 2 \\ e^{-x} & \ln 2 \leq x < +\infty \end{cases}, \text{ 则}$$

$$\int_0^{+\infty} \min \left\{ e^{-x}, \frac{1}{2} \right\} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{2} dx + \int_{\ln 2}^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{2} \ln 2 - e^{-x} \Big|_{\ln 2}^{+\infty} = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2}.$$

585 答案 $\ln 2.$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = - \int_1^{+\infty} \ln x d \left(\frac{1}{1+x} \right) = - \left(\frac{\ln x}{1+x} \right) \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x} d(\ln x)$$

利用洛必达法则求极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{x} dx = \ln \left| \frac{x}{x+1} \right|_1^{+\infty} = \ln 2.$$

586 答案 $\frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{1+x^2} \right) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \arctan x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

587 答案 $\frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{方法一: } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-1}} &= \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x^2} \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)^2}} = \int_1^{+\infty} \frac{-d\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)^2}} \\ &= -\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}x} \Big|_1^{+\infty} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{方法二: } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-1}} \stackrel{\text{令 } x=\frac{1}{\sqrt{2}}\sec t}{=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\sec t \tan t}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sec t \tan t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{4}.$$

588 答案 $\ln 2$.

方法一: 运用恒等变形.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{(e^x+1)^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(e^x+1)^2} d(e^x) = -\int_0^{+\infty} x d\left(\frac{1}{e^x+1}\right) \\ &= -\frac{x}{e^x+1} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1} dx = -\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} d(e^{-x}) = -\ln(1+e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} = \ln 2. \end{aligned}$$

└→ 分子分母都乘以 e^{-x}

方法二: 运用反常积分的定义.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{x}{1+e^{-x}} \right) \Big|_0^b - \int_0^b \frac{1}{1+e^{-x}} dx \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b}{1+e^{-b}} - \int_0^b \frac{e^x}{e^x+1} dx \right] = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b}{1+e^{-b}} - \ln(e^x+1) \Big|_0^b \right] \\ &= \ln 2 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b}{1+e^{-b}} - \ln(e^b+1) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b}{1+e^{-b}} - \ln(e^b+1) \right] &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^{-b}} [b - (1+e^{-b}) \ln(e^b+1)] \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln e^b - \ln(e^b+1) - e^{-b} \ln(e^b+1)] = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{e^b}{e^b+1} - \frac{\ln(e^b+1)}{e^b} \right] = \ln 1 - 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \ln 2.$$

评注

$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \int_0^{+\infty} x d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$, 此处不可直接应用分部积分, 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+e^{-x}} = +\infty$, 发散, 因此在方法二中, 先对 $\int_0^b x d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$ 用分部积分, 再求 $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$.

589 答案 (C).

$$\text{因 } \int_0^{+\infty} \sin 2x \cdot e^{|x|} dx = \int_0^{+\infty} e^x \sin 2x dx = \frac{1}{5} e^x (\sin 2x - 2 \cos 2x) \Big|_0^{+\infty},$$

而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{5} e^x (\sin 2x - 2 \cos 2x)$ 不存在, 则 $\int_0^{+\infty} \sin 2x \cdot e^{|x|} dx$ 发散, 所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin 2x \cdot e^{|x|} dx$ 也发散.

故正确选项为 (C).

590 答案 发散.

当 $x > 1$ 时, 有 $\frac{1}{x} < \frac{1}{\ln x}$, 且 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ 发散,

由比较判别法知, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln x} dx$ 发散.

评注

此题应用了当 $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx (a > 0)$, 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散的结论.

591 答案 收敛.

由性质 1 可知: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ 与 $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ 有相同的敛散性.

而当 $x \geq 1$ 时, 有 $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$, 且 $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_1^{+\infty} = e^{-1}$, 收敛,

根据比较判别法知: $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ 收敛, 所以 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ 也收敛.

592 答案 $c = \frac{5}{2}$.

$$\text{因 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{c}{x} \right)^x}{\left(1 - \frac{c}{x} \right)^x} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{c}{x} \right)^{\frac{x}{c} \cdot c}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{c}{x} \right)^{-\frac{x}{c} \cdot (-c)}} = \frac{e^c}{e^{-c}} = e^{2c},$$

$$\text{又 } \int_{-\infty}^c te^{2t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^c t d(e^{2t}) = \frac{1}{2} te^{2t} \Big|_{-\infty}^c - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^c e^{2t} dt = \frac{1}{2} ce^{2c} - \frac{1}{4} e^{2t} \Big|_{-\infty}^c = \left(\frac{1}{2} c - \frac{1}{4} \right) e^{2c},$$

由题设可知: $e^{2c} = \left(\frac{1}{2}c - \frac{1}{4}\right)e^{2c}$, 解得 $c = \frac{5}{2}$.

593 答案 (C).

(A) 因 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq \infty$, 不是瑕积分.

(B) 因 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \neq \infty$, 不是瑕积分.

(C) 因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \infty$, $x = 0$ 是瑕点.

(D) 因 $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \int_0^1 x^2 dx$, 不是瑕积分.

故正确选项为 (C).

评注

选项 (A) (B) 的被积函数 $f(x)$ 虽然在 $x = 0$ 无定义, 但若补充定义 (A) $f(0) = 1$, (B) $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续, 因而 (A)(B) 均为定积分.

594 答案 (B).

因 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x = 0 \neq \infty$, 不是瑕积分,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x \ln^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln^2 x d(x^2) = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \ln x d(x^2) = -\frac{1}{2} x^2 \ln x \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{4} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

故正确选项为 (B).

595 答案 $\frac{\pi}{2}$.

$$x = a \text{ 为瑕点, 且 } \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \stackrel{\text{令 } x=a \sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a \cos t}{a \cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}.$$

评注

经变量代换无界函数的反常积分可以转化为定积分.

596 答案 1.

$x = 0$ 是瑕点.

$$\text{方法一: } \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{\ln x} \Big|_0^{\frac{1}{e}} = 1.$$

$$\text{方法二: } \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x(\ln x)^2} \stackrel{\text{令 } \ln x = t}{=} \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{e^t} \cdot e^t dt = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} \Big|_{-\infty}^{-1} = 1.$$

评注

方法二说明经变量代换无界函数的反常积分与无穷限的反常积分可以相互转化.

597 答案 $p < 1$ 时收敛, $p \geq 1$ 时发散.

$x=a$ 是瑕点.

当 $p=1$ 时, $\int_a^b \frac{dx}{x-a} = \ln(x-a) \Big|_a^b = \ln(b-a) - \lim_{x \rightarrow a^+} \ln(x-a) = +\infty$, 发散.

当 $p \neq 1$ 时, $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \frac{(x-a)^{1-p}}{1-p} \Big|_a^b = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}, & p < 1 \\ +\infty, & p \geq 1 \end{cases}$.

综上, 瑕积分 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ 当 $p < 1$ 时收敛于 $\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$, 当 $p \geq 1$ 时发散.

评注

此结论经常用到, 可作为公式使用.

598 答案 0.

$x=0$ 是瑕点, $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2+1} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx$.

其中, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx \stackrel{\Phi x=\frac{1}{t}}{=} \int_1^0 \frac{-\ln t}{\left(\frac{1}{t^2}\right)^2+1} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_1^0 \frac{\ln t}{t^2+1} dt = -\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2+1} dx$,

所以 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx = 0$.

599 答案 (D).

$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^e \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}} dx + \int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x} dx$,

因为 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 所以瑕积分 $\int_1^e \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}} dx$ 与无穷限积分 $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x} dx$ 均收敛. 而

当 $\alpha-1 < 1$, 即 $\alpha < 2$ 时, $\int_1^e \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}} dx$ 收敛 $\left. \begin{array}{l} \text{当 } \alpha+1 > 1, \text{ 即 } \alpha > 0 \text{ 时, } \int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x} dx \text{ 收敛} \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < \alpha < 2$, 故正确选项为 (D).

600 答案 (D).

(A) 因 $\int_2^{+\infty} \frac{x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_2^{+\infty} \frac{1}{1-x^2} d(1-x^2) = -\frac{1}{2} \ln|1-x^2| \Big|_2^{+\infty} = \infty$, 发散, 所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1-x^2} dx$ 也发散.

(B) 因 $\int_0^{+\infty} \sin x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \sin x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-\cos x) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (1 - \cos b)$, 而 $\lim_{b \rightarrow +\infty} \cos b$ 不存在, 所以 $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ 发散, 从而 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$ 也发散.

(C) 因 $x=0$ 是瑕点, $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_0^1 = \infty$, 发散, 所以 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$ 也发散.

故正确选项为 (D).

评注

(1) 反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 不能视为对称区间上的积分.

(2) Γ 函数 $\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x} dx$ ($r > 0$), 且有 $\Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

第 6 章 定积分的应用

601 答案 $\frac{16}{3}$.

如图, 交点有 $(0,0), (4,0), (4,2)$.

方法一: 看成 X 型区域, 不用分割.

$$S = \int_0^4 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{16}{3}.$$

方法二: 看成 Y 型区域, 不用分割.

$$S = \int_0^2 (4 - y^2) dy = \left(4y - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$

602 答案 $\frac{7}{6}$.

如图, 交点有 $(-1,0), (0,1), (0,0), (1,1)$.

将该平面图形看成 Y 型区域.

$$\begin{aligned} \text{面积 } S &= \int_0^1 [\sqrt{y} - (y-1)] dy \\ &= \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} y^2 + y \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

603 答案 $\frac{1}{2}$.

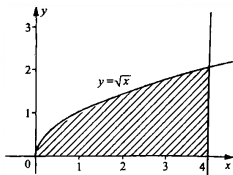
如图, 交点有 $(-1,-1), (1,1), (0,0)$. 将第一象限的图形看成 X 型区域, 且图形对称, 则

$$S = 2 \int_0^1 (x - x^3) dx = 2 \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^1 = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}.$$

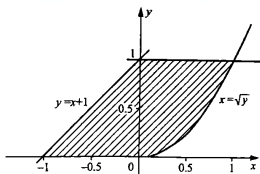
604 答案 $\frac{4}{3}$.

如图, 交点有 $(2,0), (0,4)$. 将该平面图形看成 X 型区域, 则

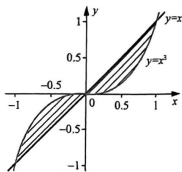
$$S = \int_0^2 [(4 - x^2) - (4 - 2x)] dx = \left(x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$



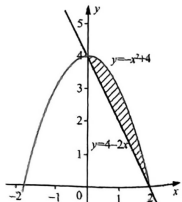
601 题 - 图



602 题 - 图



603 题 - 图

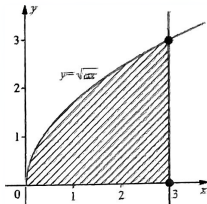


604 题 - 图

605 答案 3.

如图, 交点有 $(0,0), (3,0), (3, \sqrt{3a})$. 将该平面图形看成 X 型区域,

$$S = \int_0^3 \sqrt{ax} dx = \sqrt{a} \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3 = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{a} = 6, \text{ 故 } a = 3.$$

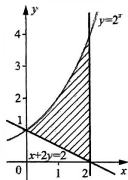


605 题 - 图

606 答案 $\frac{3}{\ln 2} - 1$.

如图, 交点有 $(0,1), (2,0), (2,4)$. 将该平面图形看成 X 型区域, 则

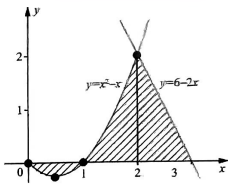
$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \left[2^x - \left(1 - \frac{x}{2} \right) \right] dx \\ &= \left(\frac{2^x}{\ln 2} - x + \frac{x^2}{4} \right) \Big|_0^2 = \frac{3}{\ln 2} - 1. \end{aligned}$$



606 题 - 图

607 答案 2.

如图, 交点有 $(0,0), (1,0), (2,2), (3,0)$.



607 题 - 图

$$\begin{aligned} \text{看成 } X \text{ 型区域, } S &= \int_0^1 [0 - (x^2 - x)] dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx + \int_2^3 (6 - 2x) dx \\ &= \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_1^2 + (6x - x^2) \Big|_2^3 = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + 1 = 2. \end{aligned}$$

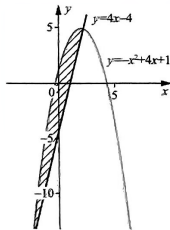
评注

本题也可以将平面图形看成 Y 型区域, 但是也需要将其分割.

608 答案 $\frac{20\sqrt{5}}{3}$.

$y = x^2$ 在点 $(2,4)$ 处的切线方程为 $y = 4x - 4$. 此切线与曲线 $y = -x^2 + 4x + 1$ 所围的平面图形 (如图) 交点有 $(\sqrt{5}, 4\sqrt{5} - 4)$, $(-\sqrt{5}, -4\sqrt{5} - 4)$.

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} [(1 + 4x - x^2) - (4x - 4)] dx = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (5 - x^2) dx \\ &= \left(5x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} = \left(5\sqrt{5} - \frac{5\sqrt{5}}{3} \right) - \left(-5\sqrt{5} + \frac{5\sqrt{5}}{3} \right) = \frac{20}{3} \sqrt{5}. \end{aligned}$$

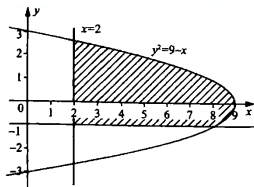


608 题 - 图

609 答案 $\frac{14\sqrt{7}}{3} + \frac{20}{3}$.

如图, 交点有 $(2,-1), (8,-1), (2, \sqrt{7})$. 将平面图形看成 Y 型区域, 则

$$S = \int_{-1}^{\sqrt{7}} [(9 - y^2) - 2] dy = \int_{-1}^{\sqrt{7}} (7 - y^2) dy = \left(7y - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_{-1}^{\sqrt{7}} = \frac{14\sqrt{7}}{3} + \frac{20}{3}.$$



609 题 - 图

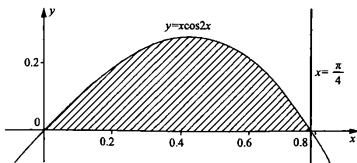
评注

本题也可以先计算出曲线 $y^2 = 9 - x$ 与直线 $x = 2$ 所围成的平面图形的面积, 其值为 $2 \int_2^9 \sqrt{9-x} dx = \frac{28\sqrt{7}}{3}$, 再减去该平面图形的下面部分 (面积小的那部分) 的面积 $\int_2^8 [-1 - (-\sqrt{9-x})] dx = \int_2^8 [\sqrt{9-x} - 1] dx = \frac{14\sqrt{7} - 20}{3}$, 所以 $S = \frac{28\sqrt{7}}{3} - \frac{14\sqrt{7} - 20}{3} = \frac{14\sqrt{7} + 20}{3}$.

610 答案 $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$.

如图, 交点有 $(0,0), (\frac{\pi}{4}, 0)$. 将该平面图形看成 X 型区域, 则

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x d(\sin 2x) \\ &= \frac{1}{2} [x \sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

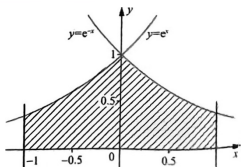


610 题 - 图

611 答案 $2 - 2e^{-1}$.

如图, 交点有 $(-1, e^{-1}), (0,1), (1, e^{-1})$. 将第一象限的图形看成 X 型区域, 由对称性得

$$S = 2 \int_0^1 e^{-x} dx = 2(-e^{-x})_0^1 = 2(1 - e^{-1}).$$

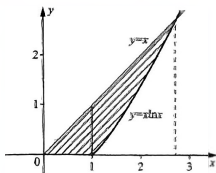


611 题 - 图

612 $\frac{1}{4}(e^2 - 1)$.

如图, 交点有 $(1, 0), (e, e), (0, 0)$. 将该平面图形看成 X 型区域,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 x dx + \int_1^e (x - x \ln x) dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 + \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^e + \int_1^e (-x \ln x) dx \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \int_1^e \ln x d(x^2) = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} [(\ln x \cdot x^2) \Big|_1^e - \int_1^e x dx] \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} [e^2 - \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^e] = \frac{1}{4} (e^2 - 1). \end{aligned}$$



612 题 - 图

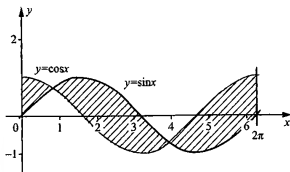
评注

本题也可以先计算出直线 $y=x$, 直线 $x=e$ 与 x 轴所围成的直角三角形的面积, 其值为 $\frac{1}{2} \cdot e \cdot e = \frac{1}{2} e^2$, 再减去由曲线 $y=x \ln x (1 \leq x \leq e)$, 直线 $x=e$ 与 x 轴所围成的曲边

三角形的面积 $\int_1^e x \ln x dx \stackrel{\text{分部积分}}{=} \frac{1}{2} \int_1^e \ln x d(x^2) = \frac{1}{4} (e^2 + 1)$, 所以 $S = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 + 1}{4} = \frac{e^2 - 1}{4}$.

613 答案 $4\sqrt{2}$.

如图, 交点有 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. 将该平面图形看成 X 型区域, 分别以 $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}$ 为边界将该平面图形分成 3 部分, 则



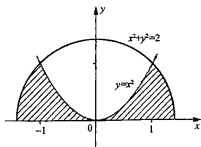
613 题 - 图

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} (\cos x - \sin x) dx \\ &= (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x - \sin x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + (\sin x + \cos x) \Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} = 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

614 答案 $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$.

如图, 交点有 $(-1, 1), (1, 1)$. 将该平面图形在第一象限的部分看成 Y 型区域, 由对称性得

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^1 (\sqrt{2-y^2} - \sqrt{y}) dy = 2 \int_0^1 \sqrt{2-y^2} dy - 2 \int_0^1 \sqrt{y} dy \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2-y^2} dy - 2 \cdot \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 \stackrel{\text{令 } y=\sqrt{2} \sin t}{=} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} \cos t d(\sqrt{2} \sin t) - \frac{4}{3} \end{aligned}$$



614 题 - 图

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos^2 t dt - \frac{4}{3} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt - \frac{4}{3} \\
 &= 2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{4}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

评注

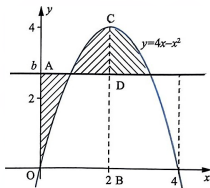
本题解法较多, 可以用上半个圆的面积减去夹在圆与抛物线间的图形面积, 即 $S = \pi - \int_{-1}^1 (\sqrt{2-x^2} - x^2) dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$. 也可以考虑把平面图形看成 X 型区域, $S = 2 \int_0^1 x^2 dx + 2 \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$.

615 答案 $\frac{8}{3}$.

如图, 交点有 $(0,0), (2-\sqrt{4-b}, b), (2+\sqrt{4-b}, b)$.

抛物线 $y = 4x - x^2$ 与直线 $y = b (b > 0)$ 所围成的平面图形关于 $x=2$ 对称, 又由抛物线 $y = 4x - x^2$, y 轴和直线 $y = b (b > 0)$ 所围成的平面图形的面积是仅由抛物线 $y = 4x - x^2$ 及直线 $y = b$ 所围图形面积的一半, 所以矩形 $AOBD$ 的面积和曲边梯形 OCB 的面积相等, 而矩形 $AOBD$ 的面积为 $2b$, 故

$$2b = \int_0^2 (4x - x^2) dx = \left(2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{16}{3}, \text{ 所以 } b = \frac{8}{3}.$$



615 题 - 图

评注

本题是利用矩形 $AOBD$ 的面积和曲边梯形 OCB 的面积相等而求出 b 的值, 计算非常简单. 但如果利用两个阴影部分面积相等, 即

$\int_0^{2-\sqrt{4-b}} [b - (4x - x^2)] dx = \int_{2-\sqrt{4-b}}^2 (4x - x^2 - b) dx$, 计算量比较大, 计算 b 的值很困难.

616 答案 $S = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - \frac{3}{4}$.

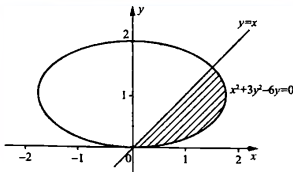
如图, 交点有 $(0,0), \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$. 将阴影部分看成 Y 型区域,

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{\frac{3}{2}} (\sqrt{6y-3y^2} - y) dy = \int_0^{\frac{3}{2}} (\sqrt{3-3(1-y)^2} - y) dy = \sqrt{3} \int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{1-(1-y)^2} dy - \int_0^{\frac{3}{2}} y dy \\
 &= \sqrt{3} \int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{1-(1-y)^2} dy - \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3} \int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{1-(1-y)^2} dy - \frac{9}{8}.
 \end{aligned}$$

$$\text{令 } 1-y = \sin t, \text{ 则 } \sqrt{3} \int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{1-(1-y)^2} dy = \sqrt{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^2 t) dt$$

$$= \sqrt{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + \frac{3}{8},$$

$$\text{所求面积 } S = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + \frac{3}{8} - \frac{9}{8} = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - \frac{3}{4}.$$



616题-图

评注

用定积分求平面图形的面积,一般先作出图形的草图,由曲线方程确定出交点坐标,这时若把平面图形看成 X 型区域,则积分的上、下限与交点的横坐标有关;若把平面图形看成 Y 型区域,则积分的上、下限与交点的纵坐标有关.

617 答案 (1) $p = -\frac{4}{5}, q = 3$; (2) $S = \frac{225}{32}$.

如图,抛物线与 x 轴的交点为 $(0,0), \left(-\frac{q}{p}, 0\right)$.

$$\text{面积 } S = \int_0^{-\frac{q}{p}} (px^2 + qx) dx = \left(\frac{p}{3} x^3 + \frac{q}{2} x^2 \right) \Big|_0^{-\frac{q}{p}} = \frac{q^3}{6p^2}.$$

又直线 $x+y=5$ 与抛物线相切,设切点为 (x_0, y_0) , 则

$$\begin{cases} x_0 + y_0 = 5 \\ px_0^2 + qx_0 = y_0 \\ 2px_0 + q = -1 \end{cases}$$

解得 $x_0 = \frac{-1-q}{2p}, y_0 = 5 + \frac{1+q}{2p}, p \left(\frac{-1-q}{2p} \right)^2 + q \frac{-1-q}{2p} = 5 + \frac{1+q}{2p}$, 化简得

$$p = -\frac{1}{20}(1+q)^2.$$

所以 $S(q) = \frac{q^3}{6p^2} = \frac{q^3}{6} \cdot \frac{400}{(1+q)^4} = \frac{200q^3}{3(1+q)^4}$, $S'(q) = \frac{200q^2(3-q)}{3(1+q)^5}$.

令 $S'(q) = \frac{200q^2(3-q)}{3(1+q)^5} = 0$ ($q > 0$), 得驻点为 $q = 3$.

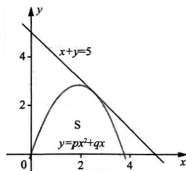
当 $0 < q < 3$ 时, $S'(q) > 0$, 当 $q > 3$ 时, $S'(q) < 0$. 故 $q = 3$ 是 $S(q) = \frac{200q^3}{3(1+q)^4}$ 的极大值点,

又是唯一的极值点, 所以 $q = 3$, $p = -\frac{4}{5}$ 时, $S(q) = \frac{200q^3}{3(1+q)^4}$ 最大, 最大值为 $S(3) = \frac{225}{32}$.

618 答案 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

设点 P 坐标为 (x_0, y_0) , 如图, 交点有 $(x_0, y_0), (1, y_0)$, 其中 $y_0 = x_0^2$.

$$S = \int_0^{x_0} (x_0^2 - x^2) dx + \int_{x_0}^1 (x^2 - x_0^2) dx = \frac{4}{3} x_0^3 - x_0^2 + \frac{1}{3} \quad (0 \leq x_0 \leq 1).$$



617题-图

令 $S'(x_0) = 4x_0^2 - 2x_0 = 0$, 得驻点 $x_0 = \frac{1}{2}, x_0 = 0$.

又 $S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, S(0) = \frac{1}{3}, S(1) = \frac{2}{3}$, 比较大小, 可知阴影部分在 $x_0 = \frac{1}{2}$ 时, 面积最小. 所以点 P 为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

619 答案 两条公切线方程分别为 $y = 4x - 4, y = 0$, 面积为 $\frac{4}{3}$.

设公切线与抛物线 $y = x^2$ 的切点为 (t, t^2) , 则公切线方程为 $y - t^2 = 2t(x - t) \Rightarrow y = 2tx - t^2$.

设公切线与抛物线 $y = -x^2 + 4x - 4$ 的切点为 $(p, -p^2 + 4p - 4)$, 则公切线方程为 $y + p^2 - 4p + 4 = (-2p + 4)(x - p) \Rightarrow y = (-2p + 4)x + p^2 - 4$.

从而 $\begin{cases} 2t = -2p + 4 \\ -t^2 = p^2 - 4 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} p = 0 \\ t = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} p = 2 \\ t = 0 \end{cases}$.

则公切线与 $y = x^2$ 的切点为 $(2, 4), (0, 0)$, 公切线与 $y = -x^2 + 4x - 4$ 的切点为 $(0, -4), (2, 0)$, 所以有两条公切线, 方程为 $y = 0$ 和 $y = 4x - 4$.

所围图形的面积

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 \left(\frac{y+4}{4} - \sqrt{y} \right) dy + \int_{-4}^0 \left(2 - \sqrt{-y} - \frac{y+4}{4} \right) dy \\ &= \left(\frac{1}{8}y^2 + y - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^4 + 2y \Big|_{-4}^0 + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-4}^0 - \left(\frac{1}{8}y^2 + y \right) \Big|_{-4}^0 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

620 答案 $a = -3, b = 5, c = 0$.

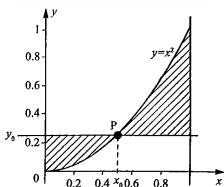
因 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $(0, 0)$ 和 $(1, 2)$, 得: $c = 0, a + b = 2$.

由 $a < 0$, 知 $y = ax^2 + bx$ 开口向下; 又抛物线 $y = -x^2 + 2x = 1 - (x-1)^2$ 开口向下, 过点 $(0, 0)$ 和 $(2, 0)$, 且顶点为 $(1, 1)$, 而 $y = ax^2 + bx$ 在 $x = 1$ 时, $y = a + b = 2 > 1$, 即当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 抛物线 $y = ax^2 + bx$ 在 $y = -x^2 + 2x$ 上方.

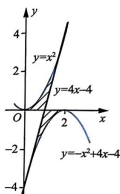
设两抛物线的另一个交点为 $(x_0, -x_0^2 + 2x_0)$, 代入 $y = ax^2 + bx$

中, 解得 $x_0 = \frac{a}{1+a}$ ($a \neq -1$) (否则两抛物线不能围成平面图形), 所围图形 (见图 620 图) 面积

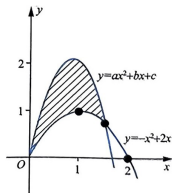
$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{a}{1+a}} [ax^2 + bx - (-x^2 + 2x)] dx \\ &= \int_0^{\frac{a}{1+a}} [ax^2 + (2-a)x + x^2 - 2x] dx = -\frac{a^3}{6(1+a)^2}. \end{aligned}$$



618 题 - 图



619 题 - 图



620 题 - 图

令 $\frac{dS}{da} = -\frac{a^2(a+3)}{6(1+a)^3} = 0$, 解得 $a = -3$ ($a = 0$ 舍去), $a < -3, \frac{dS}{da} < 0$; $-3 < a < -1, \frac{dS}{da} > 0$,

即 $a = -3$ 是极小值点, 又是 $(-\infty, 0)$ 内唯一的驻点, 所以

$a = -3$ 是面积的最小值点, 故 $a = -3, b = 5, c = 0$.

621 答案 $\pi \left(\frac{a^2}{2} + b^2 \right)$.

曲线 $\rho = a \cos \theta + b$ ($b \geq a > 0$) 所围平面图形如图.

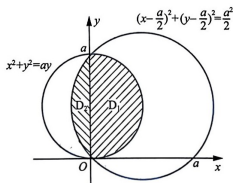
$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos \theta + b)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 \theta + b^2 + 2ab \cos \theta) d\theta = \frac{1}{2} [b^2 \theta + 2ab \sin \theta]_0^{2\pi} + \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \pi b^2 + \frac{a^2}{2} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = \pi \left(\frac{a^2}{2} + b^2 \right). \end{aligned}$$

622 答案 $\frac{\pi-1}{4} a^2$.

$$\rho = a \sin \theta \Leftrightarrow \rho^2 = a \rho \sin \theta \Leftrightarrow x^2 + y^2 = ay, \text{ 即 } x^2 + \left(y - \frac{a}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{4},$$

$$\text{同理, } \rho = a(\cos \theta + \sin \theta) \Leftrightarrow \rho^2 = a \rho(\cos \theta + \sin \theta) \Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{a}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{2}.$$

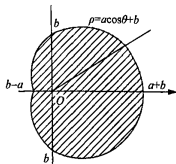
如图, 将公共部分分成 D_1 和 D_2 两部分, 显然 $S_{D_1} = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{\pi a^2}{8}$, 而



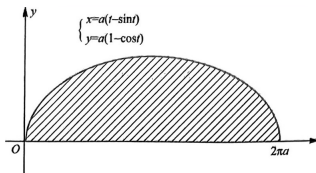
622 题 - 图

$$\begin{aligned} S_{D_2} &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (a \sin \theta + a \cos \theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (1 + 2 \sin \theta \cos \theta) d\theta = \frac{1}{2} a^2 \left(\theta \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} 2 \sin \theta d\sin \theta \right) \\ &= \frac{1}{2} a^2 \left(\frac{\pi}{4} + \sin^2 \theta \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \right) = \frac{1}{2} a^2 \left[\frac{\pi}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - 1 \right] = \frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{故所求面积 } S = S_{D_1} + S_{D_2} = \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{4} = \frac{(\pi-1)a^2}{4}.$$



621 题 - 图

623 答案 $3\pi a^2$.

623 题 - 图

$$\begin{aligned}
 \text{如图 } S &= \int_a^\beta y(t)x'(t)dt = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)(a(t - \sin t))'dt \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = a^2(t - 2\sin t)\Big|_0^{2\pi} + a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\
 &= 2\pi a^2 + a^2 \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.
 \end{aligned}$$

624 答案 $P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{3}\right)$.

如图, 设点 P 的坐标 $P(x, y) = (\cos t, 2\sin^2 t)$, $S = S_1 + S_2$, 其中

$$S_1 = \frac{1}{2}xy = \cos t \sin^2 t.$$

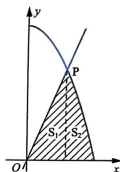
$$S_2 = \int_{\cos t}^1 y dx = \int_{\cos t}^1 2(1 - x^2) dx = 2 \left(x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{\cos t}^1 = \frac{4}{3} - 2\cos t + \frac{2}{3}\cos^3 t.$$

所以 $S = \cos t \sin^2 t + \frac{4}{3} - 2\cos t + \frac{2}{3}\cos^3 t$, 从而 $\frac{dS}{dt} = 2\sin t - \sin^3 t$,

$$\text{令 } \frac{d^2S}{dt^2} = \cos t(2 - 3\sin^2 t) = 0, \text{ 得 } t = \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}, t = \frac{\pi}{2}.$$

由于 $\frac{dS}{dt} \Big|_{t=0} = 0$, $\frac{dS}{dt} \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1$, $\frac{dS}{dt} \Big|_{t=\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{32}{27}} > 1$, 所以当 $t = \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}$ 时, $\frac{dS}{dt}$ 取得最

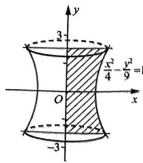
大值, $P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{3}\right)$.



624 题 - 图

625 答案 32π .

$$\begin{aligned}
 \text{如图, } V_y &= \int_{-3}^3 \pi(x)^2 dy = \pi \int_{-3}^3 4 \left(1 + \frac{y^2}{9} \right) dy = 8\pi \int_0^3 \left(1 + \frac{y^2}{9} \right) dy \\
 &= 8\pi \left(y + \frac{y^3}{27} \right) \Big|_0^3 = 32\pi.
 \end{aligned}$$



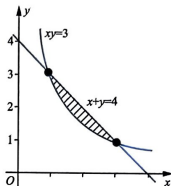
625 题 - 图

626 答案 $\frac{8\pi}{3}$.

平面图形如图, 交点有 (1,3) 和 (3,1).

$$\text{方法一: } V_x = \int_1^3 \left[\pi(4-x)^2 - \pi\left(\frac{3}{x}\right)^2 \right] dx = \left[-\frac{1}{3}\pi(4-x)^3 + \frac{9\pi}{x} \right]_1^3 = \frac{8\pi}{3}.$$

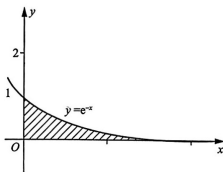
$$\begin{aligned} \text{方法二: } V_x &= 2\pi \int_1^3 \left[y(4-y) - y\left(\frac{3}{y}\right) \right] dy = 2\pi \int_1^3 (4y - y^2 - 3) dy \\ &= 2\pi \left(2y^2 - \frac{1}{3}y^3 - 3y \right) \Big|_1^3 = \frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$



626 题 - 图

627 答案 $\frac{\pi}{2}, 2\pi$.

$$\text{如图, } V_x = \int_0^{+\infty} \pi(e^{-x})^2 dx = \pi \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \pi \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

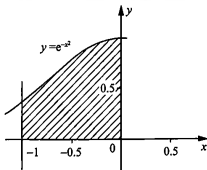


627 题 - 图

$$V_y = 2\pi \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = -2\pi \int_0^{+\infty} x d(e^{-x}) = -2\pi (x e^{-x} + e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} = 2\pi.$$

628 答案 $\pi(1-e^{-1})$.

$$\text{如图, } V_y = 2\pi \int_{-1}^0 |x| e^{-x^2} dx = -2\pi \int_{-1}^0 x e^{-x^2} dx = \pi e^{-x^2} \Big|_{-1}^0 = \pi(1-e^{-1}).$$

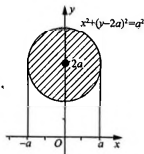


628 题 - 图

$$\text{或 } V_y = \pi \cdot 1^2 \cdot e^{-1} + \pi \int_{e^{-1}}^1 (-\sqrt{-\ln y})^2 dy = \pi \cdot e^{-1} + \pi \int_{e^{-1}}^1 (-\ln y) dy = \pi(1-e^{-1}).$$

629 答案 $4\pi^2 a^3$.

$$\begin{aligned} \text{如图, } V_x &= \pi \int_{-a}^a [(2a + \sqrt{a^2 - x^2})^2 - (2a - \sqrt{a^2 - x^2})^2] dx \\ &= 8a\pi \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 8a\pi \cdot \frac{\pi a^2}{2} = 4\pi^2 a^3. \end{aligned}$$



629 题 - 图

630 答案 $\pi\left(2 - \frac{2}{3}e\right), \pi\left(\frac{e^2}{6} - \frac{1}{2}\right).$

如图, 设切点坐标为 $(x_0, \ln x_0)$, 切线方程为

$$y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0), \text{ 即 } y = \frac{1}{x_0}x - 1 + \ln x_0.$$

因切线过原点, 将 $x=0, y=0$ 代入上式 $\Rightarrow x_0 = e$, 故切点为 $(e, 1)$.

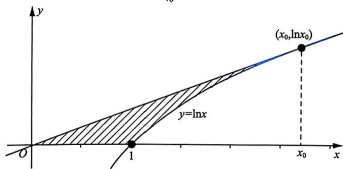
切线方程为 $y = \frac{1}{e}x$.

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^e \left(\frac{1}{e}x\right)^2 dx - \pi \int_1^e (\ln x)^2 dx = \frac{\pi}{3}e - \pi \left[x(\ln x)^2 \right]_1^e + 2 \int_1^e \pi \ln x dx \\ &= \frac{\pi}{3}e - \pi e + 2\pi [x \ln x - x]_1^e = \pi \left(2 - \frac{2}{3}e \right). \end{aligned}$$

$$\text{或 } V_x = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot e - \int_1^e \pi (\ln x)^2 dx = \frac{\pi}{3}e - \pi \left[x(\ln x)^2 \right]_1^e + 2 \int_1^e \pi \ln x dx = \pi \left(2 - \frac{2}{3}e \right).$$

$$V_y = 2\pi \int_0^e x \cdot \frac{1}{e} x dx - 2\pi \int_1^e x \ln x dx = \frac{2\pi}{3}e^2 - 2\pi \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 \right]_1^e = \pi \left(\frac{e^2}{6} - \frac{1}{2} \right).$$

$$\text{或 } V_y = \pi \int_0^1 [(e^y)^2 - (ey)^2] dy = \pi \left[\frac{1}{2}e^{2y} - \frac{e^2}{3}y^3 \right]_0^1 = \pi \left(\frac{e^2}{6} - \frac{1}{2} \right).$$



630 题 - 图

631 答案 $\frac{\pi}{4}.$

$$\text{所求体积为 } V_x = \pi \int_0^{+\infty} (xe^{-x})^2 dx = \pi \int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x} dx \stackrel{\text{令 } t=2x}{=} \frac{\pi}{8} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt,$$

$$\text{由 } \Gamma\text{-函数知, } \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = \Gamma(3) = 2, \text{ 所以 } V_x = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

632 答案 $\frac{4\pi}{3}, 2\pi^2 + \frac{16\pi}{3}.$

为了求 V_x , 需要知道 $y = x^2 - 4x + 3$ 与下半圆的大小, 因为

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - (x-2)^2} + x^2 - 4x + 3 &= \sqrt{1 - (x-2)^2} - [1 - (x-2)^2] \\ &= \sqrt{1 - (x-2)^2} (1 + \sqrt{1 - (x-2)^2}) \geq 0, \end{aligned}$$

所以 $x^2 - 4x + 3 \geq -\sqrt{1 - (x-2)^2}$ (下半圆), 如图, 交点有 $(1, 0)$ 和 $(3, 0)$.

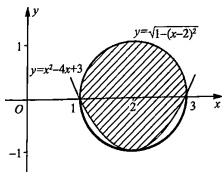
$$\text{故 } V_x = \int_1^3 \pi [\sqrt{1-(x-2)^2}]^2 dx = \pi \int_1^3 [1-(x-2)^2] dx = \pi \left[x - \frac{1}{3}(x-2)^3 \right] \Big|_1^3 = \frac{4\pi}{3}.$$

$$V_y = 2\pi \int_1^3 x \sqrt{1-(x-2)^2} dx + 2\pi \int_1^3 x |x^2 - 4x + 3| dx.$$

$$\text{其中, } \int_1^3 x \sqrt{1-(x-2)^2} dx \stackrel{\text{令 } t=x-2}{=} \int_{-1}^1 (t+2) \sqrt{1-t^2} dt = 0 + 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \pi,$$

$$\int_1^3 x |x^2 - 4x + 3| dx = \int_1^3 x (4x - x^2 - 3) dx = \frac{8}{3},$$

$$\text{所以, } V_y = 2\pi^2 + \frac{16\pi}{3}.$$



632 题 - 图

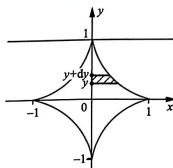
633 答案 $\frac{3\pi^2}{4}$.

如图, 由于图形关于 y 轴对称, 所以只考察 y 轴右侧部分绕直线 $y=1$ 旋转所成立体的体积 V_1 , 则 $V=2V_1$.

选取 $y \in [-1, 1]$ 作为积分变量, 任取 y 轴上 $[y, y+dy] \subset [-1, 1]$ 对应的小横条, 它绕直线 $y=1$ 旋转的旋转体的体积微元为 $dV_1 = 2\pi(1-y)xdy$, 所以

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_{-1}^1 2\pi(1-y)xdy = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^3 t) \cos^3 t d(\sin^3 t) \\ &= 6\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^3 t) \cos^4 t \sin^2 t dt \stackrel{\text{对称性}}{=} 12\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin^2 t dt \\ &= 12\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t - \cos^6 t) dt = 12\pi \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

$$\text{则所求体积为 } V = 2V_1 = \frac{3\pi^2}{4}.$$



633 题 - 图

评注

此处使用了华里士 (Wallis) 公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t dt = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2};$$

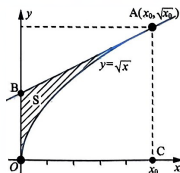
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 1.$$

634 答案 (1) $A(1,1)$; (2) $y = \frac{1}{2}(x+1)$; (3) $\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{30}$.

(1) 如图, 设切点坐标 $A(x_0, \sqrt{x_0})$, 则过点 A 的切线方程为

$$y - \sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) \Rightarrow y = \frac{x}{2\sqrt{x_0}} + \frac{1}{2}\sqrt{x_0}.$$

求得切线与 y 轴交点为 $(0, \frac{\sqrt{x_0}}{2})$, 所以



634 题 - 图

$$S = \int_0^{x_0} \left(\frac{x}{2\sqrt{x_0}} + \frac{\sqrt{x_0}}{2} - \sqrt{x} \right) dx = \left(\frac{x^2}{4\sqrt{x_0}} + \frac{\sqrt{x_0}}{2}x - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \right) \Big|_0^{x_0} = \frac{1}{12}(x_0)^{\frac{3}{2}},$$

已知 $S = \frac{1}{12}$, 即 $\frac{1}{12}(x_0)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{12} \Rightarrow x_0 = 1$, 故 A 点坐标为 $(1, 1)$.

(2) 过点 A 的切线方程为 $y = \frac{1}{2}(x+1)$.

$$(3) V_x = \pi \int_0^1 \left[\frac{1}{4}(x+1)^2 - (\sqrt{x})^2 \right] dx = \pi \left[\frac{1}{12}(x+1)^3 - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_0^1 = \frac{\pi}{12},$$

$$V_y = 2\pi \int_0^1 \left[x \cdot \frac{1}{2}(x+1) - x \cdot \sqrt{x} \right] dx = 2\pi \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{30}.$$

评注

阴影部分面积也可以用梯形 $ABOC$ 的面积减去曲边三角形 AOC 的面积来计算.

635 答案 (1) $a = \frac{1}{2} \ln 2$; (2) $(1, e^{-1})$, $S = 2e^{-1}$.

$$(1) V(\xi) = \pi \int_0^{\xi} (e^{-x})^2 dx = \pi \int_0^{\xi} e^{-2x} dx = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-2\xi}).$$

因为 $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} V(\xi) = \frac{\pi}{4} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} (1 - e^{-2\xi}) = \frac{\pi}{4}$, $V(a) = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-2a})$, 由题设得

$$\frac{\pi}{2}(1 - e^{-2a}) = \frac{\pi}{4}, \text{ 解得 } a = \frac{1}{2} \ln 2.$$

(2) 设切点为 (t, e^{-t}) , 则切线方程为 $y - e^{-t} = -e^{-t}(x - t) \Rightarrow y = -e^{-t}x + (t+1)e^{-t}$,

切线与两坐标轴交点分别为 $(0, (t+1)e^{-t})$, $(1+t, 0)$, 从而切线与两坐标轴所围平面图形面积为

$$S = \frac{1}{2}(1+t)^2 e^{-t}.$$

$$S'(t) = \frac{1}{2}(1-t^2)e^{-t}, S''(t) = \frac{1}{2}((t-1)^2 - 2)e^{-t},$$

令 $S'(t) = \frac{1}{2}(1-t^2)e^{-t} = 0$, 得驻点 $t=1$ ($t=-1$ 舍去), 而 $S''(1) = -e^{-1} < 0$. 所以当 $t=1$ 时,

面积取得极大值, 又极值点唯一, 所以 $t=1$ 时面积最大, 故切点为 $(1, e^{-1})$, 最大面积 $S = 2e^{-1}$.

636 答案 (1) $\frac{64}{3}\pi a^2$; (2) $16\pi^2 a^2$.

$$\begin{aligned} (1) S_x &= 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt \\ &= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = \frac{64}{3}\pi a^2. \end{aligned}$$

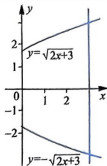
$$\begin{aligned} (2) S_y &= 2\pi \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt \\ &= 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin \frac{t}{2} dt \stackrel{\text{令 } u = \frac{t}{2}}{=} 16\pi a^2 \int_0^{\pi} (u - \sin u \cos u) \sin u du \\ &= 16\pi a^2 \left(\int_0^{\pi} u \sin u du - \int_0^{\pi} \sin^2 u \cos u du \right) = 16\pi^2 a^2. \end{aligned}$$

637 答案 $\frac{\pi}{3}(20\sqrt{10}-16)$.

曲线见图 637-图,

因 $f'(x) = (\sqrt{2x+3})' = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$, 代入公式得

$$S_x = 2\pi \int_0^3 \sqrt{2x+3} \sqrt{1 + \left[\frac{1}{\sqrt{2x+3}}\right]^2} dx = 2\pi \int_0^3 \sqrt{2x+4} dx = \frac{\pi}{3}(20\sqrt{10}-16).$$



637 题-图

638 答案 $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$.

将 $f'(x) = (x\sqrt{x})' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ 代入公式得

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \left[\frac{3}{2}\sqrt{x}\right]^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1).$$

639 答案 $\ln(2+\sqrt{3})$.

$$y' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x,$$

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + (-\tan x)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln(2+\sqrt{3}).$$

640 答案 $\ln(\sqrt{2}+1)$.

因为 $y' = \tan x$, 代入公式得

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + (\tan x)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(\sqrt{2}+1).$$

641 答案 $2a\pi^2$.

因为 $x'(t) = a \cdot t \cos t, y'(t) = a \cdot t \sin t$ 在 $0 < t \leq 2\pi$ 时连续且不同时为零, 所以

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(t \cos t)^2 + a^2(t \sin t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 t^2} dt = a \int_0^{2\pi} t dt = 2a\pi^2.$$

642 答案 $\sqrt{2}(e^\pi - 1)$.

因为 $r = e^\theta$ 与 $r'(\theta) = e^\theta$ 在 $0 \leq \theta \leq \pi$ 时连续, 且都不为零, 所以

$$s = \int_0^\pi \sqrt{e^{2\theta} + e^{2\theta}} d\theta = \sqrt{2} \int_0^\pi e^\theta d\theta = \sqrt{2}(e^\pi - 1).$$

643 答案 $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(\sqrt{2}+1)$.

曲线如图, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \Rightarrow y = 1 + x - 2\sqrt{x}$, $y' = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$, 则

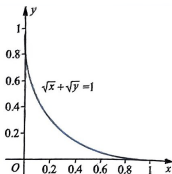
$$\begin{aligned} s &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} dx \stackrel{t=\sqrt{x}}{=} \int_0^1 \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{t}\right)^2} 2t dt = 2 \int_0^1 \sqrt{t^2 + (t-1)^2} dt \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} dt \stackrel{u=t-\frac{1}{2}}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sec^2 u du. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{又 } \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 u du &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec u \tan u du = \sec u \tan u \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan u \sec u du \\
 &= 2\sqrt{2} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec u \tan^2 u du = 2\sqrt{2} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sec^3 u - \sec u) du.
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 u du &= \frac{1}{2} \left(2\sqrt{2} + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec u du \right) = \frac{1}{2} \left(2\sqrt{2} + \ln |\sec u + \tan u| \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \right) \\
 &= \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1).
 \end{aligned}$$

$$\text{从而 } s = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(\sqrt{2} + 1).$$

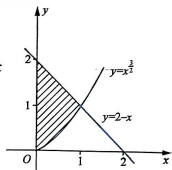


643 题 - 图

644 答案 $2 + \sqrt{2} + \frac{8}{27} \left[\left(\frac{13}{4} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right].$

如图, 曲线交点为 $(0,0), (0,2), (1,1).$

$$\begin{aligned}
 s &= 2 + \sqrt{(1-0)^2 + (1-2)^2} + \int_0^1 \sqrt{1 + [(x^{\frac{3}{2}})]^2} dx = 2 + \sqrt{2} + \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx \\
 &= 2 + \sqrt{2} + \frac{8}{27} \left[\left(\frac{13}{4} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right].
 \end{aligned}$$



644 题 - 图

645 答案 9.

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, y'' = -\frac{1}{4\sqrt{x}^3}$, 抛物线在点 $M(x, y)$ 处的曲率半径

$$\rho = \rho(x) = \frac{1}{K} = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = \frac{1}{2} (4x + 1)^{\frac{3}{2}}.$$

抛物线上 $\widehat{AM}$ 的弧长 $s = s(x) = \int_1^x \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_1^x \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx = \int_1^x \sqrt{1 + \frac{1}{4t}} dt.$

$$\text{故 } \frac{d\rho}{ds} = \frac{\frac{d\rho}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{3(4x+1)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}} = 6\sqrt{x},$$

$$\frac{d^2\rho}{ds^2} = \frac{d\left(\frac{d\rho}{ds}\right)}{ds} = \frac{d\left(\frac{d\rho}{dx}\right)}{dx} \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dx}} = \frac{6}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}} = \frac{6}{\sqrt{4x+1}}.$$

$$\text{从而 } 3\rho \frac{d^2\rho}{ds^2} - \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{2} (4x+1)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{6}{\sqrt{4x+1}} - (6\sqrt{x})^2 = 9.$$

646 答案 $\frac{\pi^2}{2} - \frac{2\pi}{3}.$

如图, 依据题意知该旋转体夹在两平行平面 $y=0, y=1$ 之间, 截面积函数为

$$A(y) = \pi[2 - (1 - \sqrt{1 - y^2})]^2 - \pi(2 - y)^2 = 2\pi[\sqrt{1 - y^2} - (1 - y)^2],$$

则所求体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(y) dy = 2\pi \int_0^1 [\sqrt{1-y^2} - (1-y)^2] dy \\ &= 2\pi \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}(1-y)^3 \right]_0^1 = \frac{\pi^2}{2} - \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

647 答案 $\frac{448}{15}\pi$.

如图, 由于曲线 $y=3-|x^2-1|$ 与 x 轴围成的封闭图形关于 y 轴对称, 故所求体积为平面图形 $OABC$ 绕 $y=3$ 旋转的旋转体体积的 2 倍. 该旋转体夹在两平行平面 $x=0, x=2$ 之间, 截面面积函数为

$$A(x) = \pi \cdot 3^2 - \pi \cdot [3 - (3 - |x^2 - 1|)]^2 = \pi(8 - x^4 + 2x^2),$$

则所求体积为

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^2 A(x) dx = 2 \int_0^2 \pi(8 - x^4 + 2x^2) dx \\ &= 2\pi \left(8x - \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{448}{15}\pi. \end{aligned}$$

648 答案 $\frac{2a^2b}{3} \tan \alpha$.

底面椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. 由图可知, 该楔形体夹在两平行平面 $y=-b$ 与 $y=b$ 之间, 用垂直于 y 轴的平行平面截此楔形体, 所得的截面为直角三角形, 两直角边长分别为 $a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$ 及 $a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} \cdot \tan \alpha$, 所以截面面积函数为

$$A(y) = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} \cdot a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} \tan \alpha = \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \tan \alpha,$$

$$\text{故楔形体的体积为 } V = \int_{-b}^b A(y) dy = \int_{-b}^b \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \tan \alpha dy = \frac{2a^2b}{3} \tan \alpha.$$

649 答案 (1) $\frac{1}{2}e-1$; (2) $\frac{\pi}{6}(5e^2-12e+3)$.

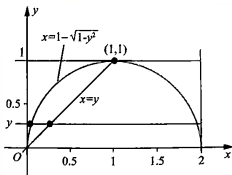
(1) 画草图, 设切点坐标为 $(x_0, \ln x_0)$, 切线方程为

$$y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0), \text{ 即 } y = \frac{1}{x_0}x - 1 + \ln x_0.$$

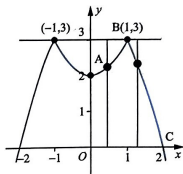
又切线过原点, 将 $x=0, y=0$ 代入上式 $\Rightarrow x_0=e$, 则切线方程为 $y = \frac{1}{e}x$.

$$D \text{ 的面积为 } A = \int_0^1 (e^y - ey) dy = \left(e^y - \frac{ey^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{e}{2} - 1.$$

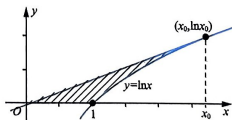
(2) D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体夹在两平行平面



646 题 - 图



647 题 - 图



649 题 - 图

$y=0$ 与 $y=1$ 之间, 用垂直于 y 轴的平行平面截此旋转体, 截面面积函数为

$$A(y) = \pi(e - ey)^2 - \pi(e - e^y)^2 = \pi(e^2 y^2 + 2ee^y - 2e^2 y - e^{2y}),$$

$$\text{故 } V = \int_0^1 A(y) dy = \pi \int_0^1 [e^2 y^2 + 2ee^y - 2e^2 y - e^{2y}] dy$$

$$= \pi \left(\frac{1}{3} e^2 y^3 + 2ee^y - e^2 y^2 - \frac{1}{2} e^{2y} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} (5e^2 - 12e + 3).$$

650 答案 $\ln 3; \frac{2v_0}{3}.$

设质点的运动速度为 $v(t)$, 由题设和牛顿第二定律, 有

$$m \frac{dv}{dt} = -v \quad (\text{式中质量 } m = 1).$$

解得 $v(t) = v_0 e^{-t}$. 由 $\frac{v_0}{3} = v_0 e^{-t}$, 得 $t = \ln 3$.

$$\text{到此时刻, 该质点所经过的路程 } S = \int_0^{\ln 3} v_0 e^{-t} dt = -v_0 e^{-t} \Big|_0^{\ln 3} = \frac{2}{3} v_0.$$

651 答案 91500J.

方法一: 建立坐标轴如图 6-11 所示, 将抓起污泥的抓斗提升至井口需作功 $W = W_1 + W_2 + W_3$. 其中, W_1 是克服抓斗自重所作的功; W_2 是克服缆绳重力所作的功; W_3 为提出污泥所作的功. 由题意知 $W_1 = 400 \times 30 = 12000$.

将抓斗由 x 处提升到 $x + dx$ 处, 克服缆绳重力所作的功为

$$dW_2 = 50(30 - x)dx, \text{ 从而 } W_2 = \int_0^{30} 50(30 - x)dx = 22500.$$

在时间间隔 $[t, t + dt]$ 内提升污泥需作功为 $dW_3 = 3(2000 - 20t)dt$, 将污泥从井底提升至井口共需时间 $\frac{30}{3} = 10$, 所以 $W_3 = \int_0^{10} 3(2000 - 20t)dt = 57000$.

因此共需作功 $W = W_1 + W_2 + W_3 = 12000 + 22500 + 57000 = 91500$ (J).

方法二: 建立坐标轴, 将抓起污泥的抓斗提升至井口需作功记为 W , 当抓斗运动到 x 处时, 作用力 $f(x)$ 包括抓斗的自重 400N, 缆绳的重力 $50(30 - x)$ N, 污泥的重力 $2000 - \frac{1}{3}x \cdot 20$ N, 即

$$f(x) = 400 + 50(30 - x) + 2000 - \frac{20}{3}x = 3900 - \frac{170}{3}x.$$

克服重力所作的功为

$$W = \int_0^{30} \left(3900 - \frac{170}{3}x \right) dx = \left(3900x - \frac{85}{3}x^2 \right) \Big|_0^{30} = 91500 \text{ (J)}.$$

662 答案 2.

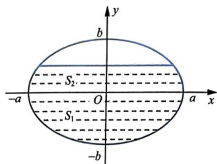
建立坐标系, 由题 652 图可知, 抛物线方程为 $y = x^2$.

闸门矩形部分承受的水压力

$$P_1 = 2 \int_1^{h+1} \rho g(h+1-y) dy = 2\rho g \left[(h+1)y - \frac{y^2}{2} \right] \Big|_1^{h+1} = \rho g h^2.$$

654 答案 $\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)abl\rho$.

如图, 建立坐标系, 则油罐底面椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 图中阴影部分为油面与椭圆所围成的图形.



654 题 - 图

记 S_1 为下半椭圆面积, 则 $S_1 = \frac{1}{2}\pi ab$.

记 S_2 是位于 x 轴上方阴影部分的面积, 则

$$\begin{aligned} S_2 &= 2 \int_0^{\frac{b}{2}} a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} dy = \frac{2a}{b} \int_0^{\frac{b}{2}} \sqrt{b^2 - y^2} dy \stackrel{y = b \sin t}{=} \frac{2a}{b} \int_0^{\frac{\pi}{6}} b^2 \cos^2 t dt \\ &= 2ab \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = ab \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = ab \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right). \end{aligned}$$

于是油的质量为 $(S_1 + S_2)l\rho = \left[\frac{1}{2}\pi ab + ab \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right] \cdot l\rho = \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) abl\rho$.

655 答案 (1) $\frac{9}{4}\pi$; (2) $3375g\pi$.

(1) 容器的容积即旋转体体积为两部分之和, 即

$$V = V_1 + V_2 = \pi \int_{\frac{1}{2}}^2 (2y - y^2) dy + \pi \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (1 - y^2) dy = \pi \left(y^2 - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 + \pi \left(y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-1}^{\frac{1}{2}} = \frac{9}{4}\pi.$$

(2) 所作的功的微元为

$$dW = \pi\rho g(2-y)(1-y^2)dy + \pi\rho g(2-y)(2y-y^2)dy,$$

$$\text{所以 } W = \pi\rho g \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (2-y)(1-y^2) dy + \pi\rho g \int_{\frac{1}{2}}^2 (2-y)(2y-y^2) dy$$

$$= \pi\rho g \left(\int_{-1}^{\frac{1}{2}} (y^3 - 2y^2 - y + 2) dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 (4y - 4y^2 + y^3) dy \right)$$

$$= \pi\rho g \left(\left(\frac{y^4}{4} - \frac{2y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y \right) \Big|_{-1}^{\frac{1}{2}} + \left(2y^2 - \frac{4y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 \right) = \frac{27}{8}\pi\rho g = 3375g\pi.$$

656 答案 (1) $\frac{e^2+1}{4}$; (2) $\frac{3(e^2+1)(e^2-3)}{4(e^3-7)}$.

(1) $y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}$, 由弧长的计算公式得 L 的弧长为

$$l = \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + \ln x\right) \Big|_1^e = \frac{e^2+1}{4}.$$

$$(2) \int_1^e x \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x\right) dx = \left(\frac{x^4}{16} - \frac{1}{4} x^2 \ln x + \frac{1}{8} x^2\right) \Big|_1^e = \frac{(e^2+1)(e^2-3)}{16}.$$

$$\int_1^e \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x\right) dx = \left(\frac{x^3}{12} - \frac{1}{2} x \ln x + \frac{1}{2} x\right) \Big|_1^e = \frac{e^3-7}{12},$$

由形心的计算公式可得, D 的形心的横坐标为

$$\bar{x} = \frac{\int_1^e x \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x\right) dx}{\int_1^e \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x\right) dx} = \frac{\frac{(e^2+1)(e^2-3)}{16}}{\frac{e^3-7}{12}} = \frac{3(e^2+1)(e^2-3)}{4(e^3-7)}.$$

第7章 微分方程

657 答案 (D).

由微分方程的定义知只有 (D) 符合要求.

658 答案 2.

该微分方程中未知函数的导数的最高阶数是二阶, 由微分方程阶的定义知其阶数是 2. 不要被 $(y')^3$ 迷惑.

659 答案 1.

该微分方程中虽然没有出现未知函数的导数, 但出现了微分 dy, dx , 这是微分方程的另一种表达方式. 由微分方程阶的定义知其阶数是 1.

660 答案 是, 特解.

由 $y = 5x^2$ 知 $y' = 10x$, 从而

$$xy' - 2y = x \cdot (10x) - 2 \times 5x^2 = 10x^2 - 10x^2 = 0,$$

所以 $y = 5x^2$ 是微分方程 $xy' - 2y = 0$ 的解. 又因为它不含任意常数, 所以是特解.

661 答案 $y = 2\cos x + 3\sin x$.

由 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ 知 $y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$, 从而

$$y'' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x = -(C_1 \cos x + C_2 \sin x) = -y,$$

所以 $y'' + y = 0$, 即 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ 是微分方程 $y'' + y = 0$ 的解. 又由 $y(0) = 2, y'(0) = 3$ 得 $C_1 = 2, C_2 = 3$, 故所求特解为 $y = 2\cos x + 3\sin x$.

662 答案 (C).

由 $y = \frac{1}{2}x^2 + x + C$ 知 $y' = x + 1, y'' = 1$, 所以 $y'' - y' = 1 - (x + 1) = -x$, 满足微分方程, 从而 y 是微分方程的解. 选项 (C) 正确.

微分方程 $y'' - y' = -x$ 是二阶的, 其通解中应含有两个独立的任意常数, 而特解中不含任意常数, 故选项 (A)、(B) 均错误.

663 答案 是, 特解.

在 $y = \ln(xy)$ 两端对 x 求得 $y' = \frac{y + xy'}{xy}$, 整理得 $(xy - x)y' - y = 0$, 再在上式两端对 x 求

导, 得 $(y + xy' - 1)y' + (xy - x)y'' - y' = 0$, 即

$$(xy - x)y'' + x(y')^2 + yy' - 2y' = 0.$$

故该二元方程所确定的函数是所给微分方程的解. 又因为它不含任意常数, 所以是特解.

664 答案 (D).

由可分离变量的微分方程的定义知, 只有 (D) 不是.

665 答案 $y = Cxe^{-x}$, C 为任意常数.

把 y 放到分母了, 于是丢了 $y=0$ 这个根

将所给的微分方程分离变量得 $\frac{1}{y} dy = \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx$, 两端积分 $\int \frac{1}{y} dy = \int \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx$, 得

$\ln|y| = \ln|x| - x + C_1$, 整理得

$$\ln|y| - \ln|x| = -x + C_1 \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{x}\right| = -x + C_1 \Rightarrow \frac{y}{x} = \pm e^{-x+C_1} \Rightarrow y = \pm e^{C_1} x e^{-x}.$$

因 $\pm e^{C_1}$ 是任意非零常数, 而 $y=0$ 也是微分方程的解, 但是在分离变量时丢掉了, 所以微分方程的通解为 $y = Cxe^{-x}$, C 为任意常数.

666 答案 $y^3 = \frac{3}{2} \sin^2 x + C$, C 为任意常数.

将所给的微分方程分离变量得 $y^2 dy = \sin x \cos x dx$, 两端积分

$$\int y^2 dy = \int \sin x \cos x dx = \int \sin x dx \sin x,$$

得 $\frac{1}{3} y^3 = \frac{1}{2} \sin^2 x + C_1$, 整理得 $y^3 = \frac{3}{2} \sin^2 x + 3C_1$, 令 $C = 3C_1$, 从而微分方程的通解为

$$y^3 = \frac{3}{2} \sin^2 x + C, \quad C \text{ 为任意常数.}$$

评注

在本题中, 微分方程的通解写成了隐函数的形式, 这也是可以的.

667 答案 $y = 1 + e^x$.

将所给的微分方程分离变量得

$$(1 + e^x) dy = ye^x dx \Rightarrow \frac{1}{y} dy = \frac{e^x}{1 + e^x} dx,$$

两端积分 $\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{e^x}{1 + e^x} dx = \int \frac{1}{1 + e^x} d(1 + e^x)$, 得 $\ln|y| = \ln|1 + e^x| + C_1$, 整理得

$$\ln|y| - \ln|1 + e^x| = C_1 \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{1 + e^x}\right| = C_1 \Rightarrow \frac{y}{1 + e^x} = \pm e^{C_1} \Rightarrow y = \pm e^{C_1} (1 + e^x),$$

因 $\pm e^{C_1}$ 是任意非零常数, 而 $y=0$ 也是微分方程的解, 但是在分离变量时丢掉了, 所以微分方程的通解为 $y = C(1 + e^x)$, C 为任意常数. 又由初始条件 $y|_{x=0} = 2$ 得 $C=1$, 从而方程满足初始条件的特解为 $y = 1 + e^x$.

668 答案 $y^2 = -2x^2 + 1$.

将所给的微分方程分离变量得

$$y(x^2 - 1) dy = x(y^2 + 1) dx \Rightarrow \frac{y}{y^2 + 1} dy = \frac{x}{x^2 - 1} dx,$$

两端积分 $\int \frac{y}{y^2+1} dy = \int \frac{x}{x^2-1} dx \Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{d(y^2+1)}{y^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2-1)}{x^2-1}$, 得

$$\frac{1}{2} \ln(y^2+1) = \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + \frac{C_1}{2},$$

整理得

$$\ln(y^2+1) - \ln|x^2-1| = C_1 \Rightarrow \ln \frac{y^2+1}{x^2-1} = C_1 \Rightarrow \frac{y^2+1}{x^2-1} = \pm e^{C_1}.$$

令 $\pm e^{C_1} = C$, 则该微分方程的通解为 $y^2+1 = C(x^2-1)$. 又由初始条件 $y|_{x=0} = 1$ 得 $C = -2$, 从而方程满足初始条件的特解为 $y^2+1 = -2(x^2-1) \Rightarrow y^2 = -2x^2+1$.

669 答案 $(y-1)e^y + e^x = 1$.

将所给的微分方程分离变量得

$$ydy = -e^x e^{-y} dx \Rightarrow ye^y dy = -e^x dx,$$

两端积分

$$\int ye^y dy = -\int e^x dx \Rightarrow \int yde^y = -\int e^y dy \Rightarrow ye^y - \int e^y dy = -\int e^x dx,$$

得 $ye^y - e^y = -e^x + C \Rightarrow (y-1)e^y + e^x = C$. 又由初始条件 $y|_{x=0} = 1$ 可得 $C = 1$, 因此方程满足初始条件的特解为 $(y-1)e^y + e^x = 1$.

670 答案 $y = -\frac{1}{\arctan x + 1}$.

由题意得 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1+x^2}$, 分离变量得 $\frac{1}{y^2} dy = \frac{1}{1+x^2} dx$, 两端积分 $\int \frac{1}{y^2} dy = \int \frac{1}{1+x^2} dx$, 得

$-\frac{1}{y} = \arctan x + C \Rightarrow y = -\frac{1}{\arctan x + C}$. 又因为曲线过点 $(0, -1)$, 即 $y|_{x=0} = -1$, 代入得

$C = 1$. 故所求曲线的方程为 $y = -\frac{1}{\arctan x + 1}$.

671 答案 $f(x) = 2e^{3x}$.

$f(x) = \int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right) dt + 2$ 两边对 x 求导, 可得 $f'(x) = f\left(\frac{3x}{3}\right) \cdot (3x)' = 3f(x)$,

令 $y = f(x)$, 则上式可写为 $y' = \frac{dy}{dx} = 3y$, 这是一变量可分离的微分方程, 分离变量

得 $\frac{1}{y} dy = 3dx$, 两端积分 $\int \frac{1}{y} dy = \int 3dx$ 得 $\ln|y| = 3x + C_1 \Rightarrow y = \pm e^{C_1} e^{3x}$, 令 $C = \pm e^{C_1}$, 则

$y = f(x) = Ce^{3x}$. 又由已知得 $f(0) = 2$, 代入得 $C = 2$, 故所求函数为 $f(x) = 2e^{3x}$.

评注

在本题中, 涉及变上限函数, 只要被积函数连续就要想到求导, 并且找到一初始条件求出具体的 C 值容易被忽视, 一般取上下限相等时积分等于零的变量值.

672 答案 $f(x) = -\frac{1}{x+1}.$

由条件可得 $f(0) = -1$, 且 $f(x) = 2x \int_0^x f(t)f'(t)dt - 2 \int_0^x tf'(t)f'(t)dt + x - 1$,
两端求导得

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \int_0^x f(t)f'(t)dt + 2xf'(x)f'(x) - 2xf'(x)f'(x) + 1 = 2 \int_0^x f(t)f'(t)dt + 1 \\ &= 2 \int_0^x f(t)df(t) + 1 = f^2(t) \Big|_0^x + 1 = f^2(x) - f^2(0) + 1 = f^2(x). \end{aligned}$$

令 $y = f(x)$, 得 $\frac{dy}{dx} = y^2$. 这是一变量可分离方程, 分离变量得 $\frac{dy}{y^2} = dx$, 两端积分得
 $-\frac{1}{y} = x + C \Rightarrow y = -\frac{1}{x+C}$. 又 $f(0) = -1$, 代入可得 $C = 1$, 从而 $f(x) = -\frac{1}{x+1}$.

673 答案 $f(x) = e^x.$

令 $u = x - t$, 则

$$\int_0^x tf'(x-t)dt = -\int_x^0 (x-u)f(u)du = x \int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du,$$

条件变形为 $\int_0^x f(t)dt = x \int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du + x$, 两边分别对 x 求导得

$$f(x) = \int_0^x f(u)du + xf(x) - xf(x) + 1 \Rightarrow f(x) = \int_0^x f(u)du + 1, \dots\dots ①$$

两边再分别对 x 求导得 $f'(x) = f(x)$, 令 $y = f(x)$ 并整理可得 $\frac{dy}{y} = dx$, 两端积分得 $\ln|y| = x + C_1 \Rightarrow y = \pm e^{C_1} e^x = Ce^x$. 又由①知 $f(0) = 1$, 代入可得 $C = 1$, 因此 $f(x) = e^x$.

674 答案 $f(x) = \frac{2}{e^2+1} e^x.$

令 $\int_0^1 tf^2(t)dt = a$, 由保号性知 $a \geq 0$, 且 $f(x) = \int_0^x f(t)dt + 2a$, 两边分别对 x 求导得
 $f'(x) = f(x)$, 解得 $f(x) = Ce^x$. 又由题意知 $f(0) = 2a$, 代入可得 $C = 2a$, 从而 $f(x) = 2ae^x$,
因 $\int_0^1 tf^2(t)dt = a$, 将 $f(t) = 2ae^t$ 代入可得

$$\begin{aligned} a &= \int_0^1 t \cdot 4a^2 e^{2t} dt = 2a^2 \int_0^1 t e^{2t} dt = 2a^2 \left(t e^{2t} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{2t} dt \right) \\ &= 2a^2 \left(e^2 - \frac{1}{2} e^{2t} \Big|_0^1 \right) = 2a^2 \left(\frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} \right) = a^2 (e^2 + 1), \end{aligned}$$

解得 $a = 0$ 或 $a = \frac{1}{e^2+1}$, 所以 $f(x) = 0$ (舍掉) 或 $f(x) = \frac{2}{e^2+1} e^x$.

评注

在本题中, 将函数的表达式回代求出具体的 C 值是关键, 同学们不要忽视.

675 答案 $a=3$.

令 $y=f(x)$, 则由条件可得 $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{x}{1+x^2}y$, 这是一变量可分离的微分方程, 分离变量

得 $\frac{1}{y}dy=\frac{x}{1+x^2}dx$, 两端积分 $\int \frac{1}{y}dy=\int \frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}d(1+x^2)$, 得

$$\ln|y|=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1=\ln(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+C_1 \Rightarrow \ln\frac{|y|}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}=C_1$$

$$\Rightarrow \frac{y}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}=\pm e^{C_1} \Rightarrow y=\pm e^{C_1}(1+x^2)^{\frac{1}{2}},$$

令 $C=\pm e^{C_1}$, 则 $y=f(x)=C(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$. 又已知 $f(0)=a$, 代入得 $C=a$, 故函数 $f(x)=a(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$. 从而

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} xf(x)dx &= a\int_0^{\sqrt{3}} x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{a}{2}\int_0^{\sqrt{3}} (1+x^2)^{\frac{1}{2}}d(1+x^2) \\ &= \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (1+x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{a}{3}(8-1) = \frac{7a}{3} = 7,\end{aligned}$$

所以 $a=3$.

676 答案 $y=1-\sin x-\frac{1}{x+C}$, C 为任意常数.

将原方程化简得

$$y'=y^2+2(\sin x-1)y+(\sin x-1)^2-\cos x=(y+\sin x-1)^2-\cos x,$$

令 $u=y+\sin x-1$, 则 $u'=y'+\cos x$, 代入上式得 $u'=u^2$, 即 $\frac{du}{dx}=u^2$, 方程变为变量可分

离的微分方程, 分离变量得 $\frac{du}{u^2}=dx$, 两端积分 $\int \frac{1}{u^2}du=\int dx$, 得 $-\frac{1}{u}=x+C \Rightarrow u=-\frac{1}{x+C}$.

将 $u=y+\sin x-1$ 代入上式, 得 $y+\sin x-1=-\frac{1}{x+C}$, 整理可得原微分方程的通解为

$$y=1-\sin x-\frac{1}{x+C}, \quad C \text{ 为任意常数.}$$

677 答案 $2x^2y^2\ln|y|-2xy-Cx^2y^2=1$, C 为任意常数.

原方程可改写为 $xy(xy+1)+x^2(1+xy+x^2y^2)\frac{dy}{dx}=0$. 令 $u=xy$, 则 $y=\frac{u}{x}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{x\frac{du}{dx}-u}{x^2}$,

代入上式得 $u(u+1)+(1+u+u^2)\left(x\frac{du}{dx}-u\right)=0$, 整理得

$$x \frac{du}{dx} = -\frac{u(u+1)}{1+u+u^2} + u \Rightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{u^3}{1+u+u^2},$$

方程变为变量可分离的微分方程, 分离变量得

$$\frac{1+u+u^2}{u^3} du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \left(\frac{1}{u^3} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u} \right) du = \frac{1}{x} dx,$$

两端积分得

$$-\frac{1}{2u^2} - \frac{1}{u} + \ln|u| = \ln|x| + C_1 \Rightarrow \ln\left|\frac{u}{x}\right| = \frac{1}{2u^2} + \frac{1}{u} + C_1 \Rightarrow 2u^2 \ln\left|\frac{u}{x}\right| - 2u - 2C_1 u^2 = 1,$$

将 $u = xy$ 代入上式并令 $C = 2C_1$ 可得原微分方程的通解为

$$2x^2 y^2 \ln|y| - 2xy - Cx^2 y^2 = 1, \quad C \text{ 为任意常数.}$$

评注

在上面两题中, 做合适的变量代换, 将方程化为变量可分离的微分方程, 这种方法非常巧妙.

678 答案 (D).

(D) 选项中的方程可以化为 $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}$, 由齐次方程的定义知只有 (D) 符合要求.

679 答案 $y = x(\ln|x| + C)^2$, C 为任意常数.

该方程为齐次微分方程, 令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = xu$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, 代入原方程可得

$$u + x \frac{du}{dx} = 2\sqrt{u} + u \Rightarrow x \frac{du}{dx} = 2\sqrt{u},$$

分离变量得 $\frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{x} dx$, 两端积分得

$$\sqrt{u} = \ln|x| + C \Rightarrow u = (\ln|x| + C)^2,$$

以 $\frac{y}{x}$ 代替上式中的 u 并化简整理, 即可得原齐次方程的通解为 $y = x(\ln|x| + C)^2$, C 为任意常数.

680 答案 $\sin \frac{y}{x} = \ln|x| + C$, C 为任意常数.

该方程为齐次微分方程, 令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = xu$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, 代入原方程可得

$$u + x \frac{du}{dx} = \sec u + u \Rightarrow x \frac{du}{dx} = \sec u,$$

分离变量得 $\frac{du}{\sec u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \cos u du = \frac{1}{x} dx$, 两端积分得 $\sin u = \ln|x| + C$, 以 $\frac{y}{x}$ 代替上式中的 u ,

便可得原齐次方程的通解为 $\sin \frac{y}{x} = \ln|x| + C$, C 为任意常数.

681 答案 $y^2 = 2x^2(\ln x + 2)$.

原方程可表示为 $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, 这是齐次微分方程, 令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = xu$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, 代入原方程可得

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} + u \Rightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{1}{u},$$

分离变量得 $u du = \frac{1}{x} dx$, 两端积分得

$$\frac{1}{2} u^2 = \ln|x| + \frac{C}{2} \Rightarrow u^2 = 2\ln|x| + C,$$

以 $\frac{y}{x}$ 代替上式中的 u , 整理可得原齐次方程的通解为 $y^2 = x^2(2\ln|x| + C)$. 由初始条件 $y|_{x=1} = 2$ 可得 $C = 4$, 代入可得原微分方程满足初始条件的特解为 $y^2 = 2x^2(\ln x + 2)$.

682 答案 $y = x \tan(\ln|x|)$.

由题意知 $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$, 这是齐次微分方程, 令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = xu$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, 代入原方程可得

$$u + x \frac{du}{dx} = 1 + u + u^2 \Rightarrow x \frac{du}{dx} = 1 + u^2,$$

分离变量可得 $\frac{du}{1+u^2} = \frac{dx}{x}$, 两端积分得

$$\arctan u = \ln|x| + C \Rightarrow u = \tan(\ln|x| + C),$$

以 $\frac{y}{x}$ 代替上式中的 u , 整理可得原齐次方程的通解为 $y = x \tan(\ln|x| + C)$. 又曲线通过点 $(1, 0)$, 代入可得 $C = 0$, 故所求曲线方程为 $y = x \tan(\ln|x|)$.

评注

严格地讲, 所求曲线方程应是 $y = x \tan(\ln x)$ ($e^{-\frac{\pi}{2}} < x < e^{\frac{\pi}{2}}$), 这是由于当 $x \in (e^{-\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}})$ 时, $y = x \tan(\ln x)$ 才是一条通过 $(1, 0)$ 的连续可微曲线.

683 答案 $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

原方程可变形为

$$x^2 dy = (y^2 - xy) dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - xy}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x},$$

这是齐次微分方程, 令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = xu$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, 代入原方程可得

$$u + x \frac{du}{dx} = u^2 - u \Rightarrow x \frac{du}{dx} = u^2 - 2u,$$

分离变量可得

$$\frac{du}{u^2 - 2u} = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \frac{du}{u(u-2)} = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u} \right) = \frac{1}{x} dx,$$

两端积分得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\ln|u-2| - \ln|u|) &= \ln|x| + \frac{C_1}{2} \Rightarrow \ln|u-2| - \ln|u| - \ln x^2 = C_1 \\ &\Rightarrow \ln \left| \frac{u-2}{ux^2} \right| = C_1 \Rightarrow \frac{u-2}{ux^2} = \pm e^{C_1} = C, \end{aligned}$$

以 $\frac{y}{x}$ 代替上式中的 u ，并化简整理便可得原齐次方程的通解为

$$\begin{aligned} \frac{\frac{y}{x} - 2}{\frac{y}{x} \cdot x^2} = C &\Rightarrow \frac{y-2x}{yx^2} = C \Rightarrow y = \frac{2x}{1-Cx^2}. \end{aligned}$$

由初始条件 $y|_{x=1} = 1$ 可得 $C = -1$ ，代入可得原微分方程满足初始条件的特解为 $y = \frac{2x}{1+x^2}$ 。

684 答案 $y = xe^{2x+1}$ 。

原方程可变形为 $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y(\ln y - \ln x)}{x} = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$ ，这是齐次微分方程，令 $u = \frac{y}{x}$ ，则 $y = xu$ ，

$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ ，代入原方程可得

$$u + x \frac{du}{dx} = u \ln u \Rightarrow x \frac{du}{dx} = u(\ln u - 1),$$

分离变量可得 $\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{1}{x} dx$ ，两端积分

$$\int \frac{1}{u(\ln u - 1)} du = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int \frac{1}{\ln u - 1} d(\ln u - 1) = \int \frac{1}{x} dx,$$

得 $\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + C_1 \Rightarrow \ln \left| \frac{\ln u - 1}{x} \right| = C_1 \Rightarrow \frac{\ln u - 1}{x} = \pm e^{C_1} = C \Rightarrow \ln u = Cx + 1 \Rightarrow u = e^{Cx+1}$ ，

以 $\frac{y}{x}$ 代替上式中的 u ，并化简整理便可得原齐次方程的通解为 $y = xe^{Cx+1}$ ，由初始条件

$y(1) = e^3$ 可得 $C = 2$ ，代入可得原微分方程满足初始条件的特解为 $y = xe^{2x+1}$ 。

685 答案 $x + 2ye^y = C$ ， C 为任意常数。

因为方程含有 e^y 项，故把 x 视为 y 的函数，原方程可变形为 $\frac{dx}{dy} = \frac{2e^y \left(\frac{x}{y} - 1 \right)}{1 + 2e^y}$ ，这是齐次

微分方程, 令 $u = \frac{x}{y}$, 则 $x = yu$, $\frac{dx}{dy} = u + y \frac{du}{dy}$, 代入原方程可得

$$u + y \frac{du}{dy} = \frac{2e^u(u-1)}{1+2e^u} \Rightarrow y \frac{du}{dy} = \frac{2e^u(u-1)}{1+2e^u} - u = -\frac{2e^u + u}{1+2e^u},$$

分离变量得 $\frac{1+2e^u}{u+2e^u} du = -\frac{1}{y} dy$, 两端积分

$$\int \frac{1+2e^u}{u+2e^u} du = -\int \frac{1}{y} dy \Rightarrow \int \frac{1}{u+2e^u} d(u+2e^u) = -\int \frac{1}{y} dy,$$

得

$$\ln|u+2e^u| = -\ln|y| + C_1 \Rightarrow \ln|y(u+2e^u)| = C_1 \Rightarrow y(u+2e^u) = \pm e^{C_1} = C,$$

以 $\frac{x}{y}$ 代替上式中的 u , 并化简整理便可得原齐次方程的通解为 $x + 2ye^{\frac{x}{y}} = C$, C 为任意常数.

686 答案 $\sin^3 \frac{x}{y} = Cy^2$, C 为任意常数.

因为方程含有 $\sin \frac{x}{y}$, $\cos \frac{x}{y}$ 项, 故把 x 视为 y 的函数, 原方程可变形为

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y \sin \frac{x}{y} + 3x \cos \frac{x}{y}}{3y \cos \frac{x}{y}} = \frac{2}{3} \tan \frac{x}{y} + \frac{x}{y},$$

这是齐次微分方程, 令 $u = \frac{x}{y}$, 则 $x = yu$, $\frac{dx}{dy} = u + y \frac{du}{dy}$, 代入原方程可得

$$u + y \frac{du}{dy} = \frac{2}{3} \tan u + u \Rightarrow y \frac{du}{dy} = \frac{2}{3} \tan u,$$

分离变量得 $\frac{3}{2} \cot u du = \frac{1}{y} dy$, 两端积分得

$$\frac{3}{2} \ln|\sin u| = \ln|y| + C_1 \Rightarrow \ln \left| \frac{\sin^{\frac{3}{2}} u}{y} \right| = C_1 \Rightarrow \sin^{\frac{3}{2}} u = \pm e^{C_1} y \Rightarrow \sin^3 u = \pm e^{2C_1} y^2 = Cy^2,$$

以 $\frac{x}{y}$ 代替上式中的 u , 可得原齐次方程的通解为 $\sin^3 \frac{x}{y} = Cy^2$, C 为任意常数.

687 答案 $y = Ce^{-x^2}$, C 为任意常数.

该方程为一线性齐次方程且 $P(x) = 2x$, 从而可得原方程的通解为

$$y = Ce^{-\int P(x) dx} = Ce^{-\int 2x dx} = Ce^{-x^2}, \quad C \text{ 为任意常数.}$$

688 答案 $y = \frac{1}{\cos x}$.

将原方程变形可得 $\frac{dy}{dx} - \tan x \cdot y = 0$, 为一线性齐次方程且 $P(x) = -\tan x$, 从而可得原

方程的通解为

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} = Ce^{\int \tan x dx} = Ce^{-\ln \cos x} = \frac{C}{\cos x}.$$

又由初始条件 $y|_{x=0} = 1$ 可得 $C=1$, 从而原方程满足初始条件的特解为 $y = \frac{1}{\cos x}$.

689 答案 (C).

(C) 选项中的方程可以化为 $y' + (x - e^x)y = x^2$, 由一阶线性微分方程的定义知只有 (C) 符合要求.

690 答案 $y = Ce^{-x^2} + 2$, C 为任意常数.

该方程为一阶线性非齐次微分方程, 且 $P(x) = 2x$, $Q(x) = 4x$, 从而可得原方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right) = e^{-\int 2x dx} \left(\int 4xe^{\int 2x dx} dx + C \right) \\ &= e^{-x^2} \left(\int 4xe^{x^2} dx + C \right) = e^{-x^2} \left(2 \int e^{x^2} dx^2 + C \right) \\ &= e^{-x^2} (2e^{x^2} + C) = 2 + Ce^{-x^2}, \quad C \text{ 为任意常数.} \end{aligned}$$

691 答案 $y = e^{-\sin x}(x + C)$, C 为任意常数.

该方程为一阶线性非齐次微分方程, 且 $P(x) = \cos x$, $Q(x) = e^{-\sin x}$, 从而可得原方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right) = e^{-\int \cos x dx} \left(\int e^{-\sin x} e^{\int \cos x dx} dx + C \right) \\ &= e^{-\sin x} \left(\int e^{-\sin x} e^{\sin x} dx + C \right) = e^{-\sin x}(x + C), \quad C \text{ 为任意常数.} \end{aligned}$$

692 答案 $y = (x+1)(e^x + 1)$.

原方程可变形为 $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1)$, 为一阶线性微分方程, 且 $P(x) = -\frac{1}{x+1}$,

$Q(x) = e^x(x+1)$, 从而可得原方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right) = e^{\int \frac{1}{x+1} dx} \left(\int e^x(x+1)e^{-\int \frac{1}{x+1} dx} dx + C \right) \\ &= e^{\ln(x+1)} \left(\int e^x(x+1)e^{-\ln(x+1)} dx + C \right) = (x+1) \left(\int e^x dx + C \right) = (x+1)(e^x + C), \end{aligned}$$

又由初始条件 $y(0) = 2$ 得 $C=1$, 所以要求的特解为 $y = (x+1)(e^x + 1)$.

693 答案 $y = e^{-\sin x}(x \ln x - x + 1)$.

原方程可变形为 $\frac{dy}{dx} + y \cos x = e^{-\sin x} \ln x$, 为一阶线性微分方程, 且 $P(x) = \cos x$,

$Q(x) = e^{-\sin x} \ln x$, 从而可得原方程的通解为

$$\begin{aligned}
 y &= e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right) = e^{-\int \cos x dx} \left(\int e^{-\sin x} \ln x e^{\int \cos x dx} dx + C \right) \\
 &= e^{-\sin x} \left(\int \ln x dx + C \right) = e^{-\sin x} \left(x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx + C \right) = e^{-\sin x} (x \ln x - x + C),
 \end{aligned}$$

又由初始条件 $y(1) = 0$ 得 $C = 1$, 所以要求的特解为 $y = e^{-\sin x} (x \ln x - x + 1)$.

694 答案 $x = \frac{1}{2}y^2 + Cy^3$, C 为任意常数.

将 x 看做 y 的函数, 则原方程可变形为 $\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = -\frac{y}{2}$, 为一阶线性微分方程, 且

$P(y) = -\frac{3}{y}$, $Q(y) = -\frac{y}{2}$, 从而可得原方程的通解为

$$\begin{aligned}
 x &= e^{-\int P(y)dy} \left(\int Q(y) e^{\int P(y)dy} dy + C \right) = e^{\int \frac{3}{y} dy} \left(\int -\frac{y}{2} e^{-\int \frac{3}{y} dy} dy + C \right) \\
 &= y^3 \left(\int \left(-\frac{y}{2} \cdot \frac{1}{y^3} \right) dy + C \right) = y^3 \left(\frac{1}{2y} + C \right) = \frac{1}{2}y^2 + Cy^3, \quad C \text{ 为任意常数.}
 \end{aligned}$$

评注

本题如果将 y 看成 x 的函数, 则方程化为 $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{6x - y^2}$, 这个方程不是一阶线性微分方程, 也不是变量可分离方程, 更不是齐次方程, 不便求解, 于是将 x 看成 y 的函数. 这也是我们求解微分方程的常用思路.

695 答案 $x = \frac{1}{y^2}(\ln|y| + C)$, C 为任意常数.

将 x 看成 y 的函数, 则原方程可变形为 $\frac{dx}{dy} + \frac{2}{y}x = \frac{1}{y^3}$, 为一阶线性微分方程, 且

$P(y) = \frac{2}{y}$, $Q(y) = \frac{1}{y^3}$, 从而可得原方程的通解为

$$\begin{aligned}
 x &= e^{-\int P(y)dy} \left(\int Q(y) e^{\int P(y)dy} dy + C \right) = e^{-\int \frac{2}{y} dy} \left(\int \frac{1}{y^3} e^{\int \frac{2}{y} dy} dy + C \right) \\
 &= \frac{1}{y^2} \left(\int \frac{1}{y^3} \cdot y^2 dy + C \right) = \frac{1}{y^2}(\ln|y| + C), \quad C \text{ 为任意常数.}
 \end{aligned}$$

696 答案 $y = \sqrt{x}$.

将 x 看成 y 的函数, 则原方程可变形为 $\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x = 3y$, 为一阶线性微分方程, 且

$P(y) = \frac{1}{y}$, $Q(y) = 3y$, 从而可得原方程的通解为

$$\begin{aligned}
 x &= e^{-\int P(y)dy} \left(\int Q(y) e^{\int P(y)dy} dy + C \right) = e^{-\int \frac{1}{y} dy} \left(\int 3y e^{\int \frac{1}{y} dy} dy + C \right) \\
 &= \frac{1}{y} \left(\int 3y \cdot y dy + C \right) = \frac{1}{y} (y^3 + C) = y^2 + \frac{C}{y}.
 \end{aligned}$$

又由初始条件 $y|_{x=1}=1$ 得 $C=0$, 所以要求的特解为 $x=y^2 \Rightarrow y=\sqrt{x}$.

697 答案 $x=Ce^y-y-1$, C 为任意常数.

方法一: 将 x 看成 y 的函数, 则原方程可变形为 $\frac{dx}{dy} - x = y$, 为一阶线性微分方程, 且

$P(y)=-1$, $Q(y)=y$, 从而可得原方程的通解为

$$\begin{aligned}
 x &= e^{-\int P(y)dy} \left(\int Q(y) e^{\int P(y)dy} dy + C \right) = e^{\int dy} \left(\int y e^{-dy} dy + C \right) \\
 &= e^y \left(\int y \cdot e^{-y} dy + C \right) = e^y \left(-\int y de^{-y} + C \right) = e^y \left(-ye^{-y} + \int e^{-y} dy + C \right) \\
 &= e^y \left(-ye^{-y} - e^{-y} + C \right) = Ce^y - y - 1, \quad C \text{ 为任意常数.}
 \end{aligned}$$

方法二: 做变量替换, 令 $x+y=u$, 则 $y=u-x$, $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$, 代入原方程得

$$\frac{du}{dx} - 1 = \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{u+1}{u},$$

分离变量得 $\frac{u}{u+1} du = dx \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{u+1} \right) du = dx$, 两端积分得

$$u - \ln|u+1| = x + C_1 \Rightarrow \ln|u+1| = u - x - C_1 \Rightarrow u+1 = \pm e^{-C_1} e^{u-x} = Ce^{u-x},$$

将 $u=x+y$ 代入上式, 整理可得原方程的通解为 $x=Ce^y-y-1$, C 为任意常数.

698 答案 $y^2+2xy=C$, C 为任意常数.

方法一: 将 x 看成 y 的函数, 则原方程可变形为 $\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x = -1$, 为一阶线性微分方程, 且

$P(y)=\frac{1}{y}$, $Q(y)=-1$, 从而可得原方程的通解为

$$\begin{aligned}
 x &= e^{-\int P(y)dy} \left(\int Q(y) e^{\int P(y)dy} dy + C_1 \right) = e^{-\int \frac{1}{y} dy} \left(-\int e^{\int \frac{1}{y} dy} dy + C_1 \right) \\
 &= \frac{1}{y} \left(-\int y dy + C_1 \right) = \frac{1}{y} \left(-\frac{y^2}{2} + C_1 \right) = -\frac{y}{2} + \frac{C_1}{y},
 \end{aligned}$$

整理可得 $2xy+y^2=2C_1=C$, C 为任意常数.

方法二: 原方程可变形为 $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x+y} = -\frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$, 该方程为齐次微分方程, 令 $u=\frac{y}{x}$, 则

$y=xu$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, 代入原方程可得

$$u+x \frac{du}{dx} = -\frac{u}{1+u} \Rightarrow x \frac{du}{dx} = -\left(\frac{u}{1+u} + u\right) = -\frac{u^2+2u}{1+u},$$

分离变量得 $\frac{1+u}{u^2+2u} du = -\frac{1}{x} dx$, 两边积分得

$$\frac{1}{2} \ln|u^2+2u| = -\ln|x| + C_1 \Rightarrow (u^2+2u)x^2 = \pm e^{2C_1} = C,$$

以 $\frac{y}{x}$ 代替上式中的 u , 整理可得原方程的通解为 $y^2+2xy=C$, C 为任意常数.

评注

上面两个例题均给出了两种解法, 将同一微分方程化成了两种不同的类型. 这提示我们做题的时候一定要灵活.

699 答案 $y = \sin x + \cos x$.

由题意可得 $\frac{dy}{dx} = \sec x - y \tan x \Rightarrow \frac{dy}{dx} + y \tan x = \sec x$, 为一阶线性微分方程, 且 $P(x) = \tan x$,

$Q(x) = \sec x$, 从而可得原方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right) = e^{-\int \tan x dx} \left(\int \sec x e^{\int \tan x dx} dx + C \right) \\ &= e^{\ln \cos x} \left(\int \sec x e^{\ln \sec x} dx + C \right) = \cos x \left(\int \sec^2 x dx + C \right) = \cos x (\tan x + C) = \sin x + C \cos x, \end{aligned}$$

又 $y = f(x)$ 过 $(0,1)$ 点, 即 $y|_{x=0} = 1$, 代入可得 $C=1$, 从而该曲线方程为 $y = \sin x + \cos x$.

700 答案 $f(x) = -2e^{\frac{1}{2}x^2} + 2$.

对条件中的等式两边分别对 x 求导得 $f'(x) = xf(x) - 2x$, 令 $y = f(x)$ 并整理可得 $\frac{dy}{dx} - xy = -2x$, 为一阶线性微分方程, 且 $P(x) = -x$, $Q(x) = -2x$, 从而可得原方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right) = e^{\int x dx} \left(\int -2xe^{-\int x dx} dx + C \right) \\ &= e^{\frac{1}{2}x^2} \left(\int -2xe^{-\frac{1}{2}x^2} dx + C \right) = e^{\frac{1}{2}x^2} \left(\int 2e^{-\frac{1}{2}x^2} d\left(-\frac{1}{2}x^2\right) + C \right) \\ &= e^{\frac{1}{2}x^2} \left(2e^{-\frac{1}{2}x^2} + C \right) = Ce^{\frac{1}{2}x^2} + 2, \end{aligned}$$

又由题意知 $f(0)=0$, 代入可得 $C=-2$, 因此 $f(x) = -2e^{\frac{1}{2}x^2} + 2$.

701 答案 $f(x) = -\frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

令 $u = x-t$, 则 $\int_0^x f(x-t)dt = -\int_x^0 f(u)du = \int_0^x f(u)du$, 则条件变形为

$$\int_0^x f(u)du = x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f'(t)dt + e^{-x} - 1,$$

两边分别对 x 求导得

$$f(x) = \int_0^x f(t)dt + xf'(x) - xf(x) - e^{-x} \Rightarrow f(x) = \int_0^x f(t)dt - e^{-x}, \dots \textcircled{1}$$

两边再分别对 x 求导得 $f'(x) = f(x) + e^{-x}$, 令 $y = f(x)$ 并整理可得 $\frac{dy}{dx} - y = e^{-x}$, 为一阶线性微分方程, 且 $P(x) = -1$, $Q(x) = e^{-x}$, 从而可得原方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right) = e^{\int dx} \left(\int e^{-x} e^{-\int dx} dx + C \right) \\ &= e^x \left(\int e^{-x} e^{-x} dx + C \right) = e^x \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} + C \right) = Ce^x - \frac{e^{-x}}{2}, \end{aligned}$$

又由①知 $f(0) = -1$, 代入可得 $C = -\frac{1}{2}$, 因此 $f(x) = -\frac{1}{2}e^x - \frac{e^{-x}}{2} = -\frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

702 答案 $y = \frac{1}{120}x^5 + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$, C_1, C_2, C_3, C_4 为任意常数.

对所给方程连续积分四次, 可得

$$y''' = \int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C_1',$$

$$y'' = \int \left(\frac{1}{2}x^2 + C_1' \right) dx = \frac{1}{6}x^3 + C_1'x + C_2',$$

$$y' = \int \left(\frac{1}{6}x^3 + C_1'x + C_2' \right) dx = \frac{1}{24}x^4 + \frac{C_1'}{2}x^2 + C_2'x + C_3,$$

$$\begin{aligned} y &= \int \left(\frac{1}{24}x^4 + \frac{C_1'}{2}x^2 + C_2'x + C_3 \right) dx = \frac{1}{120}x^5 + \frac{C_1'}{6}x^3 + \frac{C_2'}{2}x^2 + C_3x + C_4 \\ &= \frac{1}{120}x^5 + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \text{ 为任意常数.} \end{aligned}$$

703 答案 $y = \frac{1}{27}e^{3x} + \frac{1}{8}\cos 2x + C_1x^2 + C_2x + C_3$, C_1, C_2, C_3 为任意常数.

对所给方程连续积分三次, 可得

$$y'' = \int (e^{3x} + \sin 2x) dx = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{2}\cos 2x + C_1',$$

$$y' = \int \left(\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{2}\cos 2x + C_1' \right) dx = \frac{1}{9}e^{3x} - \frac{1}{4}\sin 2x + C_1'x + C_2,$$

$$\begin{aligned} y &= \int \left(\frac{1}{9}e^{3x} - \frac{1}{4}\sin 2x + C_1'x + C_2 \right) dx = \frac{1}{27}e^{3x} + \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{C_1'}{2}x^2 + C_2x + C_3, \\ &= \frac{1}{27}e^{3x} + \frac{1}{8}\cos 2x + C_1x^2 + C_2x + C_3, \quad C_1, C_2, C_3 \text{ 为任意常数.} \end{aligned}$$

704 答案 $y = xe^x - 3e^x + C_1x^2 + C_2x + C_3$, C_1, C_2, C_3 为任意常数.

对所给方程连续积分三次, 可得

$$y'' = \int x e^x dx = \int x d e^x = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C_1',$$

$$y' = \int (x e^x - e^x + C_1') dx = x e^x - e^x - e^x + C_1' x + C_2 = x e^x - 2e^x + C_1' x + C_2,$$

$$y = \int (x e^x - 2e^x + C_1' x + C_2) dx = x e^x - e^x - 2e^x + \frac{C_1'}{2} x^2 + C_2 x + C_3 \\ = x e^x - 3e^x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3, \quad C_1, C_2, C_3 \text{ 为任意常数.}$$

705 答案 $y = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_1 x + C_2, \quad C_1 \text{ 和 } C_2 \text{ 为任意常数.}$

对所给方程连续积分两次, 可得

$$y' = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C_1,$$

$$y = \int (\arctan x + C_1) dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx + C_1 x$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2) + C_1 x$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_1 x + C_2, \quad C_1 \text{ 和 } C_2 \text{ 为任意常数.}$$

706 答案 $y = \frac{1}{8} e^{2x} - \frac{e^2}{4} x^2 + \frac{e^2}{4} x - \frac{e^2}{8}.$

对所给方程两边积分得

$$y'' = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C_1,$$

将初始条件 $y''|_{x=1} = 0$ 代入可得 $C_1 = -\frac{e^2}{2}$, 故 $y'' = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{e^2}{2}$. 两边积分得

$$y' = \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} - \frac{e^2}{2} \right) dx = \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{e^2}{2} x + C_2,$$

将初始条件 $y'|_{x=1} = 0$ 代入可得 $C_2 = \frac{e^2}{4}$, 故 $y' = \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{e^2}{2} x + \frac{e^2}{4}$. 两边积分得

$$y = \int \left(\frac{1}{4} e^{2x} - \frac{e^2}{2} x + \frac{e^2}{4} \right) dx = \frac{1}{8} e^{2x} - \frac{e^2}{4} x^2 + \frac{e^2}{4} x + C_3,$$

将初始条件 $y|_{x=1} = 0$ 代入可得 $C_3 = -\frac{e^2}{8}$, 故 $y = \frac{1}{8} e^{2x} - \frac{e^2}{4} x^2 + \frac{e^2}{4} x - \frac{e^2}{8}$.

707 答案 $y = \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{2} x + 1.$

对所给方程 $y'' = x$ 两边连续积分两次, 可得

$$y' = \int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C_1,$$

$$y = \int \left(\frac{1}{2} x^2 + C_1 \right) dx = \frac{1}{6} x^3 + C_1 x + C_2,$$

又曲线经过点 $(0,1)$, 即 $y|_{x=0}=1$, 曲线在点 $(0,1)$ 处与直线 $y=\frac{x}{2}+1$ 相切, 即 $y'|_{x=0}=\frac{1}{2}$,

代入可得 $C_1=\frac{1}{2}$, $C_2=1$, 故所求的曲线方程为 $y=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x+1$.

708 答案 $y=-\frac{x^2}{2}-x+C_1e^x+C_2$, C_1 和 C_2 为任意常数.

令 $y'=p$, 则 $y''=p'$, 则原方程变为 $p'=p+x \Rightarrow p'-p=x$, 为一阶线性微分方程, 且 $P(x)=-1$, $Q(x)=x$, 从而可得该方程的通解为

$$\begin{aligned} p &= e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_1 \right) = e^{\int dx} \left(\int xe^{-\int dx} dx + C_1 \right) \\ &= e^x \left(\int xe^{-x} dx + C_1 \right) = e^x \left(-\int xde^{-x} + C_1 \right) = e^x \left(-xe^{-x} + \int e^{-x} dx + C_1 \right) \\ &= e^x \left(-xe^{-x} - e^{-x} + C_1 \right) = C_1e^x - x - 1, \end{aligned}$$

对 $y'=C_1e^x-x-1$ 两端积分, 得原方程的通解为

$$y=-\frac{x^2}{2}-x+C_1e^x+C_2, \quad C_1 \text{ 和 } C_2 \text{ 为任意常数.}$$

709 答案 $y=\ln|\cos(-x+C_1)|+C_2$, C_1 和 C_2 为任意常数.

令 $y'=p$, 则 $y''=p'$, 则原方程变为

$$p'+p^2+1=0 \Rightarrow \frac{dp}{dx}=-(p^2+1),$$

为一阶变量可分离方程. 分离变量得 $\frac{dp}{p^2+1}=-dx$, 两端积分可得该方程的通解为

$$\arctan p = -x + C_1 \Rightarrow p = \tan(-x + C_1),$$

对 $y'=\tan(-x+C_1)$ 两端积分, 得原方程的通解为 $y=\ln|\cos(-x+C_1)|+C_2$, C_1 和 C_2 为任意常数.

710 答案 $y=-\frac{C_1}{2x^2}+C_2$, C_1 和 C_2 为任意常数.

令 $y'=p$, 则 $y''=p'$, 则原方程变为

$$xp'+3p=0 \Rightarrow x \frac{dp}{dx} = -3p,$$

为一阶变量可分离方程. 分离变量得 $\frac{dp}{p} = -\frac{3}{x}dx$, 两端积分可得该方程的通解为

$$\ln|p| = -3\ln|x| + C_1' \Rightarrow px^3 = \pm e^{C_1'} = C_1 \Rightarrow p = \frac{C_1}{x^3},$$

对 $y'=\frac{C_1}{x^3}$ 两端积分, 得原方程的通解为 $y=-\frac{C_1}{2x^2}+C_2$, C_1 和 C_2 为任意常数.

711 答案 $y=-\frac{1}{2}\ln|2x+1|.$

令 $y' = p$, 则 $y'' = p'$, 则原方程变为 $p' - 2p^2 = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = 2p^2$, 为一阶变量可分离方程.

分离变量得 $\frac{dp}{p^2} = 2dx$, 两端积分可得该方程的通解为

$$-\frac{1}{p} = 2x + C_1 \Rightarrow y' = p = -\frac{1}{2x + C_1},$$

将初始条件 $y'|_{x=0} = -1$ 代入可得 $C_1 = 1$, 对 $y' = -\frac{1}{2x+1}$ 两端积分得 $y = -\frac{1}{2} \ln|2x+1| + C_2$,

将初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 代入可得 $C_2 = 0$, 因此, 原方程满足初始条件的特解为 $y = -\frac{1}{2} \ln|2x+1|$.

712 答案 $y = x^3 + 3x + 1$.

令 $y' = p$, 则 $y'' = p'$, 则原方程变为 $(1+x^2)p' = 2xp \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{2xp}{1+x^2}$,

为一阶变量可分离方程. 分离变量得 $\frac{dp}{p} = \frac{2x}{1+x^2} dx$, 两端积分可得该方程的通解为

$$\ln|p| = \ln(1+x^2) + C_1' \Rightarrow y' = p = C_1(1+x^2),$$

将初始条件 $y'|_{x=0} = 3$ 代入可得 $C_1 = 3$, 对 $y' = 3(1+x^2)$ 两端积分得 $y = x^3 + 3x + C_2$, 将初始条件 $y|_{x=0} = 1$ 代入可得 $C_2 = 1$, 因此, 原方程满足初始条件的特解为 $y = x^3 + 3x + 1$.

713 答案 $y^3 = C_1x + C_2$, C_1 和 C_2 为任意常数.

令 $y' = p$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$, 原方程变为 $yp \frac{dp}{dy} + 2p^2 = 0$, 为一阶变量可分离

方程. 分离变量得 $\frac{dp}{p} = -\frac{2}{y} dy$, 两端积分可得该方程的通解为

$$\ln|p| = -2\ln|y| + C_0 \Rightarrow py^2 = \pm e^{C_0} = C_1' \Rightarrow p = \frac{C_1'}{y^2},$$

对 $\frac{dy}{dx} = \frac{C_1'}{y^2}$ 分离变量, 得 $y^2 dy = C_1' dx$, 两端积分得原方程的通解为

$$\frac{1}{3} y^3 = C_1' x + C_2' \Rightarrow y^3 = C_1 x + C_2, \quad C_1 \text{ 和 } C_2 \text{ 为任意常数.}$$

714 答案 $y = \sqrt{x+1}$.

令 $y' = p$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$, 原方程变为 $yp \frac{dp}{dy} + p^2 = 0$, 得 $y \frac{dp}{dy} = -p$. 分离

变量得 $\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y}$, 两端积分可得该方程的通解为 $y' = p = \frac{C_1}{y}$, 将初始条件 $y|_{x=0} = 1$,

$y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$ 代入可得 $C_1 = \frac{1}{2}$, 对 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$ 分离变量得 $y dy = \frac{1}{2} dx$, 两端积分得 $y^2 = x + C_2$, 将

初始条件 $y|_{x=0} = 1$ 代入可得 $C_2 = 1$, 因此, 原方程满足初始条件的特解为 $y^2 = x+1 \Rightarrow$

$$y = \sqrt{x+1}.$$

715 答案 $C_1 y^2 - 1 = (C_1 x + C_2)^2$, C_1 和 C_2 为任意常数.

令 $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$, 则原方程变为 $y^3 p \frac{dp}{dy} - 1 = 0$. 分离变量得 $p dp = \frac{1}{y^3} dy$, 两端积分可得该方程的通解为

$$p^2 = -\frac{1}{y^2} + C_1 \Rightarrow p = \pm \sqrt{C_1 - \frac{1}{y^2}} = \pm \frac{1}{|y|} \sqrt{C_1 y^2 - 1},$$

对 $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{|y|} \sqrt{C_1 y^2 - 1}$ 分离变量得 $\frac{|y| dy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \pm dx$ 两端积分得原方程的通解为

$$\operatorname{sgn}(y) \sqrt{C_1 y^2 - 1} = \pm (C_1 x + C_2) \Rightarrow C_1 y^2 - 1 = (C_1 x + C_2)^2, \quad C_1 \text{ 和 } C_2 \text{ 为任意常数.}$$

评注

sgn 代表符号函数, 其表达式为 $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$.

716 答案 $y = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

令 $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$, 则原方程变为 $p \frac{dp}{dy} + p^2 = 1$. 分离变量得 $\frac{p}{1-p^2} dp = dy$, 两端积分, 整理可得该方程的通解为 $p^2 = 1 - C_1 e^{-2y}$, 将初始条件

$y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 0$ 代入可得 $C_1 = 1$, 故 $p = \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{1 - e^{-2y}}$, 分离变量得

$$\frac{dy}{\sqrt{1 - e^{-2y}}} = \pm dx \Rightarrow \frac{e^y dy}{\sqrt{e^{2y} - 1}} = \pm dx,$$

两端积分得 $\ln(e^y + \sqrt{e^{2y} - 1}) = \pm x + C_2$, 将初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 代入可得 $C_2 = 0$, 因此, 原方程满足初始条件的特解为

$$\ln(e^y + \sqrt{e^{2y} - 1}) = \pm x \Rightarrow e^y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow y = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

717 答案 (B).

因 $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \neq$ 常数, 故 $\sin x$ 与 $\cos x$ 线性无关. 注意 (C) 中 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, 故其与 $\sin x \cos x$ 为线性相关的.

718 答案 (D).

(A) 和 (B) 选项中的两组函数显然线性相关, (C) 和 (D) 选项中的两组函数线性无关, 故只需验证 x^2 与 e^x 是否为方程的解.

因 $(x^2)' = 2x$, $(x^2)'' = 2$, 代入方程 $(x-1) \cdot 2 - x \cdot 2x + x^2 \neq 0$, 故 x^2 不是方程的解. 而

$(e^x)'' = (e^x)' = e^x$, 代入方程 $(x-1)e^x - xe^x + e^x = 0$, 故 e^x 是方程的解.

719 答案 (C).

由方程 $y' + p(x)y = f(x)$ 的通解结构为齐次方程的通解加上非齐次方程的特解, 知其通解为 $y = y_1(x) + C_1 y_2(x)$, 令 $C_1 = -C$, 故 (C) 选项正确.

720 答案 (D).

因条件中的方程是一阶的, 而 (C) 选项中含有两个任意常数, 故首先排除 (C). 又由于 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 都可能是原方程的零解, 故 (A) 和 (B) 选项也不对. 因 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程 $y' + p(x)y = 0$ 的两个不同的解, 所以 $y_1(x) - y_2(x)$ 为该方程的一个非零解, 从而 $y = C(y_1(x) - y_2(x))$ 是该方程的通解.

721 答案 (C).

由定理知 $y = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$ 是该方程通解的充分必要条件是 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 线性无关, 即 $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \neq \text{常数}$, 从而

$$\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right)' = \frac{f_1(x)f_2'(x) - f_2(x)f_1'(x)}{f_2^2(x)} \neq 0,$$

即 $f_1(x)f_2'(x) - f_2(x)f_1'(x) \neq 0$.

722 答案 通解为 $y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$, C_1 和 C_2 为任意常数.

因为 $y_1' = -a \sin ax$, $y_1'' = -a^2 \cos ax$, 代入方程可得

$$y'' + a^2 y = -a^2 \cos ax + a^2 \cos ax = 0,$$

所以 $y_1 = \cos ax$ 是方程 $y'' + a^2 y = 0$ 的解.

又 $y_2' = a \cos ax$, $y_2'' = -a^2 \sin ax$, 代入方程可得 $y'' + a^2 y = -a^2 \sin ax + a^2 \sin ax = 0$,

所以 $y_2 = \sin ax$ 是方程 $y'' + a^2 y = 0$ 的解.

又 $\frac{y_1}{y_2} = \cot ax$ 不是常数, 所以 $y_1 = \cos ax$ 与 $y_2 = \sin ax$ 线性无关, 从而该方程的通解为

$y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$, C_1 和 C_2 为任意常数.

723 提示 要证 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{12} e^{5x}$ 是方程 $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$ 的通解, 需要证明:

(1) $y^* = \frac{1}{12} e^{5x}$ 是该方程的特解; (2) $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$ 是对应齐次方程的解; (3) $y_1 = e^x$ 与 $y_2 = e^{2x}$ 线性无关.

【证明】 (1) $(y^*)' = \frac{5}{12} e^{5x}$, $(y^*)'' = \frac{25}{12} e^{5x}$, 代入方程可得

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{25}{12} e^{5x} - \frac{15}{12} e^{5x} + \frac{2}{12} e^{5x} = e^{5x},$$

所以 $y^* = \frac{1}{12}e^{5x}$ 是该方程的特解.

(2) $y_1' = y_1'' = e^x$, 代入方程可得 $y'' - 3y' + 2y = e^x - 3e^x + 2e^x = 0$, 所以 $y_1 = e^x$ 是对应齐次方程的解.

$y_2' = 2e^{2x}$, $y_2'' = 4e^{2x}$, 代入方程可得 $y'' - 3y' + 2y = 4e^{2x} - 6e^{2x} + 2e^{2x} = 0$, 所以 $y_2 = e^{2x}$ 是对应齐次方程的解.

(3) 又 $\frac{y_1}{y_2} = e^{-x}$ 不是常数, 所以 $y_1 = e^x$ 与 $y_2 = e^{2x}$ 线性无关.

由 (2) 和 (3) 可得 $C_1e^x + C_2e^{2x}$ 是对应齐次方程的通解, 从而

$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{12}e^{5x}$ (C_1 和 C_2 为任意常数) 是方程 $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$ 的通解.

724 证明 将 $y = 2C_1y_1 + (C_2 - C_1)y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$ 整理可得

$$y = C_1(2y_1 - y_2 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_3,$$

要证其是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的通解, 需要证明: (1) y_3 是该方程的特解;

(2) $2y_1 - y_2 - y_3$, $y_2 - y_3$ 是对应齐次方程的解; (3) $2y_1 - y_2 - y_3$ 与 $y_2 - y_3$ 线性无关. 其中 (1) 和 (3) 显然成立, 现证明 (2) 如下.

因为 $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ 是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的三个线性无关的解, 故

$y_1 - y_2$, $y_1 - y_3$, $y_2 - y_3$ 均是对应齐次方程的解, 从而 $2y_1 - y_2 - y_3 = (y_1 - y_2) + (y_1 - y_3)$ 也是对应齐次方程的解.

由 (2) 和 (3) 可得, $C_1(2y_1 - y_2 - y_3) + C_2(y_2 - y_3)$ 对应齐次方程的通解, 从而

$$\begin{aligned} y &= C_1(2y_1 - y_2 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_3 \\ &= 2C_1y_1 + (C_2 - C_1)y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3 \quad (C_1 \text{ 和 } C_2 \text{ 为任意常数}) \end{aligned}$$

是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的通解.

725 答案 (C).

该微分方程的特征方程为 $r^2 + 2r = 0$, 解之得 $r_1 = 0, r_2 = -2$ 为两个互异的实根, 故方程的

通解为 $y = C_1 + C_2e^{-2x}$, 令 $C_1 = C_2 = 1$ 可得 $y = 1 + e^{-2x}$ 为一特解.

评注

本题也可把选项代入方程验证是否满足方程来判断是否为特解.

726 答案 (B).

由通解的形式知 $r_1 = 6, r_2 = -8$ 是所求微分方程的特征方程的根, 故特征方程为

$(r - 6)(r + 8) = r^2 + 2r - 48 = 0$, 从而对应的二阶常系数齐次线性微分方程为 $y'' + 2y' - 48y = 0$.

727 答案 (D).

由特解的形式知原微分方程的特征方程对应的特征根为共轭复根 $r_{1,2} = 2 \pm 3i$, 故特征

方程为 $(r - 2)^2 = -9 \Rightarrow r^2 - 4r + 13 = 0$, 从而对应的二阶常系数齐次线性微分方程为

$y'' - 4y' + 13y = 0$.

728 答案 $p = -4, q = 4$.

由特解的形式知, 原微分方程的特征方程对应的特征根为两个相等的实根 $r_1 = r_2 = 2$, 故特征方程为 $(r-2)^2 = 0 \Rightarrow r^2 - 4r + 4 = 0$, 因此 $p = -4, q = 4$.

729 答案 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}$, C_1 和 C_2 为任意常数.

该微分方程的特征方程为 $r^2 + 5r + 4 = 0$, 解之得 $r_1 = -1, r_2 = -4$, 为两个互异的实根, 故所求通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}$, C_1 和 C_2 为任意常数.

730 答案 $y = 6e^{-x} - 4e^{-3x}$.

该微分方程的特征方程为 $r^2 + 4r + 3 = 0$, 解之得 $r_1 = -1, r_2 = -3$, 为两个互异的实根, 故所求通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$, 从而 $y' = -C_1 e^{-x} - 3C_2 e^{-3x}$. 将初始条件 $y|_{x=0} = 2$,

$y'|_{x=0} = 6$ 代入可得 $\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ -C_1 - 3C_2 = 6 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} C_1 = 6 \\ C_2 = -4 \end{cases}$. 故所求特解为 $y = 6e^{-x} - 4e^{-3x}$.

731 答案 $y = (C_1 + C_2 x)e^{\frac{3}{2}x}$, C_1 和 C_2 为任意常数.

该微分方程的特征方程为 $4r^2 - 12r + 9 = 0$, 即 $(2r-3)^2 = 0$, 解之得 $r_1 = r_2 = \frac{3}{2}$, 为两个相等的实根, 故所求通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{\frac{3}{2}x}$, C_1 和 C_2 为任意常数.

732 答案 $s = (2+t)e^{-t}$.

该微分方程的特征方程为 $r^2 + 2r + 1 = 0$, 解之得 $r_1 = r_2 = -1$ 为两个相等的实根, 故所求通解为 $s = (C_1 + C_2 t)e^{-t}$, 从而 $s' = (-C_1 + C_2 - C_2 t)e^{-t}$. 将初始条件 $s|_{t=0} = 2, s'|_{t=0} = -1$ 代入可得 $\begin{cases} C_1 = 2 \\ -C_1 + C_2 = -1 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 1 \end{cases}$. 故所求特解为 $s = (2+t)e^{-t}$.

733 答案 $y = e^{-4x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$, C_1 和 C_2 为任意常数.

该微分方程的特征方程为 $r^2 + 8r + 17 = 0$, 即 $(r+4)^2 = -1$, 解之得 $r_{1,2} = -4 \pm i$, 为一对共轭复根, 且 $\alpha = -4, \beta = 1$, 故所求通解为 $y = e^{-4x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$, C_1 和 C_2 为任意常数.

734 答案 $y = e^{-5x}(\cos 2x + 2\sin 2x)$.

该微分方程的特征方程为 $r^2 + 10r + 29 = 0$, 即 $(r+5)^2 = -4$, 解之得 $r_{1,2} = -5 \pm 2i$, 为一对共轭复根, 且 $\alpha = -5, \beta = 2$, 故所求通解为 $y = e^{-5x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$, 从而

$$y' = e^{-5x} [(-5C_1 + 2C_2)\cos 2x + (-2C_1 - 5C_2)\sin 2x].$$

将初始条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = -1$ 代入可得 $\begin{cases} C_1 = 1 \\ -5C_1 + 2C_2 = -1 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{cases}$. 故所求特解为 $y = e^{-5x}(\cos 2x + 2\sin 2x)$.

735 答案 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + C_3 e^x$, C_1, C_2, C_3 为任意常数.

该微分方程的特征方程为 $r^3 + r^2 - r - 1 = 0$, 即 $(r+1)^2(r-1) = 0$, 解之得 $r_1 = r_2 = -1, r_3 = 1$, 故所求通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + C_3 e^x$, C_1, C_2, C_3 为任意常数.

736 答案 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$, C_1, C_2, C_3, C_4 为任意常数.

该微分方程的特征方程为 $r^4 - r^3 - r^2 - r - 2 = 0$, 即 $(r+1)(r-2)(r^2+1) = 0$, 解之得 $r_1 = -1, r_2 = 2, r_{3,4} = \pm i$, 故所求通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \text{ 为任意常数.}$$

737 答案 $f(x) = \cos x + \sin x$.

由 $f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ 两边对 x 求导得

$$f''(x) = -f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -f\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = -f(x) \Rightarrow f''(x) + f(x) = 0,$$

这是一个二阶常系数齐次线性微分方程, 其特征方程为 $r^2 + 1 = 0$, 解得 $r_{1,2} = \pm i$, 为一对共轭复根, 且 $\alpha = 0, \beta = 1$, 故所求通解为 $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, 从而 $f'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$. 将初始条件 $f(0) = f'(0) = 1$ 代入可得 $C_1 = C_2 = 1$, 故 $f(x) = \cos x + \sin x$.

738 答案 $f(x) = e^x$.

方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 的特征方程为 $r^2 + r - 2 = 0$, 解得 $r_1 = 1, r_2 = -2$ 为两个互异实根, 故 $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$, 从而 $f'(x) = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x}$, $f''(x) = C_1 e^x + 4C_2 e^{-2x}$, 代入 $f''(x) + f'(x) = 2e^x$ 可得 $2C_1 e^x + 5C_2 e^{-2x} = 2e^x$, 从而 $C_1 = 1, C_2 = 0$, 因此 $f(x) = e^x$.

739 答案 $y^* = \frac{4}{9} + \frac{1}{3}x$.

该微分方程对应齐次方程的特征方程为 $r^2 - 4r + 3 = 0$, 解之得 $r_1 = 1, r_2 = 3$. 又 $f(x) = x$ 是一次多项式, 且 0 不是特征方程的根, 所以设特解 $y^* = a_0 + a_1 x$, 从而 $(y^*)' = a_1, (y^*)'' = 0$, 代入方程得 $-4a_1 + 3(a_0 + a_1 x) = x$, 比较两端的系数, 得 $\begin{cases} 3a_0 - 4a_1 = 0 \\ 3a_1 = 1 \end{cases}$, 解得 $a_0 = \frac{4}{9}, a_1 = \frac{1}{3}$. 从而原方程的一个特解为 $y^* = \frac{4}{9} + \frac{1}{3}x$.

740 答案 $y = \frac{11}{8} - \frac{1}{2}x + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}$, C_1 和 C_2 为任意常数.

该微分方程的特征方程为 $r^2 + 5r + 4 = 0$, 解之得 $r_1 = -1, r_2 = -4$, 为两个互异的实根, 故对应齐次方程的通解为 $Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}$.

又 $f(x) = 3 - 2x$ 是一次多项式, 且 0 不是特征方程的根, 所以设特解 $y^* = a_0 + a_1 x$, 从而 $(y^*)' = a_1, (y^*)'' = 0$, 代入方程得 $5a_1 + 4(a_0 + a_1 x) = 3 - 2x$, 比较两端的系数, 得 $\begin{cases} 4a_0 + 5a_1 = 3 \\ 4a_1 = -2 \end{cases}$, 解之得 $a_0 = \frac{11}{8}, a_1 = -\frac{1}{2}$. 从而原方程的一个特解为 $y^* = \frac{11}{8} - \frac{1}{2}x$. 所以

原方程的通解为 $y = y^* + Y = \frac{11}{8} - \frac{1}{2}x + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}$, C_1 和 C_2 为任意常数.

741 答案 $y = \frac{7}{25}x - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x}$, C_1 和 C_2 为任意常数.

该微分方程的特征方程为 $2r^2 + 5r = 0$, 解之得 $r_1 = 0$, $r_2 = -\frac{5}{2}$, 为两个互异的实根, 故对应齐次方程的通解为 $Y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x}$.

又 $f(x) = 5x^2 - 2x - 1$ 是二次多项式, 且 0 是特征方程的单根, 所以设特解 $y^* = x(a_0 + a_1x + a_2x^2)$, 从而 $(y^*)' = a_0 + 2a_1x + 3a_2x^2$, $(y^*)'' = 2a_1 + 6a_2x$, 代入方程得

$$2(2a_1 + 6a_2x) + 5(a_0 + 2a_1x + 3a_2x^2) = 5x^2 - 2x - 1,$$

比较两端的系数, 得 $\begin{cases} 15a_2 = 5 \\ 10a_1 + 12a_2 = -2 \\ 5a_0 + 4a_1 = -1 \end{cases}$, 解之得 $a_0 = \frac{7}{25}$, $a_1 = -\frac{3}{5}$, $a_2 = \frac{1}{3}$. 从而原方程的

一个特解为 $\frac{7}{25}x - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{3}x^3$. 所以原方程的通解为

$$y = y^* + Y = \frac{7}{25}x - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x}, \quad C_1 \text{ 和 } C_2 \text{ 为任意常数.}$$

742 答案 $y = x + 2 - xe^x$.

由通解的形式知方程的特征根为 $r_1 = r_2 = 1$, 故特征方程为 $(r-1)^2 = r^2 - 2r + 1 = 0$, 从而 $a = -2, b = 1$.

又 $f(x) = x$ 是一次多项式, 且 0 不是特征方程的根, 所以设特解 $y^* = a_0 + a_1x$, 从而 $(y^*)' = a_1$, $(y^*)'' = 0$, 代入方程得 $-2a_1 + a_0 + a_1x = x$, 比较两端的系数, 得 $\begin{cases} a_0 - 2a_1 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$,

解之得 $a_0 = 2, a_1 = 1$. 从而原方程的一个特解为 $y^* = x + 2$. 所以原方程的通解为

$$y = x + 2 + (C_1 + C_2x)e^x, \text{ 且 } y' = 1 + (C_1 + C_2 + C_2x)e^x,$$

将初始条件 $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$ 代入可得 $\begin{cases} 2 + C_1 = 2 \\ 1 + C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$, 解之得 $C_1 = 0$, $C_2 = -1$. 从而要求的特解为 $y = x + 2 - xe^x$.

743 答案 (D).

利用微分方程解的叠加性, 分别求出 $y'' - 5y' + 6y = 3x$ 与 $y'' - 5y' + 6y = 2e^{2x}$ 的特解 $y_1^*(x)$ 与 $y_2^*(x)$, 则 $y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 即为所求微分方程的特解.

又该微分方程对应的特征方程 $r^2 - 5r + 6 = 0$, 解得 $r_1 = 2$, $r_2 = 3$. 又 $f_1(x) = 3x$ 是一次多项式, 且 0 不是特征方程的根, 所以设特解 $y_1^*(x) = ax + b$; $f_2(x) = e^{2x}$, 且 2 是特征方程的单根, 所以设特解 $y_2^*(x) = cxe^{2x}$, 从而原方程的特解形式为 $y_1^*(x) + y_2^*(x) = ax + b + cxe^{2x}$.

744 答案 $y = e^{2x} \left(\frac{1}{2}x^2 - x \right) + C_1 e^x + C_2 e^{2x}$, C_1 和 C_2 为任意常数.

该微分方程的特征方程为 $r^2 - 3r + 2 = 0$, 解得 $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, 为两个互异的实根, 故对应齐次方程的通解为 $Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. 又 $f(x) = xe^{2x}$, 且 2 是特征方程的单根, 所以设特解 $y^* = e^{2x}(a_0x + a_1x^2)$, 从而

$$\begin{aligned}(y^*)' &= a_0 e^{2x} + 2(a_0 + a_1)x e^{2x} + 2a_1 x^2 e^{2x}, \\(y^*)'' &= (4a_0 + 2a_1)e^{2x} + 4(a_0 + 2a_1)x e^{2x} + 4a_1 x^2 e^{2x},\end{aligned}$$

代入方程并整理得 $a_0 + 2a_1 + 2a_1 x = x$, 比较两端的系数, 得 $\begin{cases} a_0 + 2a_1 = 0 \\ 2a_1 = 1 \end{cases}$, 解得

$a_0 = -1, a_1 = \frac{1}{2}$. 从而原方程的一个特解为 $y^* = e^{2x} \left(\frac{1}{2} x^2 - x \right)$. 因此可得原方程的通解为

$$y = y^* + Y = e^{2x} \left(\frac{1}{2} x^2 - x \right) + C_1 e^x + C_2 e^{2x}, \quad C_1 \text{ 和 } C_2 \text{ 为任意常数.}$$

745 答案 $a=1, b=-2, c=6, d=2$.

因 $y = e^{-2x} + 2e^x + x^2 e^x$, 由解的性质和结构知 $y_1 = e^{-2x}, y_2 = e^x$ 是对应的齐次方程的两个线性无关的解, $y^* = x^2 e^x$ 是非齐次方程的解. 于是 $y'' + ay' + by = 0$ 的两个特征根分别为 $r_1 = -2, r_2 = 1$, 从而特征方程为 $(r+2)(r-1) = r^2 + r - 2 = 0$, 故 $a=1, b=-2$. 又 $y^* = x^2 e^x$ 是原方程的解, 且 $(y^*)' = x^2 e^x + 2x e^x, (y^*)'' = x^2 e^x + 4x e^x + 2e^x$, 代入原方程并整理有 $(6x+2)e^x = (cx+d)e^x$, 故 $c=6, d=2$.

评注

本题也可将 y 代入方程利用待定系数法求解.

746 答案 $y'' - y' - 2y = (1-2x)e^x$.

由解的性质和结构知 $y_1 - y_2 = e^{2x} - e^{-x}, y_1 - y_3 = e^{-x}, (y_1 - y_2) + (y_1 - y_3) = e^{2x}$ 都是相应齐次方程的解, $y_1 - e^{2x} = x e^x$ 是该非齐次方程的一个解. 由 e^{-x} 和 e^{2x} 是对应的齐次方程的两个线性无关的解知 $r_1 = -1, r_2 = 2$ 是特征方程的两个特征根, 从而特征方程为 $(r+1)(r-2) = r^2 - r - 2 = 0$, 故对应的齐次方程为 $y'' - y' - 2y = 0$. 设所求的微分方程为 $y'' - y' - 2y = f(x)$, 又 $x e^x$ 是该非齐次方程的一个解, 代入可得

$$f(x) = (x e^x)'' - (x e^x)' - 2x e^x = (x+2)e^x - (x+1)e^x - 2x e^x = (1-2x)e^x,$$

故所求微分方程为 $y'' - y' - 2y = (1-2x)e^x$.

评注

本题也可根据条件得到要求微分方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + x e^x$, 求出 y' 以及 y'' , 再消去 C_1 和 C_2 亦可得到所求微分方程, 请读者自行尝试.

747 答案 (D).

该微分方程对应齐次方程的特征方程为 $r^2 - 2r + 5 = 0$, 即 $(r-1)^2 = -4$ 解之得 $r_{1,2} = 1 \pm 2i$. 又 $f(x) = e^x \cos 2x$, 且 $\alpha \pm \beta i = 1 \pm 2i$ 是特征方程的根, 所以设特解 $y^* = x e^x (a \cos 2x + b \sin 2x)$, 代入方程并整理得

$$4b e^x \cos 2x - 4a e^x \sin 2x = e^x \cos 2x,$$

比较两端的系数, 得 $a=0, b=\frac{1}{4}$. 从而原方程的一个特解为 $y^* = \frac{1}{4} x e^x \sin 2x$.

748 答案 (D).

该微分方程对应齐次方程的特征方程为 $r^2 + 4 = 0$, 解得 $r_{1,2} = \pm 2i$. 又

$f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x = f_1(x) + f_2(x)$, 利用微分方程解的叠加性, 分别求出 $y'' + 4y = \frac{1}{2}$ 与 $y'' + 4y = \frac{1}{2} \cos 2x$ 的特解 $y_1^*(x)$ 与 $y_2^*(x)$, 则 $y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 即为所求微分方程的特解.

又 $f_1(x) = \frac{1}{2}$, 且 0 不是特征方程的根, 所以设特解 $y_1^*(x) = a$, $f_2(x) = \frac{1}{2} \cos 2x$, 且 $\alpha \pm \beta i = \pm 2i$ 是特征方程的根, 所以设特解 $y_2^* = x(b \cos 2x + c \sin 2x)$, 从而原方程的特解形式为

$$y^*(x) = y_1^*(x) + y_2^*(x) = a + x(b \cos 2x + c \sin 2x).$$

749 答案 $y = \frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{9} \sin x + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$, C_1 和 C_2 为任意常数.

该微分方程对应齐次方程的特征方程为 $r^2 + 4 = 0$, 解之得 $r_{1,2} = \pm 2i$ 为一对共轭复根, 且 $\alpha = 0, \beta = 2$, 故对应齐次方程的通解为 $Y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. 又 $f(x) = x \cos x$, 且 $\alpha \pm \beta i = \pm i$ 不是特征方程的根, 所以设特解 $y^* = (ax + b) \cos x + (cx + d) \sin x$, 从而

$$(y^*)' = (cx + a + d) \cos x + (-ax - b + c) \sin x,$$

$$(y^*)'' = (-ax - b + 2c) \cos x - (cx + 2a + d) \sin x,$$

代入方程并整理得 $(3ax + 3b + 2c) \cos x + (3cx - 2a + 3d) \sin x = x \cos x$, 比较两端的系数, 得 $a = \frac{1}{3}, b = c = 0, d = \frac{2}{9}$. 从而原方程的一个特解为 $y^* = \frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{9} \sin x$. 因此, 原方程的通解为

$$y = y^* + Y = \frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{9} \sin x + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x, C_1 \text{ 和 } C_2 \text{ 为任意常数.}$$

750 答案 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x - 2 \cos x$, C_1 和 C_2 为任意常数.

该微分方程对应齐次方程的特征方程为 $r^2 - 1 = 0$, 解之得 $r_1 = 1, r_2 = -1$ 为两个互异实根, 故对应齐次方程的通解为 $Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

又 $f(x) = e^x + 4 \cos x = f_1(x) + f_2(x)$, 利用微分方程解的叠加性, 分别求出 $y'' - y = e^x$ 与 $y'' - y = 4 \cos x$ 的特解 $y_1^*(x)$ 与 $y_2^*(x)$, 则 $y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 即为所求微分方程的特解.

因 $f_1(x) = e^x$, 且 1 是特征方程的单根, 所以设特解 $y_1^*(x) = a x e^x$; 又 $f_2(x) = 4 \cos x$, 且 $\alpha \pm \beta i = \pm i$ 不是特征方程的根, 所以设特解 $y^* = b \cos x + c \sin x$, 从而原方程的特解形式为

$$y^*(x) = y_1^*(x) + y_2^*(x) = a x e^x + b \cos x + c \sin x,$$

代入原方程并整理得 $2(a e^x - b \cos x - c \sin x) = e^x + 4 \cos x$, 比较两端的系数, 得 $a = \frac{1}{2}$,

$b = -2, c = 0$, 从而原方程的一个特解为 $y^* = \frac{1}{2} x e^x - 2 \cos x$. 因此, 原方程的通解为

$$y = y^* + Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x - 2 \cos x, C_1 \text{ 和 } C_2 \text{ 为任意常数.}$$