李林老师考研图书仅在北航出版社出版 · 李林全家桶之⑤

考研数学 精讲精练 880题 2026

（数学二）解析分册

李　林◎编著

紧跟考研趋势

与李林108题搭配使用更佳!

题目不偏不怪　贴近真题

扫码关注作者自媒体
李林老师新浪微博

扫码+刮防伪码
看配套课

扫码登录B站
看配套课

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

2026考研数学精讲精练880题（数学二）解析分册

李　林◎编著

北京航空航天大学出版社

作者简介

李林　原大连理工大学教师，考研数学实力派辅导名师，具有20多年丰富的考研辅导经验，深谙考研数学命题规律，预测精准。考研数学畅销书系作者，所出版的图书题目难度贴近真题，不偏不怪，让学生有“做其题如临考”的感觉，性价比很高，题目少而精，具有“精做一题，胜做十题”的良好效果，让广大考研学子赞不绝口。

李林老师考研图书仅在北航出版社出版

2026版李林全家桶共13种:

李林全家桶之①：2026考研数学高等数学辅导讲义（数学一、二、三通用）	2025年3月出版
李林全家桶之②：2026考研数学线性代数辅导讲义（数学一、二、三通用）	2025年3月出版
李林全家桶之③：2026考研数学概率论与数理统计辅导讲义（数学一、三通用）	2025年3月出版
李林全家桶之④：2026考研数学精讲精练880题（数学一）试题分册+解析分册	2025年3月出版
李林全家桶之⑤：2026考研数学精讲精练880题（数学二）试题分册+解析分册	2025年3月出版
李林全家桶之⑥：2026考研数学精讲精练880题（数学三）试题分册+解析分册	2025年3月出版
李林全家桶之⑦：2026考研数学高频考点108题（数学一、二、三通用）试题分册+解析分册	2025年5月出版
李林全家桶之⑧：2026考研数学冲刺预测6套卷（数学一）	2025年10月出版
李林全家桶之⑨：2026考研数学冲刺预测6套卷（数学二）	2025年10月出版
李林全家桶之⑩：2026考研数学冲刺预测6套卷（数学三）	2025年10月出版
李林全家桶之⑪：2026考研数学终极预测4套卷（数学一）	2025年11月出版
李林全家桶之⑫：2026考研数学终极预测4套卷（数学二）	2025年11月出版
李林全家桶之⑬：2026考研数学终极预测4套卷（数学三）	2025年11月出版

考研数学一考生用书:

李林全家桶之①+②+③+④+⑦+⑧+⑪：高数、线代、概率讲义+880题+108题+6套卷+4套卷

考研数学二考生用书:

李林全家桶之①+②+⑤+⑦+⑨+⑫：高数、线代讲义+880题+108题+6套卷+4套卷

考研数学三考生用书:

李林全家桶之①+②+③+⑥+⑦+⑩+⑬：高数、线代、概率讲义+880题+108题+6套卷+4套卷

扫码参与交流

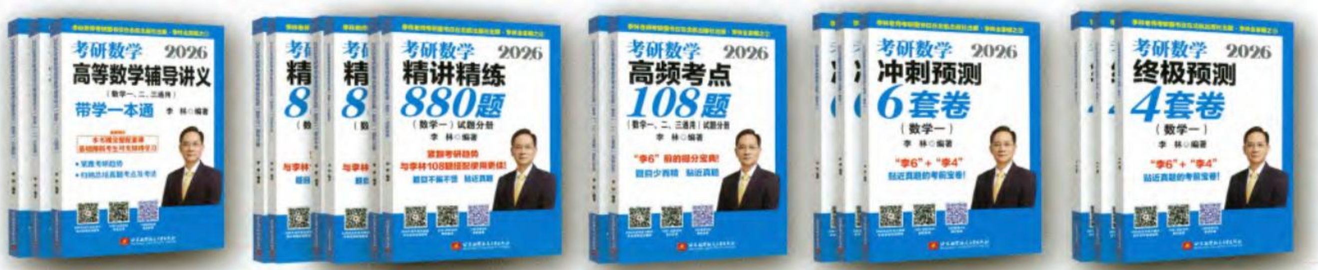
上架建议：考研数学

ISBN 978-7-5124-4681-6

定价：99.80元 全两册
（试题分册+解析分册）
本书为解析分册

2026版李林全家桶简介

“2026版李林全家桶”共13种，仅在北京航空航天大学出版社出版



李林全家桶之①②③
高数、线代、概率讲义
2025年3月出版

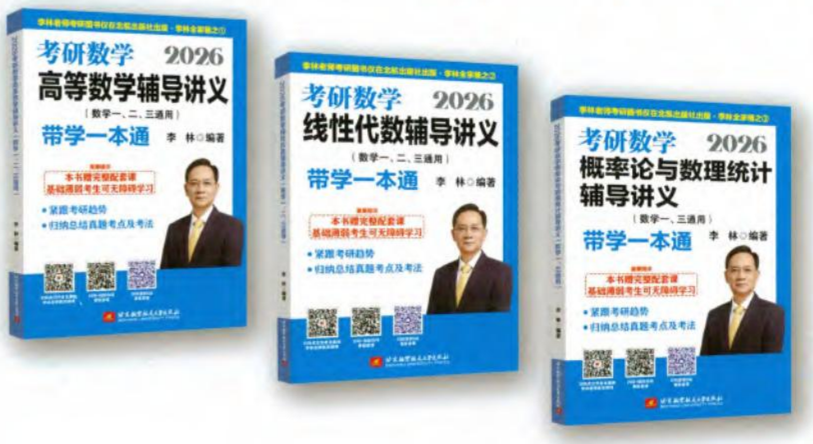
李林全家桶之④⑤⑥
精讲精练880题
2025年3月出版

李林全家桶之⑦
高频考点108题
2025年5月出版

李林全家桶之⑧⑨⑩
冲刺预测6套卷
2025年10月出版

李林全家桶之⑪⑫⑬
终极预测4套卷
2025年11月出版

李林全家桶之①②③ **高数、线代、概率讲义**

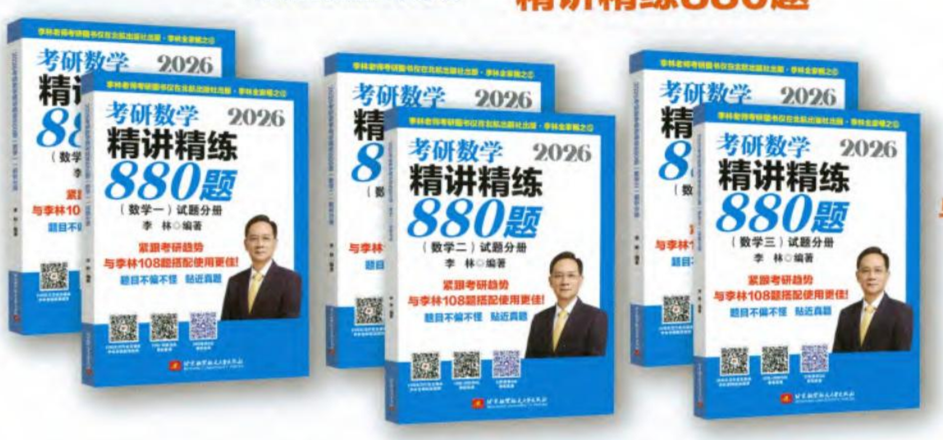


李林讲义亮点

带学一本通
赠完整配套课
基础薄弱考生可无障碍学习
紧跟考研趋势
归纳总结真题考点及考法

适用阶段 基础 · 强化

李林全家桶之④⑤⑥ **精讲精练880题**



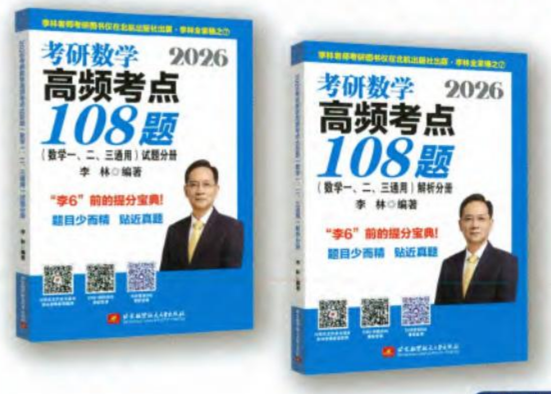
李林880题亮点

紧跟考研趋势
与李林108题搭配使用更佳!
题目不偏不怪 贴近真题

适用阶段 基础 · 强化

2026版李林全家桶简介

李林全家桶之⑦ **高频考点108题**

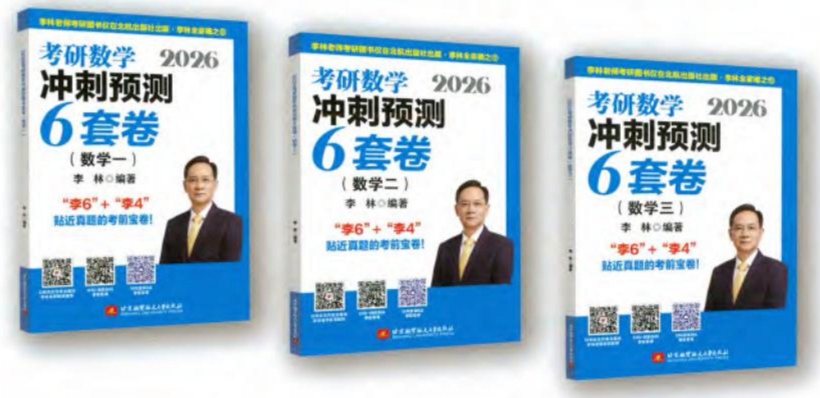


李林108题亮点

“李6”前的提分宝典!
题目少而精 贴近真题

适用阶段 基础 · 强化

李林全家桶之⑧⑨⑩ **冲刺预测6套卷**



李林6套卷亮点

“李6”＋“李4”
贴近真题的考前宝卷!

适用阶段 冲刺

李林全家桶之⑪⑫⑬ **终极预测4套卷**

李林4套卷亮点

“李6”＋“李4”
贴近真题的考前宝卷!

适用阶段 冲刺

2026 考研数学

精讲精练 880 题

（数学二）解析分册

李 林 编著

扫描二维码，获取更多免费资料

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书是李林老师为准备参加全国硕士研究生招生考试且考数学二的考生编写的习题训练用书。全书按照数学二的考试要求设计选择题、填空题和解答题，包括基础题、综合题和拓展题。基础题可以满足考研的基本要求，综合题和拓展题可作为复习提高阶段的练习。

本书以考研大纲为依据，在深入研究命题规律的基础上，从考生的实际出发精心编写而成，涵盖了考研数学的所有考点，题型全面，难度适中，真题感强。本书分为试题分册与解析分册，方便考生独立做题与核对答案。试题分册中，基础题、综合题与拓展题可以使考生分梯度学习，循序渐进地掌握相关考试内容。解析分册中，对每道题目都给出了详细的解析，方法典型；部分题目提供了多种解法，可以开拓思路。在重点题型和易错知识点的解析中，添加了"注"，对关键点、易错点进行点拨，有助于考生理解。

本书已出版多年，深受考生的厚爱与关注。为了适应考研的变化趋势，针对考研中的难点，作者在本次修订中特别增加了一些综合性较强的题目，以便考生更好地适应考试要求。

图书在版编目(CIP)数据

2026考研数学精讲精练880题. 数学二. 2，解析分册 / 李林编著. -- 北京 ：北京航空航天大学出版社，2025.3.
ISBN 978-7-5124-4681-6
Ⅰ. O13-44
中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2025RY4268 号

版权所有，侵权必究。

2026考研数学精讲精练880题(数学二)解析分册
李 林 编著
责任编辑 张冀青
*
北京航空航天大学出版社出版发行
北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191) http://www.buaapress.com.cn
发行部电话：(010)82317024 传真：(010)82328026
读者信箱：bhzxfs@163.com 邮购电话：(010)82316936
河北宏伟双华印刷有限公司印装 各地书店经销
*
开本：787×1 092 1/16 印张：27.5 字数：844 千字
2025 年 3 月第 1 版 2025 年 3 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5124-4681-6 定价：99.80 元 全两册(试题分册＋解析分册)

若本书有倒页、脱页、缺页等印装质量问题，请与本社发行部联系调换。联系电话：(010)82317024

目　录

高等数学

线性代数

扫描二维码，获取更多免费资料

高等数学

第一章　函数、极限、连续

基础题

一、选择题

(1)C.

解 对函数 $f(x)$ 取绝对值得 $|f(x)|=|x||\sin x|e^{\cos x}$，其中 $|\sin x|$ 不恒等于 0，$e^{\cos x}>0$，故根据 $|x|$ 可断定 $f(x)$ 不是有界函数，也不是周期函数. 再由 $f(0)=0, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}, f(\pi)=0$，可知 $f(x)$ 不是单调函数. 对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(-x)=|(-x)\sin(-x)|e^{\cos(-x)}=|x\sin x|e^{\cos x}=f(x),$$

故 $f(x)$ 是偶函数，选项 C 正确.

(2)D.

解 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内，$\sin x$ 单调增加，$\cos x$ 单调减少，任取 $x_1,x_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $x_1<x_2$，则 $\sin x_1<\sin x_2$，故 $\cos(\sin x_1)>\cos(\sin x_2)$，所以函数 $f(x)$ 单调减少. 又 $\cos x_1>\cos x_2$，则 $\sin(\cos x_1)>\sin(\cos x_2)$，故函数 $g(x)$ 单调减少，选项 D 正确.

注 ① 复合函数的单调性.

设函数 $f(x)$ 单调增加，$g(x)$ 单调减少，则：

$f[f(x)]$，$g[g(x)]$ 都单调增加(假设复合有意义)；

$f[g(x)]$，$g[f(x)]$ 都单调减少.

② 复合函数的奇偶性.

设 $f(x)$ 是偶函数，$g(x)$ 是奇函数，则：

$f[f(x)]$，$f[g(x)]$，$g[f(x)]$ 都是偶函数；

$g[g(x)]$ 是奇函数(假设复合有意义，可利用奇偶性定义证明).

(3)B.

解 由 $f(-x)=\sqrt{1-x+x^2}-\sqrt{1+x+x^2}=-f(x)$，知 $f(x)$ 是奇函数，且

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)&=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1}}=1,\end{aligned}$$

故选项 B 正确.

同理，可得 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$，故选项 D 错误. 根据极限的有界性，可知选项 C 错误.

(4)D.

解 由题可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+g(x)}{f(x)g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{g(x)}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$，故选项 D 正确.

(5)D.

解 当 $x\to 0$ 时,$\frac{1}{x^2}\to+\infty$,$\sin\frac{1}{x}$ 在 $-1\sim 1$ 之间振荡,且重复函数值为零,故可排除选项A和B.

取 $x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}(n=1,2,\cdots)$,则当 $x_n\to 0$ 时,

$$f(x_n)=\left(2n+\frac{1}{2}\right)^2\cdot\pi^2\to\infty,$$

故$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}(x\to 0)$不是无穷小,也不是有界量.再令 $y_n=\frac{1}{n\pi}(n=1,2,\cdots)$,则当 $y_n\to 0$ 时,$f(y_n)=0$,因此当 $x\to 0$ 时,$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 不是无穷大,可排除选项C.综上可知,选项D正确.

(6)C.

解 由已知,可得$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}=0$,有 $1-a=0,a+b=0$,得到 $a=1,b=-1$,故选项C正确.

注 由$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x+1}-(ax+b)\right]=0$ 及渐近线的定义,知 $y=ax+b$ 是 $y=\frac{x^2}{x+1}$ 的斜渐近线.

(7)B.

解 当 $x\to 0$ 时,$\ln(1+x^n)\sim x^n$,由 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$,知

$$(x-\sin x)\tan x\sim\frac{x^4}{6}.$$

由已知,$4>n$ 且 $n>2$,故 $n=3$,选项B正确.

(8)D.

解 依题设,有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\frac{1+ax^2}{1+bx}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+bx)-(1+ax^2)}{(1+bx)x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+bx)-(1+ax^2)}{x^3}\neq 0,$$

故 $$\lim_{x\to 0}\frac{\left[1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right](1+bx)-(1+ax^2)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+b)x+\left(\frac{1}{2}+b-a\right)x^2+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}b\right)x^3+\frac{1}{6}bx^4}{x^3}\neq 0,$$

所以 $1+b=0,\frac{1}{2}+b-a=0,\frac{1}{6}+\frac{1}{2}b\neq 0$,解得 $a=-\frac{1}{2},b=-1$.选项D正确.

(9)A.

解 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0<1,$$

故当 x 充分大时,$g(x)=x>0$,$\frac{f(x)}{g(x)}<1$,即 $f(x)<g(x)$.又

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{x}{2}}=+\infty>1,$$

故当 x 充分大时,$g(x)=x>0$,$\frac{h(x)}{g(x)}>1$,即 $h(x)>g(x)$.选项A正确.

注 此题本质是无穷大量阶的比较:从低阶到高阶有

$$\ln^{\lambda} n, n^{\alpha}, a^{n}, n!, n^{n} (n \to \infty),$$

其中 $\lambda \geqslant 1, \alpha > 0, a > 1$.

(10)C.

解 对于选项 C:用反证法证明. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ 存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty}[(a_n - b_n) + (a_n + b_n)] = \lim\limits_{n\to\infty} 2a_n$,极限存在,与已知"$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在" 相矛盾,故选项 C 正确.

(11)C.

解 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^n = \mathrm{e}$,根据极限与无穷小的关系,得

$$x_n = \sqrt[n]{\mathrm{e} + a_n},$$

其中当 $n \to \infty$ 时,$a_n \to 0$,则

$$x_n - 1 = \sqrt[n]{\mathrm{e} + a_n} - 1 \sim \frac{1}{n}\ln(\mathrm{e} + a_n) \sim \frac{1}{n}\ln \mathrm{e}\ (n \to \infty).$$

同理,$y_n - 1 \sim \dfrac{1}{n}\ln \mathrm{e}\ (n \to \infty)$,故

$$\lim_{n\to\infty} n(x_n + y_n - 2) = \lim_{n\to\infty}[n(x_n - 1) + n(y_n - 1)] = \ln \mathrm{e} + \ln \mathrm{e} = 2.$$

选项 C 正确.

(12)A.

解 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处间断,考虑间断点处的左、右极限.

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}} - \frac{\sin x}{x}\right) = 2 - 1 = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}} + \frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2\mathrm{e}^{-\frac{2}{x}} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}^{-\frac{2}{x}} + 1} + \frac{\sin x}{x}\right) = 1,$$

故 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点,选项 A 正确.

二、填空题

(1)1.

解 由已知可得

$$f[f(x)] = \begin{cases} 1, & |f(x)| \leqslant 1, \\ 0, & |f(x)| > 1. \end{cases}$$

由 $|f(x)| \leqslant 1$,知 $f[f(x)] = 1$,故 $f\{f[f(x)]\} = 1$.

(2)$-\dfrac{3}{2}$.

解 当 $x \to 0$ 时,$(1 + ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \dfrac{1}{3}ax^2$,$\cos x - 1 \sim -\dfrac{1}{2}x^2$,故 $a = -\dfrac{3}{2}$.

(3)-2.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x + \mathrm{e}^{2ax} - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x} + \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{2ax} - 1}{x} = 2 + \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2ax}{x} = 2 + 2a$,又由函数连续的定义,可得 $2 + 2a = a$,解得 $a = -2$.

(4)$P \leqslant 2$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^P\left(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^P \cdot a^{\frac{1}{x+1}}\left[a^{\frac{1}{x(x+1)}} - 1\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} x^P \cdot a^{\frac{1}{x+1}} \cdot \dfrac{\ln a}{x(x+1)}$ 存在,所以有 $P \leqslant 2$. 当 $P < 2$ 时,极限为 0;当 $P = 2$ 时,极限为 $\ln a$. 因此 P 的取值范围是 $P \leqslant 2$.

(5)0.

解 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3 + x^2 + 1}{\mathrm{e}^x + x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2 + 2x}{\mathrm{e}^x + 3x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x + 2}{\mathrm{e}^x + 6x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{\mathrm{e}^x + 6} = 0$,而 $|\sin x + \cos x| \leqslant 2$,即有界,故原式 $= 0$.

注 当 $x\to+\infty$ 时，e^x 是比 x^3 高阶的无穷大，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{e^x+x^3}=0$.

(6) $\dfrac{1}{12}$.

解 当 $x\to0$ 时，$e^{x^4}-1\sim x^4$. 故

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim_{x\to0}e^{2-2\cos x}\cdot\frac{e^{x^2-2+2\cos x}-1}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x-2\sin x}{4x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{12}.$$

注 解答中 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}e^{2-2\cos x}\cdot\dfrac{e^{x^2-2+2\cos x}-1}{x^4}$，这一步采取的方法是分子提取公因式 $e^{2-2\cos x}$，提取公因式是考研试题中常用的技巧.

一般有三种情形常可考虑提取公因式：① $\infty-\infty$；② 指数函数；③ 幂函数.

(7) $\dfrac{4}{3}$.

解 当 $x\to0$ 时，$\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{a+bx+cx^2+dx^3-\left[x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{a+(b-1)x+cx^2+\left(d-\frac{1}{3}\right)x^3+o(x^3)}{x^3}=0,$$

由上式可得，$a=0,b=1,c=0,d=\dfrac{1}{3}$，故 $a+b+c+d=\dfrac{4}{3}$.

三、解答题

(1) **证** 令 $f_1(x)=f(x)+f(-x)$，$f_2(x)=f(x)-f(-x)$，则

$$f_1(-x)=f(-x)+f(x)=f_1(x),$$
$$f_2(-x)=f(-x)-f(x)=-f_2(x),$$

故 $f_1(x)$ 是偶函数，$f_2(x)$ 是奇函数，所以

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

即 $f(x)$ 可以表示为一个偶函数与一个奇函数之和.

(2) **证** 首先解 $f(x)$. 已知

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x},\qquad ①$$

在①式中用 $\dfrac{1}{x}$ 代替 x，可得

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx.\qquad ②$$

再由 ①$\times a-$②$\times b$，可得到 $(a^2-b^2)f(x)=\dfrac{ac}{x}-bcx$，并且由 $|a|\neq|b|$，知

$$f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right).$$

而

$$f(-x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(-\frac{a}{x}+bx\right)=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

(3) 证 任取 $x_1,x_2\in(-a,a)$，且 $x_2>x_1$，由已知，可得

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant|x_2-x_1|=x_2-x_1.$$

而

$$f(x_1)-f(x_2)\leqslant|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant x_2-x_1,$$

故 $f(x_1)+x_1\leqslant f(x_2)+x_2$，即 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$，所以 $F(x)$ 在 $(-a,a)$ 内单调增加.

(4) 证 利用极限定义证明，关键是找足够大的 N，使得当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

由 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N_1，使得当 $2k>N_1$ 时，有

$$|x_{2k}-a|<\varepsilon;\qquad ①$$

$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k+1}=a$，对上述 $\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N_2，使得当 $2k+1>N_2$ 时，有

$$|x_{2k+1}-a|<\varepsilon.\qquad ②$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，① 与 ② 式同时成立，即 $|x_n-a|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(5) 解 (Ⅰ) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x\sin x}{x^2+x\sin\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}\sin x}{1+\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}}=1.$

(Ⅱ) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3+a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}-3}\cdot\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}-3}{3\cdot\frac{1}{x}}}$，而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}-3}{3\cdot\frac{1}{x}}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)+\left(b^{\frac{1}{x}}-1\right)+\left(c^{\frac{1}{x}}-1\right)}{3\cdot\frac{1}{x}}\\&=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)=\ln(abc)^{\frac{1}{3}},\end{aligned}$$

故原式 $=\mathrm{e}^{\ln(abc)^{\frac{1}{3}}}=(abc)^{\frac{1}{3}}$.

(Ⅲ)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\ln(\sin^2x+\mathrm{e}^x)-x}{\ln(\mathrm{e}^{2x}-x^2)-2x}&=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\sin^2x+\mathrm{e}^x)-\ln\mathrm{e}^x}{\ln(\mathrm{e}^{2x}-x^2)-\ln\mathrm{e}^{2x}}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{\sin^2x}{\mathrm{e}^x}\right)}{\ln\left(1-\frac{x^2}{\mathrm{e}^{2x}}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin^2x}{\mathrm{e}^x}}{-\frac{x^2}{\mathrm{e}^{2x}}}\\&=\lim_{x\to0}(-\mathrm{e}^x)\frac{\sin^2x}{x^2}=-1.\end{aligned}$$

(Ⅳ)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{3}{x}}-\mathrm{e}^3}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{3\ln(1+x)}{x}}-\mathrm{e}^3}{x}=\mathrm{e}^3\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{3\ln(1+x)}{x}-3}-1}{x}\\&=\mathrm{e}^3\lim_{x\to0}\frac{\frac{3\ln(1+x)}{x}-3}{x}=3\mathrm{e}^3\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\\&=3\mathrm{e}^3\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\frac{3}{2}\mathrm{e}^3.\end{aligned}$$

(Ⅴ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x(e^{\tan x-x}-1)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}e^x\cdot\dfrac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x^3}{x^3}=\dfrac{1}{3}.$

(Ⅵ) $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\tan x\cdot\sin x\cdot x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

(Ⅶ) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x^2)^{\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1-x^2)^{-\frac{1}{x^2}}\right]^{\frac{-x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}}$. 而

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2}=-2,$$

故原式 $=e^{-2}$.

(Ⅷ) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\sin x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\cdot\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}x\cdot\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^0=1.$

(6) 解 (Ⅰ) 依题意,可得

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}\leqslant\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}.$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}=\frac{1}{2},\ \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\frac{1}{2},$$

根据夹逼准则,原式 $=\dfrac{1}{2}$.

(Ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2n}{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n-1)}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(Ⅲ) 由 $\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$,知

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right),$$

故原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}$.

(Ⅳ) 由 $1\leqslant\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}\leqslant\sqrt[n]{n}$,而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,故由夹逼准则,原式 $=1$.

(Ⅴ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+\sqrt[n]{3}}{2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\left(\dfrac{1+\sqrt[n]{3}}{2}-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{1+\sqrt[n]{3}}{2}-1}\cdot n\left(\frac{1+\sqrt[n]{3}}{2}-1\right)}$. 而

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1+\sqrt[n]{3}}{2}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{\sqrt[n]{3}-1}{2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{3}-1)=\frac{1}{2}\ln 3,$$

故原式 $=e^{\frac{1}{2}\ln 3}=\sqrt{3}$.

注 常用结论: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$.

(7) 解 $f(x)$ 在$(0,2\pi)$ 内的间断点为 $x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$.

由 $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{4}\right)^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{5\pi}{4}\right)^+}f(x)=+\infty$,可知 $x=\frac{\pi}{4},x=\frac{5\pi}{4}$ 为第二类间断点.

由 $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}f(x)=1,\lim\limits_{x\to\frac{7\pi}{4}}f(x)=1$,可知 $x=\frac{3\pi}{4},x=\frac{7\pi}{4}$ 为第一类(可去)间断点.

(8) 解 先求极限得到 $f(x)$ 的表达式,再讨论 $f(x)$ 的连续性.

当 $x\neq 0$ 时,有 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}-1}{x^{2n}+1}=\begin{cases}-1, & 0<|x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ x^2, & |x|>1,\end{cases}$ 故在$(-\infty,-1),(-1,0),(0,1)$,$(1,+\infty)$ 内 $f(x)$ 连续. 又

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=1,\ \lim_{x\to-1^+}f(x)=-1,$$
$$\lim_{x\to0}f(x)=-1,$$
$$\lim_{x\to1^-}f(x)=-1,\ \lim_{x\to1^+}f(x)=1,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0,\pm1$ 处间断,都是第一类间断点,其中 $x=0$ 是可去间断点.

(9) 证 由 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,知 $f(x)$ 在$[c,d]$上取得最小值 k 和最大值K.

由于$(m+n)k\leqslant mf(c)+nf(d)\leqslant(m+n)K$,所以,当 m,n 同时为 0 时,命题成立;当 m,n 不同时为 0 时,

$$k\leqslant\frac{mf(c)+nf(d)}{m+n}\leqslant K.$$

由介值定理,可知存在一点 $\xi\in[c,d]\subset(a,b)$,使得 $f(\xi)=\frac{mf(c)+nf(d)}{m+n}$,即

$$mf(c)+nf(d)=(m+n)f(\xi).$$

(10) 证 依题意,有

$$x_1=\sqrt{a},x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},\cdots,x_n=\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{n\text{个根号}},\cdots,$$

不难通过数学归纳法证得$\{x_n\}$ 严格单调增加. 由 $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$,得 $x_{n+1}^2=a+x_n$,所以

$$x_{n+1}=\frac{a}{x_{n+1}}+\frac{x_n}{x_{n+1}}<\frac{a}{x_{n+1}}+1.$$

而 $x_{n+1}>\sqrt{a}$,因此 $x_{n+1}<\frac{a}{\sqrt{a}}+1=\sqrt{a}+1$,即$\{x_n\}$ 有上界,故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,等式 $x_{n+1}^2=a+x_n$ 两边取极限$(n\to\infty)$,得 $A^2=a+A$. 解得

$$A_1=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2},A_2=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}(\text{舍去}),$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

(11) 证 由已知,有 $x_{n+1}\geqslant0,y_{n+1}\geqslant0,x_n\leqslant y_n(n=1,2,\cdots)$. 由此可推得

$$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}\geqslant\sqrt{x_n^2}=x_n,y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}\leqslant\frac{y_n+y_n}{2}=y_n,$$

故$\{x_n\}$ 单调增加,$\{y_n\}$ 单调减少. 又 $x_1\leqslant x_n\leqslant y_{n+1}\leqslant y_1(n=1,2,\cdots)$,所以$\{x_n\}$ 与$\{y_n\}$ 都有界. 由单调有界准则,知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 与$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 都存在,设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$.

又由 $x_n\leqslant y_n$,可推得 $A\leqslant B$,当 $n\to\infty$ 时,将 $x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$ 和 $y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$ 两端分别取极限,得 $A=\sqrt{AB},B=\frac{A+B}{2}$,由此可得 $A=B$,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

综合题

一、选择题

(1)A.

解 令$\frac{1}{x}=t$,则

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{\sin t}-1}{(1+t)^k-(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{(1+t)[(1+t)^{k-1}-1]}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{(k-1)t(1+t)}=\frac{1}{k-1}=a\neq 0,$$

故 $k\neq 1$,选项 A 正确.

(2)A.

解 由
$$\lim_{x\to 0}\frac{2\arctan x-\ln\frac{1+x}{1-x}}{x^p}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}}{px^{p-1}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-4x^2}{1-x^4}}{px^{p-1}}=-\frac{4}{p}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{p-3}(1-x^4)}=c$$

可得 $p=3,c=-\frac{4}{3}$,选项 A 正确.

(3)D.

解 当 $x\to 0$ 时,

$$\beta(x)=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}=\frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}\sim x^2,$$
$$\alpha(x)=\tan x-\sin x=(1-\cos x)\tan x\sim\frac{x^3}{2},$$
$$\gamma(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t\,dt=-\cos t\Big|_0^{1-\cos x}$$
$$=1-\cos(1-\cos x)\sim\frac{(1-\cos x)^2}{2}\sim\frac{x^4}{8},$$

故选项 D 正确.

(4)D.

解 依题设,有
$$\lim_{x\to 0}y(x)=y(0)=0,$$
$$\lim_{x\to 0}y'(x)=y'(0)=0,$$
$$\lim_{x\to 0}y''(x)=\lim_{x\to 0}[e^{3x}-2y'(x)-y(x)]=1,$$

故
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sqrt{1+x^2}}{y(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{y(x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{y(x)}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{y'(x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2}{y''(x)}=\frac{1}{2}\times 2=1.$$

选项 D 正确.

(5)B.

解 因为$\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)\neq 0=F(0)$,所以 $x=0$ 是 $F(x)$ 的第一类间断点,故选项 B 正确.

(6)D.

解 当 $x\to-1$ 时，$\arctan\dfrac{1}{x^2-1}$ 有界，$x+1\to0$，故 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=0=f(-1)$，即 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续. 又 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\pi$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\pi$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处间断，选项 D 正确.

(7)C.

解 $f(x)$ 有 3 个间断点：$x=0,x=1,x=2$.

当 $x\to0$ 时，$\dfrac{1}{|x-1|}e^{\frac{1}{(x-1)(x-2)}}\to e^{\frac{1}{2}}$，

$$\lim_{x\to0}x\ln|x|=\lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}(-x)=0,$$

故 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，即 $x=0$ 为可去间断点. 又由于

$$\lim_{x\to1^-}e^{\frac{1}{(x-1)(x-2)}}=+\infty,\quad \lim_{x\to1^-}\frac{x\ln|x|}{|x-1|}=\lim_{x\to1^-}\frac{\ln|x|}{1-x}=\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-1,$$

故 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\infty$，即 $x=1$ 为无穷间断点.

当 $x\to2^+$ 时，由于

$$\frac{x\ln|x|}{|x-1|}\to2\ln2,\quad \lim_{x\to2^+}e^{\frac{1}{(x-1)(x-2)}}=+\infty,$$

故 $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\infty$，即 $x=2$ 为无穷间断点. 选项 C 正确.

(8)D.

解 对于选项 A：取 $M=\dfrac{a+1}{2}$，则 $M>1$，令 $x_n=a_n-\dfrac{a+1}{2}$，则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{a+1}{2}\right)=a-\frac{a+1}{2}=\frac{a-1}{2}>0.$$

由极限的保号性，可知当 n 充分大时，有 $x_n=a_n-\dfrac{a+1}{2}>0$，即 $a_n>\dfrac{a+1}{2}=M>1$.

对于选项 B：令 $x_n=b_n-a_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=b-a>0$，由保号性可知，当 n 充分大时，$x_n>0$，即 $a_n<b_n$.

对于选项 C：令 $x_n=N-a_n$，则 $x_n\geqslant0(n=1,2,\cdots)$，由极限保号性，得 $N-a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant0$，即 $a\leqslant N$，同理可得 $M\leqslant a$.

对于选项 D：取 $a_n=2-\dfrac{2}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{2}{n}\right)=2\neq0$. 显然，$a_n=2-\dfrac{2}{n}\leqslant2-\dfrac{1}{n}$，故选项 D 正确.

(9)D.

解 若取 $x_n=n,y_n=-n$，则 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 均无界，但 $\{x_n+y_n\}$ 有界，故排除选项 A.

若取 $x_n=n[1+(-1)^n]$，$y_n=n[1-(-1)^n]$，则 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 均无界，但 $x_ny_n=0$，即 $\{x_ny_n\}$ 有界，故排除选项 B.

若取 $x_n=n,y_n=0$，则 $\{x_n\}$ 无界，$\{y_n\}$ 有界，但 $\{x_ny_n\}$ 有界，故排除选项 C.

综上可知，选项 D 正确.

(10)B.

解 用反证法. 假设 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 不存在，由 $\{y_n\}$ 单调增加，知 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$.

又 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，这与 $\{x_n\}$ 单调减少矛盾，故 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在.

同理可证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

由$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$,知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$,故选项 B 正确. 选项 C,D 不正确.

由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 与$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 均存在,但不一定是无穷小. 选项 A 不正确.

(11)A.

解 由 $e^{x_n}=x_n+e^{y_n}$,有 $y_n=\ln\left(e^{x_n}-x_n\right)$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(e^{x_n}-x_n\right)}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(e^{x_n}-x_n+1-1)}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{x_n}-x_n-1}{x_n}$$
$$\xlongequal{x_n=t}\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-t-1}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1}{1}=0.$$

故 y_n 是比 x_n 高阶的无穷小,选项 A 正确.

(12)C.

解 令 $g(x)=x(1+\ln x)$,由已知 $f(t)$ 是 $g(x)=t,t\in[1,+\infty)$ 的反函数,$g(1)=1$.

当 $x\geqslant1$ 时,$g'(x)=2+\ln x>0$,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$. 故 $f(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上严格单调递增,从而 $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=+\infty$,故$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=+\infty$,$\{f(n)\}$ 发散,可排除选项 A.

由已知,有$\dfrac{f(n)}{n}=\dfrac{1}{1+\ln f(n)}$,当 $n\to\infty$ 时,$\dfrac{f(n)}{n}\to0$,故$\left\{\dfrac{f(n)}{n}\right\}$ 收敛,可排除选项 B.

由反函数的求导法则,有

$$f'(t)=\frac{1}{g'(x)}\bigg|_{x=f(t)}=\frac{1}{2+\ln x}\bigg|_{x=f(t)}=\frac{1}{2+\ln f(t)},$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)\ln n}{n}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)\ln t}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{1+\ln f(t)}$$
$$\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{t}}{\frac{f'(t)}{f(t)}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2+\ln f(t)}{1+\ln f(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{2}{\ln f(t)}+1}{\frac{1}{\ln f(t)}+1}=1,$$

所以$\left\{\dfrac{f(n)\ln n}{n}\right\}$ 收敛,选项 C 正确.

(13)B.

解 取 $x_n=n$,$\arctan x_n=\arctan n$,则$\{\arctan n\}$ 收敛且单调,但$\{x_n\}$ 发散,故 ①、② 不正确.

由于 $\arcsin x$ 是连续函数,当$\{x_n\}$ 收敛时,$\lim\limits_{n\to\infty}\arcsin x_n=\arcsin(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)$ 存在,故 ③ 正确.

又 $\arcsin x$ 单调递增且有界,当$\{x_n\}$ 单调时,$\{\arcsin x_n\}$ 单调有界,所以$\{\arcsin x_n\}$ 收敛,④ 正确.

综上可知,选项 B 正确.

(14)D.

解 对于选项 D:由于

$$\frac{1}{n^2}\cdot n<\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1^2}\cdot n,$$
$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}}<\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}<\sqrt[n]{n},$$

且 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1,$$

故由夹逼准则可知原极限等于 1,选项 D 正确.

对于选项 A:当 $x\to1^-$ 时,有$\dfrac{1}{1-x}\to+\infty$,$2^{\frac{1}{1-x}}\to+\infty$,故 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}=0$;当 $x\to1^+$ 时,有

$\dfrac{1}{1-x}\to-\infty$，$2^{\frac{1}{1-x}}\to 0$，故 $\lim\limits_{x\to 1^{+}}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}=1$，由此可知原极限不存在.

对于选项B：令 $f(x)=\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)^{x}$，若取 $x_n=n\pi, y_n=\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi(n=1,2,\cdots)$，则当 $n\to\infty$ 时，有 $x_n\to+\infty$，$y_n\to+\infty$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{0}{n\pi}\right)^{n\pi}=1$，

$$\lim_{n\to\infty}f(y_n)=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right]^{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}=\mathrm{e},$$

故由海涅定理可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)^{x}$ 不存在.

对于选项C：由于数列 $\{n+(-1)^n(n+1)\}$ 无界，故 $\lim\limits_{n\to\infty}[n+(-1)^n(n+1)]$ 不存在.

(15)D.

解 由已知，可得 $tf(t)$ 是偶函数，故 $\int_0^u tf(t)\mathrm{d}t$ 是关于 u 的奇函数，则 $\int_a^x\left[\int_0^u tf(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$ 是关于 x 的偶函数，选项D正确.

注 结论：设 $f(x)$ 连续，$a\neq 0$ 为常数，则当 $f(x)$ 是奇函数时，$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数；当 $f(x)$ 是偶函数时，$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 不一定为奇函数.

(16)C.

解 当 $x>0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+2^{tx}}{1+2^{tx}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x2^{-tx}+1}{2^{-tx}+1}=1$.

当 $x=0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+2^{tx}}{1+2^{tx}}=\dfrac{1}{2}$.

当 $x<0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+2^{tx}}{1+2^{tx}}=x$. 由此可得

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0,\\ x, & x<0.\end{cases}$$

$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，所以 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续，但不可导，故选项C正确.

注 这里利用了结论：设 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，若 $f(x)$ 可积，则 $F(x)$ 连续；若 $f(x)$ 连续，则 $F(x)$ 可导. 题中 $f(x)$ 只有一个第一类间断点 $x=0$，故 $f(x)$ 可积.

(17)A.

解 由 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{(x^3-1)\sin x}{|x|(1+x^2)}=1$ 和极限的有界性，可知存在 $\delta_1>0$，并且当 $-\delta_1<x<0$ 时，$f(x)$ 有界.

由 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(x^3-1)\sin x}{|x|(1+x^2)}=-1$，可知存在 $\delta_2>0$，并且当 $0<x<\delta_2$ 时，$f(x)$ 有界.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $|x|<\delta$ 时，$f(x)$ 有界. 又因

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-1}{|x|(1+x^2)}=1,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{|x|(1+x^2)}=-1,$$

且 $|\sin x|\leqslant 1$，可知存在充分大的 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，$f(x)$ 有界.

又 $f(x)$ 在 $[\delta,X]$，$[-X,-\delta]$ 上连续，故有界，从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界. 选项A正确.

注 判别 $f(x)$ 在区间上有界的常用方法：

① 利用定理:若 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,则 $f(x)$ 在$[a,b]$上有界.

② 若 $f(x)$ 在开区间(a,b)内连续,且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 都存在,则 $f(x)$ 在(a,b)内有界,(a,b)为无穷区间也成立.

③ 结论:若 $f'(x)$ 在有限区间(a,b)内有界,则 $f(x)$ 在(a,b)内有界.

证 任取 $x\in(a,b)$,取定点 $x_0\in(a,b)(x\neq x_0)$,由拉格朗日中值定理,知存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$,则

$$|f(x)|=|f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)|\leqslant|f(x_0)|+|f'(\xi)||x-x_0|.$$

由 $f'(\xi)$ 有界及 $|x-x_0|<|b-a|$,可知存在 $M\geqslant0$,使得 $|f(x)|\leqslant M$.

此结论对$(-\infty,+\infty)$区间不成立.

二、填空题

(1) 5.

解
$$\begin{aligned}f(x)&=3x-4\sin x+\sin x\cos x=3x-4\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x\\&=3x-4\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)\right]+\frac{1}{2}\left[2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}+o(x^6)\right]\\&=\frac{1}{10}x^5+o(x^6),\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是关于 x 的 5 阶无穷小$(x\to0)$.

(2) -12.

解 利用泰勒公式,分母中有$\frac{x^2}{2}$项,将 $\sqrt{1+x^2}$ 展开到比 x^2 高次幂的项:

$$\sqrt{1+x^2}=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)x^4+o(x^4),$$

故$\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}=\frac{x^4}{8}+o(x^4)$.

又 $\sin x^2\sim x^2$,将 $\cos x$, e^{x^2} 分别展开到 x^2 项,得

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2),\ e^{x^2}=1+x^2+o(x^2),$$

故$(\cos x-e^{x^2})\sin x^2=\frac{-3x^4}{2}+o(x^4)$. 综上可知,原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)}{\frac{x^4}{8}+o(x^4)}=-12$.

(3) 6.

解 由$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=-1$,可知当 $x\to0$ 时,有 $f(x)\sim-(1-\cos x)\sim-\frac{x^2}{2}$. 又

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{\sin^2x}f(t)\mathrm{d}t}{x^n}&=\lim_{x\to0}\frac{f(\sin^2x)\cdot2\sin x\cos x}{nx^{n-1}}=\frac{2}{n}\lim_{x\to0}\frac{xf(x^2)}{x^{n-1}}\\&=\frac{2}{n}\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{-(x^2)^2}{2}}{x^{n-1}}=\frac{1}{n}\lim_{x\to0}\frac{-x^5}{x^{n-1}},\end{aligned}$$

故 $n-1=5$,即 $n=6$.

(4) Ae^b.

解 由$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-b}{x-a}=A$,知$\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$.

对 e^u 在$[b,f(x)]$或$[f(x),b]$上应用拉格朗日中值定理,有

$$e^{f(x)}-e^b=e^{\xi_x}[f(x)-b],$$

其中 ξ_x 介于 b 与 $f(x)$ 之间. 由 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$，知 $\lim\limits_{x\to a}\xi_x=b$，故

$$\lim_{x\to a}\frac{e^{f(x)}-e^b}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{e^{\xi_x}[f(x)-b]}{x-a}=Ae^b.$$

(5) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}}-1$.

解 $a_n=\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,dx=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{n}\int_0^{\frac{n}{n+1}}(1+x^n)^{\frac{1}{2}}d(1+x^n)=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{3}(1+x^n)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{n}{n+1}}$

$$=\frac{1}{n}\left\{\left[1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]^{\frac{3}{2}}-1\right\}.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n=e$，知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=\dfrac{1}{e}$，故

$$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]^{\frac{3}{2}}-1\right\}=(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}}-1.$$

(6) $\dfrac{1}{1-2k}$.

解
$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2nk+1}{n(1-2k)}\right]^n=\ln\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n-2nk+1}{n(1-2k)}\right]^n$$
$$=\ln\lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\frac{1}{n(1-2k)}\right]^{n(1-2k)}\right\}^{\frac{1}{1-2k}}=\ln e^{\frac{1}{1-2k}}=\frac{1}{1-2k}.$$

(7) a_1^{-1}.

解 由 $0<a_1<a_2$，有

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^{-n}+a_2^{-n})^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}a_1^{-1}\left[1+\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}=a_1^{-1}，其中\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n=0.$$

注 ① 这类问题也可利用以下结论：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=\max_{1\leqslant i\leqslant k}\{a_i\}\ (a_i>0,i=1,2,\cdots,k).$$

由 $0<a_1<a_2$，可知 $\dfrac{1}{a_1}>\dfrac{1}{a_2}$，故

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^{-n}+a_2^{-n})^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{a_1}\right)^n+\left(\frac{1}{a_2}\right)^n}=\frac{1}{a_1}.$$

② 本题也可利用夹逼准则求解，由 $0<a_1<a_2$，可知 $\dfrac{1}{a_1}>\dfrac{1}{a_2}$，故

$$\frac{1}{a_1}=\sqrt[n]{\left(\frac{1}{a_1}\right)^n}<\sqrt[n]{\left(\frac{1}{a_1}\right)^n+\left(\frac{1}{a_2}\right)^n}<\sqrt[n]{2\left(\frac{1}{a_1}\right)^n}=\frac{\sqrt[n]{2}}{a_1}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^{-n}+a_2^{-n})^{\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{a_1}$.

(8) $-1,0$.

解
$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^6}-ax^2-b)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^{-6}-1}-a-bx^{-2}}{\dfrac{1}{x^2}}.$$

而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$，由已知，有 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^{-6}-1}-a-bx^{-2})=0$，易知 $a=-1$，代回原式，得 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^6}+x^2-b)=0$，所以

$$b=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^6}+x^2)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^6)^2}-x^2\sqrt[3]{1-x^6}+x^4}=0,$$

故 $a=-1,b=0$.

(9) $-2,2$.

解 由 $\lim\limits_{x\to0^+}[x]=0,\lim\limits_{x\to0^-}[x]=-1$,有

$$\lim_{x\to0^+}\left\{a[x]+\frac{\ln\left(1+e^{\frac{2}{x}}\right)}{\ln\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)}\right\}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left(1+e^{\frac{2}{x}}\right)}{\ln\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left[e^{\frac{2}{x}}\left(1+e^{-\frac{2}{x}}\right)\right]}{\ln\left[e^{\frac{1}{x}}\left(1+e^{-\frac{1}{x}}\right)\right]}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{2+x\ln\left(1+e^{-\frac{2}{x}}\right)}{1+x\ln\left(1+e^{-\frac{1}{x}}\right)}=2=b.$$

$$\lim_{x\to0^-}\left\{a[x]+\frac{\ln\left(1+e^{\frac{2}{x}}\right)}{\ln\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)}\right\}=-a+\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}=-a+\lim_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=-a+0=2,$$

故 $a=-2,b=2$.

(10) 0.

解 由 $y=f(x)$ 关于点 $(a,0)(a\neq0)$ 对称,知 $f(a+x)=-f(a-x)$,即 $f(a+x)$ 和 $f(a-x)$ 关于 x 是奇函数,故对称区间上积分为 0,即 $I=0$.

注 结论:

① $y=f(x)$ 关于直线 $x=a(a\neq0)$ 对称 $\Leftrightarrow f(a+x)=f(a-x)\Rightarrow f(a-x),f(a+x)$ 关于 x 是偶函数;

② $y=f(x)$ 关于点 $(a,0)(a\neq0)$ 对称 $\Leftrightarrow f(a+x)=-f(a-x)\Rightarrow f(a-x),f(a+x)$ 关于 x 是奇函数.

(11) 1.

解 $y^2+xy+x^2-x=0$ 两边同时对 x 求导,得

$$2yy'+y+xy'+2x-1=0,$$

解得 $y'(x)=-\dfrac{y+2x-1}{2y+x}$,由 $y(1)=-1$,知 $y'(1)=0$. 故

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{1+y(x)}\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{y'(x)}$$

$$=-\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)(2y+x)}{y+2x-1}$$

$$=-2\lim_{x\to1}\frac{2xy-2y+x^2-x}{y+2x-1}$$

$$\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}-2\lim_{x\to1}\frac{2xy'+2y-2y'+2x-1}{y'+2}$$

$$=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1.$$

(12) $\dfrac{f''(1)}{2[f'(1)]^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{1}{f'(1)(x-1)}-\dfrac{1}{f(x)-f(1)}\right]$ 为 $\infty-\infty$ 型,须先通分,再利用泰勒公式,则

$$\text{原式}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)-f'(1)(x-1)}{f'(1)(x-1)[f(x)-f(1)]}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2+o[(x-1)^2]}{f'(1)(x-1)[f(x)-f(1)]}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{2}f''(1)+\frac{o[(x-1)^2]}{(x-1)^2}}{f'(1)\cdot\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}=\frac{f''(1)}{2[f'(1)]^2}.$$

三、解答题

(1) **证** 考虑数列$\{|a_n|\}$，有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=|q|<1$，由极限保号性，知存在充分大的正整数$N$，使得当$n>N$时，有$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<1$，即$|a_{n+1}|<|a_n|$，于是$\{|a_n|\}$单调减少；又因$|a_n|\geqslant0$，由单调有界准则可知，$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|$存在，记$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=a$. 下证$a=0$，用反证法.

若$a\neq0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}|}{\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|}=\frac{a}{a}=1,$$

这与$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=|q|<1$矛盾，故$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$，从而有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

(2) **解** 由题设可得$u_n=2^{\frac{1}{2}}\cdot2^{\frac{1}{4}}\cdot\cdots\cdot2^{\frac{1}{2^n}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$，而

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1,$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=2^1=2$.

注 此题相乘的因子不是有限项，不能用极限的四则运算法则.

(3) **证** 可以分$a=0,a>0,a<0$三种情况进行讨论.

当$a=0$时，$x_n=2$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$；

当$a>0$时，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+a)^{n+1}+(1-a)^{n+1}}{(1+a)^n+(1-a)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^n(1-a)}{1+\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^n},$$

由$\left|\frac{1-a}{1+a}\right|<1$，知$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^n=0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1+a$；

当$a<0$时，同理可证$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1-a$. 即所证等式成立.

(4) **证** 令$\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}=a$，则

$$a=\sqrt[n]{a^n}\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}\leqslant\sqrt[n]{ka^n}.$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{ka^n}=\lim\limits_{n\to\infty}a\sqrt[n]{k}=a$，故由夹逼准则，知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}.$$

(5) **解** (Ⅰ) 由$x_{n+2}=\frac{1}{2}(3x_{n+1}-x_n)$，有$\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}=\frac{1}{2}$.

令 $y_n = x_{n+1} - x_n (n = 1,2,\cdots)$，则 $\{y_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列. 当 $n \geqslant 2$ 时，

$$x_n = x_1 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} = 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right),$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$.

(Ⅱ) 由 $x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$，得 $x_{n+2} - x_{n+1} = -\frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n)\ (n = 1,2,\cdots)$.

当 $n > 3$ 时，

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} &= -\frac{1}{2}(x_{n-1} - x_{n-2}) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 (x_{n-2} - x_{n-3}) = \cdots \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(x_2 - x_1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = 1 + \sum_{k=0}^{n-2}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ &= 1 + \frac{2}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right], \end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{5}{3}$.

(6) 证 (Ⅰ) $f_n(x) = 1 - (1 - \cos x)^n$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上连续，$f_n(0) = 1$，$f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$，而 $0 < \frac{1}{2} < 1$，由介值定理，可知至少存在一点 $x_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，使得 $f_n(x_n) = \frac{1}{2}$. 又由

$$f_n'(x) = -n(1 - \cos x)^{n-1} \cdot \sin x < 0\ \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

可知当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$f_n(x)$ 严格单调减少，故 x_n 是唯一的.

(Ⅱ) 由 $f_n\left(\arccos\frac{1}{n}\right) = 1 - \left[1 - \cos\left(\arccos\frac{1}{n}\right)\right]^n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$，得 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n\left(\arccos\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{e} > \frac{1}{2}$，而 $f_n\left(\arccos\frac{1}{n}\right)$ 单调减少，故 $f_n\left(\arccos\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{2}$.

又 $f_n(x)$ 单调减少，故 $\arccos\frac{1}{n} < x_n < \frac{\pi}{2}$. 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\arccos\frac{1}{n} = \frac{\pi}{2}$，由夹逼准则，有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$.

(7) 证 (Ⅰ) 令 $f(x) = x - 1 - 2\ln x$，则 $f(e) = e - 3 < 0$，且

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x - 1 - 2\ln x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2\ln x}{x}\right) = +\infty.$$

由零点定理，知 $f(x) = 0$ 在 $(e, +\infty)$ 内至少有一个实根. 又由于

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x} > 0,\ x \in (e, +\infty),$$

故 $f(x) = 0$ 在 $(e, +\infty)$ 内有唯一实根，记为 ξ.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知，当 $x \in (e, \xi)$ 时，$f(x) < 0$，即 $1 + 2\ln x > x$，故当 $e < x_0 < \xi$ 时，

$$x_1 = 1 + 2\ln x_0 > x_0,$$
$$x_1 = 1 + 2\ln x_0 < 1 + 2\ln\xi = \xi.$$

假设 $x_n > x_{n-1}$，且 $x_n < \xi$，则

$$x_{n+1} = 1 + 2\ln x_n > x_n,$$
$$x_{n+1} = 1 + 2\ln x_n < 1 + 2\ln\xi = \xi.$$

由数学归纳法，知 $\{x_n\}$ 单调增加有上界，故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

对 $x_n = 1 + 2\ln x_{n-1}$ 左右两端同时取极限，有 $A = 1 + 2\ln A$，即 A 为方程 $x = 1 + 2\ln x$ 的实根. 由(Ⅰ)

可知，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A = \xi$.

(8) 证 （Ⅰ）令 $g(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{2}\right)$，$x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，则

$$g(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right),\ g\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1).$$

若 $g\left(\frac{1}{2}\right)=0$，取 $\xi=\frac{1}{2}$ 即可；若 $g\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$，则由 $f(0)=f(1)$，知 $g(0)g\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

由零点定理，知至少存在一点 $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\subset(0,1)$，使得 $g(\xi)=f(\xi)-f\left(\xi+\frac{1}{2}\right)=0$，即 $f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{2}\right)$.

（Ⅱ）令 $F(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)$，$x\in\left[0,\frac{n-1}{n}\right]$，则

$$F(0)+F\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+F\left(\frac{n-1}{n}\right)=f(1)-f(0)=0.$$

若 $F(0)=F\left(\frac{1}{n}\right)=\cdots=F\left(\frac{n-1}{n}\right)=0$，则

$$f\left(0+\frac{1}{n}\right)-f(0)=f\left(\frac{2}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)=\cdots=f(1)-f\left(\frac{n-1}{n}\right)=0,$$

所证结论显然成立；

若 $F(0),F\left(\frac{1}{n}\right),\cdots,F\left(\frac{n-1}{n}\right)$ 不全为零，则其中必有正值和负值，由零点定理，知至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)$.

注 本例可以推广为：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)$，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(\xi)=f\left(\xi+\frac{b-a}{n}\right).$$

(9) 解 $e^{3x^3}-1\sim 3x^3(x\to 0)$，所求极限为 $\frac{0}{0}$ 型. 由洛必达法则，有

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{(3+2\tan x)^x-3^x}{9x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{3^x\left[\left(1+\frac{2}{3}\tan x\right)^x-1\right]}{9x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(1+\frac{2}{3}\tan x\right)}-1}{9x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\left(1+\frac{2}{3}\tan x\right)}{9x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}\tan x}{9x}=\frac{2}{27}.\end{aligned}$$

(10) 解 当 $x\to+\infty$ 时，$1-e^{\frac{1}{x}}\sim-\frac{1}{x}$，故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^3}\int_1^x\left[(1+t^2)\sin\frac{1}{t}-\cos t\right]dt}{1-e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[(1+t^2)\sin\frac{1}{t}-\cos t\right]dt}{-x^2}$$

$$\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x^2)\sin\frac{1}{x}-\cos x}{-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{-2x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}-\cos x}{-2x}.$$

当 $x\to+\infty$ 时，$\sin\frac{1}{x}\to 0$，$|\cos x|\leqslant 1$，即 $\sin\frac{1}{x}-\cos x$ 有界，且分母 $-2x$ 趋于无穷大，故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}-\cos x}{-2x}=0.$$

又

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{-2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=-\frac{1}{2},$$

故原式 $=-\frac{1}{2}+0=-\frac{1}{2}$.

注 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+x^2)\sin\frac{1}{x}-\cos x}{-2x}$ 时,不能用洛必达法则. 因为分子

$$\left[(1+x^2)\sin\frac{1}{x}-\cos x\right]'=2x\sin\frac{1}{x}-\frac{1+x^2}{x^2}\cos\frac{1}{x}+\sin x.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在,$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\frac{1+x^2}{x^2}\cos\frac{1}{x}\right)=2-1\neq 0$.

分母$(-2x)'=-2$,$\lim\limits_{x\to+\infty}(-2)=-2\neq 0$.

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\frac{1+x^2}{x^2}\cos\frac{1}{x}+\sin x}{-2}$ 不存在,且不是无穷大量,洛必达法则失效.

(11) 解 令$\frac{1}{x}=t$,则

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left[e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}-\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ex}\right]=\lim_{t\to0}\frac{e^{(1+t)^{\frac{1}{t}}}-(1+t)^{\frac{e}{t}}}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{e^{(1+t)^{\frac{1}{t}}}-e^{\frac{e\ln(1+t)}{t}}}{t^2}.$$

由拉格朗日中值定理,有

$$e^{(1+t)^{\frac{1}{t}}}-e^{\frac{e\ln(1+t)}{t}}=e^{\xi}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}-\frac{e\ln(1+t)}{t}\right],$$

其中 ξ 介于$(1+t)^{\frac{1}{t}}$ 与$\frac{e\ln(1+t)}{t}$之间. 又

$$\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e,\ \lim_{t\to0}\frac{e\ln(1+t)}{t}=e,$$

故当 $t\to0$ 时,$\xi\to e$,所以有

$$\text{原式}=\lim_{t\to0}\frac{e^{\xi}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}-\frac{e\ln(1+t)}{t}\right]}{t^2}=e^e\lim_{t\to0}\frac{e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}-\frac{e\ln(1+t)}{t}}{t^2}.$$

令$\frac{\ln(1+t)}{t}=u$,由泰勒公式,有

$$\frac{\ln(1+t)}{t}-1=-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}+o(t^2),$$

故 $\left[\frac{\ln(1+t)}{t}-1\right]^2\sim\left(-\frac{t}{2}\right)^2=\frac{t^2}{4}$,则

$$\text{原式}=e^e\lim_{u\to1}\frac{e^u-eu}{4(u-1)^2}=e^e\lim_{u\to1}\frac{e^u-e}{8(u-1)}=\frac{1}{8}e^{e+1}.$$

(12) 解 由拉格朗日中值定理,有

$$\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n+1]{n}=e^{\frac{\ln(1+n)}{n}}-e^{\frac{\ln n}{n+1}}=e^{\xi_n}\left[\frac{\ln(1+n)}{n}-\frac{\ln n}{n+1}\right].$$

又

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+n)}{n}-\frac{\ln n}{n+1}&=\frac{(n+1)\ln(n+1)-n\ln n}{n(n+1)}\\&=\frac{1}{n(n+1)}\ln\frac{(1+n)^{1+n}}{n^n}\\&=\frac{1}{n(n+1)}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\ln(1+n)\right],\end{aligned}$$

故

$$\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n+1]{n}=\frac{e^{\xi_n}}{n(n+1)}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\ln(1+n)\right].$$

其中 ξ_n 介于$\frac{\ln n}{n+1}$与$\frac{\ln(n+1)}{n}$之间，且由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n+1}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{n}=0$，知$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=0$. 又当 $n\to\infty$ 时，$\sqrt[n]{e}-1\sim\frac{1}{n}$，故

$$\text{原极限}=\lim_{n\to\infty}\frac{ne^{\xi_n}}{n+1}\left[\frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right]=1\cdot(0+1)=1.$$

(13) 解

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\left[\frac{at^{1+t}}{(1+t)^t}-t\right]dt\\&\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{ax^{1+x}}{(1+x)^x}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{ax^x}{(1+x)^x}-1\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{a}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}-1\right]=\lim_{x\to+\infty}x\left[ae^{-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-1\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}x\left[e^{\ln a-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-1\right]=b,\end{aligned}$$

故$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{\ln a-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-1\right]=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln a-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=0$，所以 $a=e$，从而

$$\begin{aligned}b&=\lim_{x\to+\infty}x\left[e^{1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-1\right]=\lim_{x\to+\infty}x\left[1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\\&\xlongequal{\frac{1}{x}=y}\lim_{y\to0^+}\frac{1-\frac{1}{y}\ln(1+y)}{y}=\lim_{y\to0^+}\frac{y-\ln(1+y)}{y^2}\\&\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim_{y\to0^+}\frac{1-\frac{1}{1+y}}{2y}=\lim_{y\to0^+}\frac{1}{2(1+y)}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

故 $a=e$，$b=\frac{1}{2}$.

(14) 证 (Ⅰ) 显然，$x_n>0$ 有下界. 又 $\sin x<x\ (x>0)$，故 $x_{n+1}=\sin x_n<x_n$，所以$\{x_n\}$单调减少，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，记为 A，对 $x_{n+1}=\sin x_n$ 两边同时求极限，得 $A=\sin A$，故 $A=0$.

解 (Ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}\xlongequal{(1^\infty\text{型})}\lim\limits_{t\to0}\left[\left(1+\frac{\sin t-t}{t}\right)^{\frac{t}{\sin t-t}}\right]^{\frac{\sin t-t}{t^3}}$.

而

$$\lim_{t\to0}\frac{\sin t-t}{t^3}=\lim_{t\to0}\frac{\cos t-1}{3t^2}=\lim_{t\to0}\frac{-\frac{1}{2}t^2}{3t^2}=-\frac{1}{6},$$

所以原式 $=e^{-\frac{1}{6}}$.

(15) 证 令 $x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$,则由 $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$,可得$\{x_n\}$ 单调减少. 又由

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n},$$

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=(x_{n+1}-x_n)+(x_n-x_{n-1})+\cdots+(x_2-x_1)+x_1\\&>\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2}-1\right)+1=\frac{1}{n+1}>0,\end{aligned}$$

可知$\{x_n\}$ 有下界,故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

(16) 证 由 $x_{n+1}=\ln(e^{x_n}-1)-\ln x_n=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n}$,知 $e^{x_{n+1}}=\frac{e^{x_n}-1}{x_n}$.

由 $x_1>0$,知 $e^{x_2}=\frac{e^{x_1}-1}{x_1}>1$(利用当 $x>0$ 时,$e^x-1>x$),故 $x_2>0$,由归纳法知 $x_n>0$,即$\{x_n\}$ 有下界.

又由拉格朗日中值定理,得 $e^{x_{n+1}}=\frac{e^{x_n}-1}{x_n}=\frac{e^{x_n}-e^0}{x_n-0}=e^{\xi_n}<e^{x_n}$,其中 $0<\xi_n<x_n$. 而 e^x 是单调增加函数,故 $x_{n+1}<x_n$,即$\{x_n\}$ 单调减少,由单调有界准则,知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,由 $e^{x_{n+1}}=\frac{e^{x_n}-1}{x_n}$ 变形为 $x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$,两边取极限$(n\to\infty)$,得

$$ae^a=e^a-1,$$

解得 $a=0$.

(17) 解 (Ⅰ) 原极限

$$\begin{aligned}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^4)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}=\cdots\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{1-x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}.\end{aligned}$$

当 $|x|<1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2^{n+1}}=0$,故原极限 $=\frac{1}{1-x}$.

(Ⅱ) 原极限

$$\begin{aligned}&=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\left(2\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}\right)}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\left(2\cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}}\right)}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\cdots\end{aligned}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\cdot\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

（Ⅲ）原极限$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt{\sin x}}{1-\sin x}\cdot\frac{1-\sqrt[3]{\sin x}}{1-\sin x}\cdot\cdots\cdot\frac{1-\sqrt[n]{\sin x}}{1-\sin x}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt{(\sin x-1)+1}}{1-\sin x}\cdot\frac{1-\sqrt[3]{(\sin x-1)+1}}{1-\sin x}\cdot\cdots\cdot$$

$$\frac{1-\sqrt[n]{(\sin x-1)+1}}{1-\sin x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}.$$

(18) 解（Ⅰ）由已知$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left[1+\frac{f(x)}{\sin x}\right]}{a^x-1}=\frac{1}{2}$，利用极限和无穷小的关系，有

$$\frac{\ln\left[1+\frac{f(x)}{\sin x}\right]}{a^x-1}=\frac{1}{2}+\alpha,$$

其中$\lim\limits_{x\to0}\alpha=0$. 又当$x\to0$时，$a^x-1\sim x\ln a$，所以

$$\ln\left[1+\frac{f(x)}{\sin x}\right]\sim\frac{1}{2}x\ln a+\alpha x\ln a,$$

从而$\frac{f(x)}{\sin x}\sim\frac{1}{2}x\ln a$（这里$\alpha x\ln a$是比$x$高阶的无穷小），即有$\frac{f(x)}{x}\sim\frac{1}{2}\sin x\ln a$，故

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\sin x\ln a}{x}=\frac{1}{2}\ln a.$$

（Ⅱ）由

$$\lim_{x\to2a}\frac{f(x)}{x-2a}=\lim_{x\to4a}\frac{f(x)}{x-4a}=1\ (a\neq0),$$

可知$f(2a)=f(4a)=0$（否则极限为∞）.

因而$x-2a$，$x-4a$均为$f(x)$的因式，又$f(x)$是三次多项式，故可令

$$f(x)=A(x-2a)(x-4a)(x-B),$$

其中A，B为待定常数. 由

$$\lim_{x\to2a}\frac{f(x)}{x-2a}=\lim_{x\to2a}\frac{A(x-2a)(x-4a)(x-B)}{x-2a}=-2Aa(2a-B),$$

知

$$-2Aa(2a-B)=1. \qquad ①$$

由$\lim\limits_{x\to4a}\frac{f(x)}{x-4a}=\lim\limits_{x\to4a}\frac{A(x-2a)(x-4a)(x-B)}{x-4a}=2Aa(4a-B)$，知

$$2Aa(4a-B)=1. \qquad ②$$

联立①、②式，解得$A=\frac{1}{2a^2}$，$B=3a$，从而$f(x)=\frac{1}{2a^2}(x-2a)(x-4a)(x-3a)$，故

$$\lim_{x\to3a}\frac{f(x)}{x-3a}=\lim_{x\to3a}\frac{\frac{1}{2a^2}(x-2a)(x-4a)(x-3a)}{x-3a}=-\frac{1}{2}.$$

(19) 证 依题意，$f(x)$在(a,b)内有最大值，从几何上易理解，证明的关键是找到一点$\xi\in(a,b)$，利用最大值的定义证明$f(\xi)$为最大值.

由$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=-\infty$及极限定义，知对于$M=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$，存在这样的$c$和$d$，使得

$a<c<\dfrac{a+b}{2}<d<b$,当 $a<x\leqslant c$ 或 $d\leqslant x<b$ 时,都有 $f(x)<M$.

又 $f(x)$ 在(a,b)内连续,所以 $f(x)$ 在$[c,d]\subset(a,b)$上连续,由最大值定义知,存在 $\xi\in[c,d]$,使得 $f(\xi)\geqslant f(x),x\in[c,d]$,特别有 $f(\xi)\geqslant f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.

下面证 $f(\xi)$ 为(a,b)内的最大值:

(Ⅰ)当 $x\in(a,c)$ 或 $x\in(d,b)$ 时,有 $f(x)<f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\leqslant f(\xi)$;

(Ⅱ)当 $x\in[c,d]$ 时,有 $f(x)\leqslant f(\xi)$.

综上所述,$f(\xi)$ 为 $f(x)$ 在(a,b)内的最大值.

注 若将本题的条件改为"设 $f(x)$ 在(a,b)内连续,且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$",则 $f(x)$ 在(a,b)内有最小值.

(20)解 依题意,$\{x_n\}$ 是正项数列,由已知

$$x_{n+1}=x_n^2+x_n=x_n(1+x_n)>x_n,$$

所以$\{x_n\}$单调增加.由此 $x_n\geqslant x_1=\dfrac{1}{2}\neq 0$,故$\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$单调减少,且$\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$有下界 0,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}$ 存在,可以令 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=A$.又由 $x_{n+1}=x_n(x_n+1)$,知

$$\frac{1}{x_n+1}=\frac{x_n}{x_{n+1}}=\frac{x_n^2}{x_nx_{n+1}}=\frac{x_{n+1}-x_n}{x_nx_{n+1}}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n+1}},\qquad ①$$

故

$$\begin{aligned}S_n&\xlongequal{记}\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\cdots+\frac{1}{x_n+1}\\&=\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)+\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n+1}}\right)\\&=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{n+1}}=2-\frac{1}{x_{n+1}}.\end{aligned}\qquad ②$$

在 ① 式两边同时取极限,有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n+1}=A-A$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$,故 $A=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=0$.

再由 ② 式可得 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x_{n+1}}\right)=2-A=2$.

(21)证 (Ⅰ)在$[0,1]$上,$\sin x\geqslant 0,\sin^n x\geqslant 0$,故 $b_n=\int_0^1\sin^n x\,\mathrm{d}x\geqslant 0$.令

$$f(x)=\sin x^n-\sin^n x\quad(0\leqslant x\leqslant 1,n=1,2,\cdots),$$

则

$$f'(x)=nx^{n-1}\cos x^n-n\sin^{n-1}x\cdot\cos x.$$

而 $x\in[0,1]$,就会有 $x\geqslant\sin x\geqslant 0$,所以 $x^{n-1}\geqslant\sin^{n-1}x\geqslant 0$.又因为 $0\leqslant x^n\leqslant x\leqslant 1<\dfrac{\pi}{2}$,所以有 $\cos x^n\geqslant\cos x>0$,所以 $f'(x)\geqslant 0$,$f(x)$ 在$[0,1]$上单调增加.

又因为 $f(0)=0$,所以 $f(x)\geqslant 0$,故 $\sin x^n\geqslant\sin^n x\ (0\leqslant x\leqslant 1)$,于是

$$a_n=\int_0^1\sin x^n\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\sin^n x\,\mathrm{d}x=b_n\geqslant 0,$$

即 $0\leqslant b_n\leqslant a_n$.

(Ⅱ)由 $0\leqslant\sin x^n\leqslant x^n(0\leqslant x\leqslant 1)$,得 $0\leqslant\int_0^1\sin x^n\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\dfrac{1}{n+1}$,由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$,故由夹逼准则,有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\sin x^n\mathrm{d}x=0$.

又由(Ⅰ)知,$0 \leqslant b_n \leqslant a_n$,则$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$,即$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

(22) 证 (Ⅰ)由已知,有 $x_{n+1} = 2x_n - \tan x_n$.

依题设,$0 < x_1 < \dfrac{\pi}{4}$,假设 $0 < x_n < \dfrac{\pi}{4}$.

令 $f(x) = 2x - \tan x$,则 $f'(x) = 2 - \sec^2 x$.

当 $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$,$f'(x) = 2 - \sec^2 x > 0$,从而 $f(x) = 2x - \tan x$ 单调递增,于是有

$$0 < f(x) < f_-\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1 < \frac{\pi}{4}.$$

由数学归纳法,知

$$0 < x_{n+1} = f(x_n) < \frac{\pi}{4},$$

即$\{x_n\}$有界,且

$$x_{n+1} - x_n = x_n - \tan x_n < 0,$$

故$\{x_n\}$单调递减.

由单调有界准则,知$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在.记$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,$x_{n+1} = 2x_n - \tan x_n$,两边同时取极限$(n\to\infty)$,可得

$$a = 2a - \tan a,\ \text{即}\ \tan a = a,$$

故 $a = 0$,从而$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

解 (Ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x_n^2}\ln\frac{x_{n+1}}{x_n}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2}\ln\frac{2x_n - \tan x_n}{x_n}}$.

而
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2}\ln\frac{2x_n - \tan x_n}{x_n} &= \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\ln\frac{2x - \tan x}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\ln\left(2 - \frac{\tan x}{x}\right)\\
&= \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\ln\left[1 + \left(1 - \frac{\tan x}{x}\right)\right]\\
&= \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{\tan x}{x}\right) = \lim_{x\to0^+}\frac{x - \tan x}{x^3}\\
&= \lim_{x\to0^+}\frac{x - \left[x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right]}{x^3} = -\frac{1}{3},
\end{aligned}$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$.

(23) 证 (Ⅰ)令 $f(x) = (\ln x)^{\frac{1}{n}} - \sin x$,则 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{2}, \mathrm{e}\right]$ 上可导,且

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\ln\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 < 0,\ f(\mathrm{e}) = 1 - \sin \mathrm{e} > 0.$$

由零点定理,知 $f(x) = 0$ 在$\left(\dfrac{\pi}{2}, \mathrm{e}\right)$内有实根 x_n.又

$$f'(x) = \frac{1}{nx}(\ln x)^{\frac{1}{n}-1} - \cos x > 0\quad\left[\text{因在}\left(\frac{\pi}{2}, \mathrm{e}\right)\text{内},\ln x > 0,\cos x < 0\right],$$

故 $\sin x = (\ln x)^{\frac{1}{n}}$ 在$\left(\dfrac{\pi}{2}, \mathrm{e}\right)$内有唯一实根 x_n.

解 (Ⅱ)先求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.由(Ⅰ),知$\dfrac{\pi}{2} < x_n < \mathrm{e}$,即 $\ln\dfrac{\pi}{2} < \ln x_n < 1$,故

$$\left(\ln\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}}<(\ln x_n)^{\frac{1}{n}}<1,$$

所以$\left(\ln\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}}<\sin x_n<1$,而$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}}=1$.

根据夹逼准则,有$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=1$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{2}$. 由此可知,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\pi\sin x_n}{2x_n}\right)^{\frac{1}{x_n-\frac{\pi}{2}}}$为 1^∞ 型,故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi\sin x_n}{2x_n}\right)^{\frac{1}{x_n-\frac{\pi}{2}}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n-\frac{\pi}{2}}\ln\frac{\pi\sin x_n}{2x_n}}.$$

而

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n-\frac{\pi}{2}}\ln\frac{\pi\sin x_n}{2x_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n-\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{\pi\sin x_n}{2x_n}+1-1\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n-\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\pi\sin x_n-2x_n}{2x_n}\\&\xlongequal{x_n=t}\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{t-\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\pi\sin t-2t}{2t}\\&\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi\cos t-2}{4t-\pi}=-\frac{2}{\pi},\end{aligned}$$

故原式 $=e^{-\frac{2}{\pi}}$.

拓展题

解答题

(1) 证 (Ⅰ) 令 $G(x)=F(x)-x=\frac{1}{2}[f(x)-x]$,则 $G(a)>0,G(b)<0$,由零点定理,知存在 $x^*\in(a,b)$,使得 $G(x^*)=0$,即 $F(x^*)=x^*$.

(Ⅱ) 由已知条件,知 $x_0\in[a,b]$,$x_n=F(x_{n-1})\in[a,b]$,故$\{x_n\}$有界. 又

$$F'(x)=\frac{1}{2}[1+f'(x)]>0\ (\text{因}\ |f'(x)|<1),$$

由拉格朗日中值定理,得

$$x_n-x_{n-1}=F(x_{n-1})-F(x_{n-2})=F'(\xi)(x_{n-1}-x_{n-2})\ (\xi\text{ 介于 }x_{n-1}\text{ 与 }x_{n-2}\text{ 之间}),$$

由上式可知,当 $x_1>x_0$ 时,数列$\{x_n\}$单调增加;当 $x_1<x_0$ 时,数列$\{x_n\}$单调减少,故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,由(Ⅰ)知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$.

(2) 证 (Ⅰ) 由 $f(x)$ 单调减少且非负连续,可知当 $x\in[k,k+1]$ 时,有

$$f(k+1)\leqslant f(x)\leqslant f(k),$$

故

$$\int_k^{k+1}f(k+1)dx\leqslant\int_k^{k+1}f(x)dx\leqslant\int_k^{k+1}f(k)dx,$$

即 $f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)dx\leqslant f(k)$.

(Ⅱ) 若取 $f(x)=\frac{1}{x}(x>0)$,显然 $f(x)$ 单调减少且非负,则由(Ⅰ),知

$$\frac{1}{n+1}\leqslant\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx\leqslant\frac{1}{n},$$

故 $$\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\leqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},$$
$$1+\int_1^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=1+\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x\geqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

又因为
$$\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_1^{n+1}=\ln(1+n),\int_1^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_1^n=\ln n,$$

所以 $$\ln(1+n)\leqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\leqslant 1+\ln n. \tag{①}$$

由①式可知$\dfrac{\ln(1+n)}{\ln n}\leqslant\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}\leqslant\dfrac{1+\ln n}{\ln n}$，又因为
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\ln n}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}+1=1,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n)}{\ln n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x}}=1,$$

故由夹逼准则，可知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1$.

(3) **证**（Ⅰ）由 $f_n(x)=x^n-\cos x$，有
$$f_n(0)=-1<0,\ f_n(1)=1-\cos 1>0.$$
由零点定理，知 $f_n(x)=x^n-\cos x=0$ 在$(0,1)$内至少有一个实根 x_n，又
$$f_n'(x)=nx^{n-1}+\sin x>0\quad(\text{因 }0<\sin x<1,x\in(0,1)),$$
知 $f_n(x)$ 关于 x 严格单调递增，故方程 $f_n(x)=0$ 在$(0,1)$内有唯一实根 x_n.

解（Ⅱ）先证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

由（Ⅰ）知，$0<x_n<1$，即$\{x_n\}$有界.

由 $f_n(x_n)=x_n^n-\cos x_n=0$，$f_{n+1}(x_{n+1})=x_{n+1}^{n+1}-\cos x_{n+1}=0$，知 $\cos x_{n+1}=x_{n+1}^{n+1}$，从而
$$\begin{aligned}f_n(x_{n+1})&=x_{n+1}^n-\cos x_{n+1}=x_{n+1}^n-x_{n+1}^{n+1}\\&=x_{n+1}^n(1-x_{n+1})>0\quad(\text{因 }0<x_{n+1}<1).\end{aligned}$$
故 $f_n(x_{n+1})>f_n(x_n)$.

又因 $f_n(x)$ 关于 x 单调递增，故 $x_{n+1}>x_n$，即数列$\{x_n\}$单调递增，由单调有界准则，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

由 $x_n^n=\cos x_n$，知 $\ln x_n=\dfrac{1}{n}\ln\cos x_n$，故
$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\cos x_n=0,$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}x_n=1,\lim_{n\to\infty}(1-x_n)^{\frac{1}{n}\ln\cos x_n}=\lim_{n\to\infty}(1-x_n)^{\ln x_n}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n\ln(1-x_n)}.$$

而 $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln x_n\ln(1-x_n)&\xlongequal{x_n=t}\lim_{t\to1^-}\ln t\ln(1-t)\\&\xlongequal[t=1-u]{1-t=u}\lim_{u\to0^+}\ln(1-u)\ln u=-\lim_{u\to0^+}u\ln u\\&=-\lim_{u\to0^+}\frac{\ln u}{\frac{1}{u}}=-\lim_{u\to0^+}\frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}}=\lim_{u\to0^+}u=0.\end{aligned}$$

故原式 $=e^0=1$.

(4) **证** (Ⅰ) 令 $f(x)=x-\ln(1+x)-\dfrac{1}{2}x^2,x>0$,则

$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}-x=\frac{-x^2}{1+x}<0\quad(x>0).$$

所以 $f(x)$ 单调递减,故 n 为正整数时 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{1}{2n^2}<f(0)=0$.

解 (Ⅱ) 显然,$\ln(1+x)<x,x>0$,故

$$0<\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{2n^2}.$$

记 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$,则

$$\ln a_n=\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n^2}\right).$$

由(Ⅰ)知

$$\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n^2}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[\ln\left(1+\frac{i}{n^2}\right)-\frac{i}{n^2}+\frac{i}{n^2}\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[\ln\left(1+\frac{i}{n^2}\right)-\frac{i}{n^2}\right]+\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}.$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n^2}\right)^2<\sum_{i=1}^{n}\left[\ln\left(1+\frac{i}{n^2}\right)-\frac{i}{n^2}\right]<0.$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n^2}\right)^2\right]=-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$

为一常数,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i}{n^2}\right)^2\right]=0$.

由夹逼准则,有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\ln\left(1+\frac{i}{n^2}\right)-\frac{i}{n^2}\right]=0.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

(5) **解** 先证 $\{x_n\}$ 有下界. 由 $(x_{n+1}-x_n)f'(x_n)+f(x_n)=0$,得

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

由已知,$x_1>0$,假设 $x_n>0$,故只需证明

$$x_{n+1}-0=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}-0>0,$$

即

$$(x_n-0)f'(x_n)-[f(x_n)-f(0)]>0.$$

由拉格朗日中值定理,有

$$(x_n-0)f'(x_n)-f'(\xi_n)(x_n-0)>0,\ 0<\xi_n<x_n,$$

即证$(x_n-0)[f'(x_n)-f'(\xi_n)]>0$.

由 $f''(x)>0$,知 $f'(x)$ 单调递增,从而

$$(x_n-0)[f'(x_n)-f'(\xi_n)]>0$$

成立,由数学归纳法,知$\{x_n\}$ 有下界 0.

再证$\{x_n\}$ 单调递减. 由已知,可得

$$x_{n+1}-x_n=-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)};$$

又由 $f'(x)>0$,知 $f(x_n)>f(0)=0$,且 $f'(x_n)>0$,故

$$x_{n+1}-x_n=-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}<0,$$

即$\{x_n\}$ 单调递减,由单调有界准则,知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,等式$(x_{n+1}-x_n)f'(x_n)+f(x_n)=0$ 两边同时取极限$(n\to\infty)$,得 $f(A)=0$. 故 $A=0$(因 $f(x)$ 严格单调且 $f(0)=0$),即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

第二章　一元函数微分学及其应用

基础题

一、选择题

(1) A.

解 由题设可得

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{x}}=0,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x^2\cdot\varphi(x)=0,$$

而 $f(0)=0$,故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 又因为

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\sqrt{x}}=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2\varphi(x)}{x}=0,$$

即 $f'_+(0)=f'_-(0)=0$,所以 $f'(0)=0$,选项 A 正确.

(2) A.

解 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+a\Delta x)-f(x-b\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} a\cdot\frac{f(x+a\Delta x)-f(x)}{a\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0} b\cdot\frac{f(x-b\Delta x)-f(x)}{-b\Delta x}$$
$$=af'(x)+bf'(x)=(a+b)f'(x).$$

故选项 A 正确.

(3) B.

解 由已知,有 $\lim\limits_{x\to 1}f(2x-1)=f(1)=0$,故

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(2x-1)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(1+2x-2)-f(1)}{2x-2}\cdot\frac{2x-2}{x-1}=2f'(1)=1,$$

从而 $f'(1)=\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}\frac{f[(1+\sin t)^2]-f(1+\sin t)}{t}\\
=&\lim_{t\to 0}\frac{f[(1+\sin t)^2]-f(1)}{t}-\lim_{t\to 0}\frac{f(1+\sin t)-f(1)}{t}\\
=&\lim_{t\to 0}\frac{f(1+2\sin t+\sin^2 t)-f(1)}{2\sin t+\sin^2 t}\cdot\frac{2\sin t+\sin^2 t}{t}-\lim_{t\to 0}\frac{f(1+\sin t)-f(1)}{\sin t}\cdot\frac{\sin t}{t}\\
=&2f'(1)-f'(1)=f'(1)=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

选项 B 正确.

(4) B.

解 由 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+1}=0=f(0)$,知函数 $f(x)$ 右连续. 又因为

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+1}-0}{x-0}=\infty,$$

所以 $f'_+(0)$ 不存在. 故选项 B 正确.

(5) A.

解 若 $b=0$,则

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \ln x, & x>0.\end{cases}$$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不是右连续,故 $b=0$ 不满足条件,从而 $b>0$.

由 $f(x)$ 在 $x=b$ 处可导,知 $f(x)$ 在 $x=b$ 处连续,故

$$\lim_{x\to b^+}f(x)=\lim_{x\to b^-}f(x)=f(b),$$

即

$$\ln b=a\sqrt{b}. \qquad ①$$

又

$$f'_-(b)=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{f(b+\Delta x)-f(b)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{a\sqrt{b+\Delta x}-a\sqrt{b}}{\Delta x}$$

$$=a\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{b+\Delta x}+\sqrt{b})}=\frac{a}{2\sqrt{b}},$$

$$f'_+(b)=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{f(b+\Delta x)-f(b)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{\ln(b+\Delta x)-a\sqrt{b}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{\ln(\Delta x+b)-\ln b}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{1}{b+\Delta x}=\frac{1}{b},$$

由 $f'_-(b)=f'_+(b)$,得

$$\frac{a}{2\sqrt{b}}=\frac{1}{b} \qquad ②$$

解 ①、② 式,得 $a=\frac{2}{\mathrm{e}}$,$b=\mathrm{e}^2$. 选项 A 正确.

(6) B.

解 由题设可得

$$f(x)=(x+2)(x+1)\,|x+1|\,|x|\,|x-1|,$$

根据上式(参见《2026 考研数学高等数学辅导讲义》),$f(x)$ 有 $x=0$,$x=1$ 两个不可导点.

(7) D.

解 因为

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}|x|}{x}=-\frac{1}{2},$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\frac{1}{2}|x|}{x}=\frac{1}{2},$$

所以 $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$ 在 $x=0$ 处不可导. 故选项 D 正确.

(8) B.

解 由微分的定义,知 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$,故 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\mathrm{d}y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x}=\frac{1}{2}$,选项 B 正确.

(9) C.

解 由已知,得 $f(x)$ 是奇函数,故 $f'(x)$ 是偶函数,$f''(x)$ 是奇函数,从而由 $f'(x)>0$,$x\in(0,+\infty)$,

可知当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$f'(x)>0$;由 $f''(x)>0,x\in(0,+\infty)$,可知当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$f''(x)<0$,选项 C 正确.

(10)C.

解 应用泰勒公式,$f(x)$ 在 $x=0$ 处展开为

$$f(x)=f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-0)^2\geqslant f(0)+f'(0)x,$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间,故

$$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x>\int_{-1}^{1}[f(0)+f'(0)x]\mathrm{d}x=2f(0),$$

所以 $f(0)<\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=1$,选项 C 正确.

(11)C.

解 依题设,有

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x}\\&=2\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=2\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x}=0,\end{aligned}$$

故可排除选项 A 和 B. 再由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2>0$、保号性以及 $1-\cos x>0$,可知在 $x=0$ 的某邻域内有 $f(x)>0=f(0)$,故 $f(0)$ 为极小值,选项 C 正确.

(12)C.

解 依题设,有

$$y'=[(x-1)^2(x-3)^2]'=4(x-1)(x-2)(x-3),$$

则 y'' 是二次函数,故 y'' 最多只有两个零点. 由罗尔定理知,y'' 在 $(1,2)$ 和 $(2,3)$ 内各有一个零点,且 y'' 在其零点两侧变号,故有 2 个拐点,选项 C 正确.

(13)D.

解 由 $f''(x_0)=0$ 及已知条件,有

$$f'''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{x-x_0}>0,$$

由极限的保号性,可知当 $x>x_0$ 时,$f''(x)>0$;当 $x<x_0$ 时,$f''(x)<0$,即在 x_0 两侧 $f''(x)$ 变号,故 $(x_0,f(x_0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点. 选项 D 正确.

注 选项 A 不正确,例如 $f(x)=x^3$,有 $f'(0)=f''(0)=0,f'''(0)=6\neq0$,但 $x=0$ 不是 $f(x)=x^3$ 的极值点.

(14)C.

解 利用导数的定义,有

$$\begin{aligned}F'_+(0)&=\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)(1+|\sin x|)-f(0)}{x}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)\sin x}{x}=f'_+(0)+f(0).\end{aligned}$$

同理,$F'_-(0)=f'_-(0)-f(0)$,故 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导 $\Leftrightarrow F'_+(0)=F'_-(0)\Leftrightarrow f(0)=0$. 故选项 C 正确.

(15)D.

解 $$\lim_{x\to0}\frac{f(a+x^3)-f(a)}{\tan x^3}=\lim_{x\to0}\frac{f(a+x^3)-f(a)}{x^3}=f'(a).$$

对于选项 A,

$$\lim_{x\to\infty}|x|\left[f\left(a+\frac{1}{|x|}\right)-f(a)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(a+\frac{1}{|x|}\right)-f(a)}{\frac{1}{|x|}}\xlongequal{\frac{1}{|x|}=\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'_+(a),$$

排除选项 A.

对于选项 B, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(a+x^3)-f(a)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(a+x^3)-f(a)}{x^3}\cdot x$ 存在,有可能 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(a+x^3)-f(a)}{x^3}$ 为 ∞ (因 $0\cdot\infty$ 型极限可能存在),排除选项 B.

对于选项 C,

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a-\Delta x)}{2\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\cdot\frac{1}{2}+\frac{f(a-\Delta x)-f(a)}{-\Delta x}\cdot\frac{1}{2}\right].\end{aligned}$$

不能确定 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ 与 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a-\Delta x)-f(a)}{-\Delta x}$ 均存在. 排除选项 C. 选项 D 正确.

(16) A.

解 由题设, $f(x)$ 有任意阶导数且 $f'(x)=f^2(x)$,所以

$$f''(x)=[f^2(x)]'=2f(x)f'(x)=2f(x)f^2(x)=2f^3(x),$$
$$f'''(x)=[2f^3(x)]'=3\cdot 2f^2(x)f'(x)=3!f^4(x),$$

由此归纳可知, $f^{(n)}(x)=n!f^{n+1}(x)$,故选项 A 正确.

(17) C.

解 依题设,有

$$y'=(1-2x)^{-1}\cdot(-2),$$
$$y''=(-1)\cdot(1-2x)^{-2}\cdot(-2)^2,$$
$$y'''=(-1)\cdot(-2)\cdot(1-2x)^{-3}\cdot(-2)^3,$$

由此归纳可知, $y^{(10)}=(-1)\cdot(-2)\cdot\cdots\cdot(-9)\cdot(1-2x)^{-10}(-2)^{10}=\frac{-9!\cdot 2^{10}}{(1-2x)^{10}}$. 故选项 C 正确.

(18) C.

解 由已知有 $|f(0)|\leqslant 0$,知 $f(0)=0$. 又

$$0\leqslant\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\frac{x^2}{|x|}=|x|,$$

由夹逼准则,有 $\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|=0$,即 $|f'(0)|=0$,故 $f'(0)=0$,选项 C 正确.

(19) B.

解 依题设,有

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0,$$

故由极限的保号性知,对于 $x\in(x_0,x_0+\delta)$,有 $f(x)>f(x_0)$,即选项 B 正确.

同理,
$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0,\ x\in(x_0-\delta,x_0),$$

有 $f(x)<f(x_0)$,故选项 A 错误.

对于选项 C,D,由 $f'(x_0)>0$,不能推出 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 与 $(x_0,x_0+\delta)$ 内的单调性.

(20) A.

解 由已知可得 $y'(-2)=0,y'(1)=-3,y(1)=0$,即

$$\begin{cases}(x^3+ax^2+bx+c)'\Big|_{x=-2}=0,\\(x^3+ax^2+bx+c)'\Big|_{x=1}=-3,\\(x^3+ax^2+bx+c)\Big|_{x=1}=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}12-4a+b=0,\\3+2a+b=-3,\\1+a+b+c=0,\end{cases}$$

解得 $a=1,b=-8,c=6$. 故选项 A 正确.

(21)B.

解 利用在 $x=-1,x=1,x=-3$ 两侧导数符号的变化判别. $f'(x)$ 有 $x=-1,x=1,x=-3$ 三个零点,当从 $x=-3$ 左侧到右侧时,$f'(x)$ 由负号变为正号,故 $x=-3$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

同理可得,$x=-1$ 是 $f(x)$ 的极大值点,$x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点,故选项 B 正确.

(22)B.

解 由 $x=\arctan t$,得 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{1+t^2}$. $y=\ln(1-t^2)-\sin y$ 两边同时对 t 求导,得

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-2t}{1-t^2}-\cos y\frac{dy}{dt},$$

解得

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-2t}{(1-t^2)(1+\cos y)}.$$

当 $x=0$ 时,由 $x=\arctan t$,知 $t=0$,且当 $x>0(<0)$ 时,有 $t>0(<0)$.

由 $y=\ln(1-t^2)-\sin y$ 知,当 $x=0$,即 $t=0$ 时,有 $y=0$. 故在 $x=0$ 的邻域$(-\delta,\delta)(\delta>0)$ 内,有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{-2t(1+t^2)}{(1-t^2)(1+\cos y)}\begin{cases}>0, & -\delta<x<0,\\=0, & x=0,\\<0, & 0<x<\delta.\end{cases}$$

综上所述,$x=0$ 是 $y=y(x)$ 的极大值点. 选项 B 正确.

(23)C.

解 依题设有 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=1,\lim\limits_{x\to0}y=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=+\infty$,可知有水平渐近线 $y=1$ 与铅直渐近线 $x=0$ 两条,故选项 C 正确.

(24)D.

解 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x[1+x+f(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x+f(x)}{e^{-x}}$ 存在,知

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)+x+1]=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-x-1)]=0,$$

故 $y=f(x)$ 有斜渐近线 $y=-x-1$. 选项 D 正确.

注 设曲线 $y=f(x)$ 有斜渐近线 $y=kx+b$.

如图 2-1 所示,$P(x,y)$ 为 $y=f(x)$ 上任一点,由斜渐近线的定义,$P(x,y)$ 到直线 $y=kx+b$ 的距离 $|PM|$ 趋于 $0(x\to\infty)$,从而 $|PN|\to0\ (x\to\infty)$. 故有

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0.$$

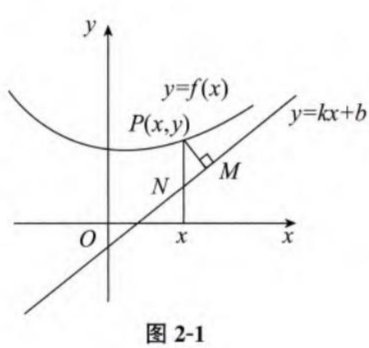


图 2-1

(25)C.

解 显然曲线只存在斜渐近线. 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-a^2}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=0,$$

故 $y=x$ 是曲线的斜渐近线. 又由于

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}=-1,$$

$$\lim_{x\to-\infty}(y+x)=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-a^2}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}-x}=0,$$

故 $y=-x$ 也是曲线的斜渐近线. 渐近线共有两条,故选项 C 正确.

二、填空题

(1) $-1,\frac{\pi}{2}$.

解 由已知,可得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(ax+b)=b,\ \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},$$

故 $b=\frac{\pi}{2}$,即有 $f(0)=\frac{\pi}{2}$. 又因为

$$f'_-(0)=a,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}}{x}$$

$$\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim_{x\to0^+}\frac{-1}{1+x^2}=-1,$$

并且由于 $f'_-(0)=f'_+(0)$,所以可得 $a=-1$.

(2) 1.

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(1-\cos x)}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{\ln(1+x^2)}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}$.

由于当 $x\to0$ 时,$\ln(1+x^2)\sim x^2$, $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$,故

$$\text{原式}=1\cdot\frac{1}{2}\cdot f'(0)=\frac{1}{2}\times2=1.$$

(3) 3.

解 $x=\int_1^{y-x}\sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right)\mathrm{d}t$ 两边同时对 x 求导,得

$$1=(y'-1)\cdot\sin^2\left[\frac{\pi}{4}(y-x)\right],$$

解得 $y'=\csc^2\left[\frac{\pi}{4}(y-x)\right]+1$.

又由已知可得,当 $x=0$ 时,$y=1$, 即 $f(0)=1$,故 $y'\Big|_{x=0}=3$,于是

$$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}}=f'(0)=3.$$

(4) $f(x)=-1+2x+o(x)$.

解 依题设,有

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x^2}+\frac{f(x)}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+xf(x)}{x^2}=2,$$

知 $\sin x+xf(x)$ 与 $2x^2$ 是等价无穷小. 又因为

$$\begin{aligned}\sin x+xf(x)&=[x+o(x^2)]+x[f(0)+f'(0)x+o(x)]\\&=[1+f(0)]x+f'(0)x^2+o(x^2),\end{aligned}$$

故 $f(0)=-1,f'(0)=2$,所以 $f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x)=-1+2x+o(x)$.

(5) 2.

解 由题目所给的 $f''(x)$ 图形可知,$f''(x_1)=f''(x_2)=0$,$f''(0)$ 不存在,在 $x=x_1$ 的两侧二阶导数不变号,故不是拐点. 在 $x=0$,$x=x_2$ 两侧二阶导数变号,所以 $y=f(x)$ 有两个拐点.

(6) $\pm\sqrt{2}$.

解 依题设,有

$$\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{1-\cos f(x)}{\sin x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left\{\left[1+\frac{1-\cos f(x)}{\sin x}\right]^{\frac{\sin x}{1-\cos f(x)}}\right\}^{\frac{1-\cos f(x)}{x\sin x}}=\mathrm{e},$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos f(x)}{x\sin x}=1$.

又当 $x\to 0$ 时,$\sin x\sim x$,$1-\cos f(x)\sim\dfrac{1}{2}f^2(x)$,且 $f'(0)$ 存在,故

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos f(x)}{x\sin x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f^2(x)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}f'(0)\cdot f'(0),$$

解得 $f'(0)=\pm\sqrt{2}$.

(7) $\dfrac{2}{3}$,3.

解 利用麦克劳林公式,有

$$\begin{aligned}x-\sin x\cos x&=x-\frac{1}{2}\sin 2x=x-\frac{1}{2}\left[2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+o(x^3)\right]\\&=\frac{2}{3}x^3+o(x^3)\sim\frac{2}{3}x^3,\end{aligned}$$

故 $a=\dfrac{2}{3}$,$b=3$.

(8) 3.

解 依题设,有

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3),$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3),$$

故 $\mathrm{e}^x+\ln(1-x)-1=1+x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3-x-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x^3-1+o(x^3)=-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$,

所以 $n=3$.

(9) $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

解 由 $y''=2(2x^2-1)\mathrm{e}^{-x^2}=0$,得 $2x^2-1=0$,解得 $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

当 $x\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时,$y''<0$,可知上凸区间为$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(10) e.

解 对 $f(x)$ 求导，得 $f'(x)=n\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}-(1+n)$. 依题意，有

$$f'(x_n)=n\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}-(1+n)=0,$$

解得 $x_n=n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\mathrm{e}$.

(11) $\frac{1}{1+\mathrm{e}^2}$.

解 由 $f(x)=\frac{1}{1+x^n}$，知 $f'(1)=\left.\frac{-nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}\right|_{x=1}=-\frac{n}{4}$.

在点 $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ 处的切线方程为

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{n}{4}(x-1).$$

令 $y=0$，得 $x_n=x=1+\frac{2}{n}$，故

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}=\frac{1}{1+\mathrm{e}^2}.$$

(12) $\frac{1}{2}$.

解 由 $\Delta y=\Delta x+o(\Delta x)$，有 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=1+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$，等式两边同时取极限，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[1+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right]=1,\text{即 } f'(1)=1.$$

又由已知，有 $f(1)=0$，$x^2+\ln(1+x^3)\sim x^2(x\to 0)$，故

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_1^{\mathrm{e}^x}f(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x}{2}\cdot\frac{f(\mathrm{e}^x)-f(1)}{\mathrm{e}^x-1}\cdot\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}.$$

(13) $-99!$.

解 记 $u(x)=x$，$v(x)=(2x-1)(3x-2)\cdots(100x-99)$，则 $f(x)=u(x)v(x)$. 又因为

$$u'(0)=1,\ u(0)=0,\ v(0)=-99!,$$

故 $f'(0)=u'(0)v(0)+u(0)v'(0)=-99!$.

注 此题也可用导数定义计算.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}(2x-1)(3x-2)\cdots(100x-99)=-99!.$$

(14) $\frac{1}{3x}$.

解 由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x^3)]=3x^2\cdot f'(x^3)=\frac{1}{x}$，得 $f'(x^3)=\frac{1}{3x^3}$，所以 $f'(x)=\frac{1}{3x}$.

(15) -9.

解 由 $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$，可求得 $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

令 $g(x)=-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=-(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$，$g(x)$ 在 $x=0$ 处的麦克劳林展开式为

$$g(x) = -(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)x^4}{2!} + o(x^4)\right]$$

$$= -1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{8}x^4 - o(x^4),$$

则$g^{(4)}(0) = 4! \times \left(-\frac{3}{8}\right) = -9$. 故 $f^{(5)}(0) = -9$.

(16) -2.

解 依题设,有

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} \xlongequal{-x = \Delta t} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{f(1+\Delta t) - f(1)}{\Delta t} = \frac{1}{2} f'(1) = -1,$$

故 $f'(1) = -2$,即曲线 $y = f(x)$ 在点$(1, f(1))$ 处的切线斜率为 -2.

(17) $\frac{1}{2}$.

解 由$\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(2x-1)}{x-1} = 1$,知$\lim\limits_{x \to 1} f(2x-1) = f(1) = 0$,故

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(2x-1) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{f(1+2x-2) - f(1)}{2x-2} \cdot \frac{2x-2}{x-1} = 2f'(1) = 1,$$

从而 $f'(1) = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \to 0} \frac{f[(1+\sin t)^2] - f(1+\sin t)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{f[(1+\sin t)^2] - f(1)}{t} - \lim_{t \to 0} \frac{f(1+\sin t) - f(1)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{f(1+2\sin t + \sin^2 t) - f(1)}{2\sin t + \sin^2 t} \cdot \frac{2\sin t + \sin^2 t}{t} - \lim_{t \to 0} \frac{f(1+\sin t) - f(1)}{\sin t} \cdot \frac{\sin t}{t} \\
&= 2f'(1) - f'(1) = f'(1) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(18) $y = 2x - \frac{1}{4}$.

解 由已知,有

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{ax^2 - x + 3} - 2x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{a - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2\right) = b,$$

故$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{a - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2\right) = 0$,即有$\sqrt{a} = 2$,$a = 4$.

将 $a = 4$ 代入原式,并有理化,得

$$b = \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2 - x + 3} - 2x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x+3}{\sqrt{4x^2 - x + 3} + 2x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-1 + \frac{3}{x}}{\sqrt{4 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 2} = -\frac{1}{4},$$

所以

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2 - x + 3} - 2x + \frac{1}{4}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{4x^2 - x + 3} - \left(2x - \frac{1}{4}\right)\right] = 0.$$

$y=\sqrt{4x^2-x+3}$ 在 $(0,+\infty)$ 内有斜渐近线，为 $y=2x-\dfrac{1}{4}$.

注 求出 $a=4$ 后，也可以用求斜渐近线方程的公式求解.

(19) 2.

解 在 $x=0$ 的邻域内，$\cos|x|=\cos x$，$x^2|x|$ 在 $x=0$ 处二阶可导，三阶不可导，故阶数为 2.

(20) $\dfrac{2}{3a}$.

解 依题设，有

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{3a\sin^2 t\cdot\cos t}{-3a\cos^2 t\cdot\sin t}=-\tan t,$$

$$y''=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\tan t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\tan t)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

$$=\frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\cdot\sin t}=\frac{1}{3a}\sec^4 t\cdot\csc t,$$

故 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处的曲率 $K=\left.\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\left|\dfrac{2}{3a\sin 2t}\right|\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{2}{3a}$.

(21) $\dfrac{1}{4}$.

解 由于曲率半径 $R=\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$，且 $y'=4(x-1)$，$y''=4$，故

$$R=\frac{[1+16(x-1)^2]^{\frac{3}{2}}}{4},$$

由此可知，当 $x=1$ 时，R 取最小值，此时最小曲率半径为$\dfrac{1}{4}$.

(22) 2.

解 由 $y(x)$ 二阶可导，$(a,2)$ 是 $y=y(x)$ 的拐点，知 $y(a)=2$，$y''(a)=0$.

由$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(3-y)y^b$，有

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=(3-y)by^{b-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y^b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}y^{b-1}[(3-y)b-y].\qquad ①$$

因

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=a}=0,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}=[3-y(a)][y(a)]^b=[y(a)]^b=2^b\neq 0,$$

将上两式代入 ① 式，得

$$[3-y(a)]b-y(a)=(3-2)b-2=b-2=0,$$

故 $b=2$.

(23) e^x+1.

解 由已知条件，视 y 为 Δx，知 $f(x)$ 在点 x 处可微，且 $\mathrm{d}[f(x)]=[f(x)-1]\mathrm{d}x$，故

$$\mathrm{d}x=\frac{1}{f(x)-1}\mathrm{d}[f(x)].$$

对上式两边积分，得

$$x=\ln|f(x)-1|+C.$$

由 $f(0)=2$，得 $C=0$，故 $f(x)=\mathrm{e}^x+1$.

(24) $-\dfrac{3}{2}$.

解 由 $y=x^2$,知 $y'=2x,y''=2,\kappa=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{2}{\sqrt{(1+4x^2)^3}}$,

$$s=\int_0^x\sqrt{1+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t=\int_0^x\sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}t,$$

故

$$\mathrm{d}\kappa=-\frac{24x}{\sqrt{(1+4x^2)^5}}\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}s=\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$$

所以$\left.\dfrac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s}\right|_{x=\frac{1}{2}}=-\left.\dfrac{24x}{(1+4x^2)^3}\right|_{x=\frac{1}{2}}=-\dfrac{3}{2}$.

(25) $x+y+\dfrac{1}{3}=0$.

解 由已知,当且仅当 $t\to -1$ 时,$x\to\infty$. 故

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to -1}\frac{t^2}{1+t^3}\cdot\frac{1+t^3}{t}=\lim_{t\to -1}t=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{t\to -1}\left(\frac{t^2}{1+t^3}+\frac{t}{1+t^3}\right)$$

$$=\lim_{t\to -1}\frac{t(t+1)}{(t+1)(t^2-t+1)}=\lim_{t\to -1}\frac{t}{t^2-t+1}=-\frac{1}{3}.$$

故所求斜渐近线方程为 $y=-x-\dfrac{1}{3}$,即 $x+y+\dfrac{1}{3}=0$.

(26) 1.

解 已知方程化为

$$\arctan\frac{x}{y}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4},$$

上式两边同时对 x 求导,得

$$\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{y-xy'}{y^2}=\frac{1}{2}\,\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2},$$

即 $y'=\dfrac{-x+y}{x+y}$. 令 $y'=0$,得 $x=y$,代入原方程可求得 $x=1,y=1$,故 $y'(1)=0$.

方程 $y'=\dfrac{-x+y}{x+y}$,即$(x+y)y'=-x+y$,两边同时对 x 求导,得

$$(1+y')y'+(x+y)y''=-1+y'.$$

将 $x=1,y=1,y'(1)=0$ 代入上式,得 $y''(1)=-\dfrac{1}{2}<0$. 故 $y(x)$ 的极大值为$y(1)=1$.

三、解答题

(1) 解 (Ⅰ) 因为 $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x}}}=x^{-\frac{4}{9}}$,所以 $y'=-\dfrac{4}{9}x^{-\frac{13}{9}}$.

(Ⅱ) $y'=a^a x^{a^a-1}+a^{x^a}(\ln a)\cdot(x^a)'+a^{a^x}\cdot(\ln a)\cdot(a^x)'$

$\quad=a^a x^{a^a-1}+a(\ln a)x^{a-1}\cdot a^{x^a}+(\ln a)^2\cdot a^x\cdot a^{a^x}$.

注 x^{a^a} 视为幂函数.

(Ⅲ) 由 $|\sin x|=\sqrt{\sin^2 x}$,有 $y=2^{|\sin x|}=2^{\sqrt{\sin^2 x}}$,则

$$y'=2^{\sqrt{\sin^2 x}}\cdot(\ln 2)\cdot(\sqrt{\sin^2 x})'=2^{\sqrt{\sin^2 x}}\cdot(\ln 2)\cdot\frac{2\sin x\cos x}{2\sqrt{\sin^2 x}}$$

$$=2^{|\sin x|}\cdot(\ln 2)\cdot\sin 2x\cdot\frac{1}{2|\sin x|}\quad(\sin x\neq 0).$$

注 当 $\sin x=0$ 时，$y=2^{|\sin x|}$ 的左、右导数值分别存在，且异号.

（Ⅳ）$y'=\dfrac{1}{\tan x+\sec x}\cdot(\tan x+\sec x)'$

$$=\frac{1}{\tan x+\sec x}\cdot(\sec^2 x+\sec x\tan x)=\sec x.$$

注 $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}(x\neq 0)$.

(2) 解 （Ⅰ）取对数，有 $\ln|y|=\ln(1+x^2)\sin x$. 两边同时对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\ln(1+x^2)\cos x+\frac{2x\sin x}{1+x^2},$$

故 $y'=(1+x^2)^{\sin x}\left[\ln(1+x^2)\cos x+\dfrac{2x\sin x}{1+x^2}\right]$.

（Ⅱ）利用对数的性质，化简后再求导.

$$y=\ln\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}=-\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1}),$$

$$y'=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot(x+\sqrt{x^2+1})'$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}.$$

(3) 解 （Ⅰ）$\mathrm{d}y=\varphi'\left(\arctan\dfrac{1}{x}\right)\cdot\mathrm{d}\left(\arctan\dfrac{1}{x}\right)=\varphi'\left(\arctan\dfrac{1}{x}\right)\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$$=\varphi'\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=-\varphi'\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

（Ⅱ）$\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x+y}-y\sin x)=0$，即

$$\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}(x+y)-[\sin x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}(\sin x)]=0,$$

$$\mathrm{e}^{x+y}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)-(\sin x\,\mathrm{d}y+y\cos x\,\mathrm{d}x)=0,$$

故 $\mathrm{d}y=\dfrac{y\cos x-\mathrm{e}^{x+y}}{\mathrm{e}^{x+y}-\sin x}\mathrm{d}x=\dfrac{y(\cos x-\sin x)}{(y-1)\sin x}\mathrm{d}x$.

（Ⅲ）由题设可得 $t=\dfrac{x}{2}$，则 $y=5\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+1=\dfrac{5x^2}{4}+1$，故 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\dfrac{5x^2}{4}+1\right)=\dfrac{5}{2}x\,\mathrm{d}x$.

(4) 解 已知方程两边同时取对数，得 $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\arctan\dfrac{y}{x}$. 再对 x 求导，得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2y\cdot y'}{x^2+y^2}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{y'x-y\cdot 1}{x^2},$$

解得 $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$，并且可得

$$y''=\frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2}=\frac{2xy'-2y}{(x-y)^2}.$$

将 $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$ 代入上式,得 $y'' = \dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$.

(5) 解 由题设可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\sin t}{1-\cos t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{(1-\cos t)^2}.$$

(6) 解 为求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,先将极坐标化为参数方程

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta = (1-\cos\theta)\cos\theta, \\ y = r(\theta)\sin\theta = (1-\cos\theta)\sin\theta, \end{cases}$$

θ 为参数,则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \dfrac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \left.\dfrac{\cos\theta(1-\cos\theta)+\sin^2\theta}{-\sin\theta(1-\cos\theta)+\cos\theta\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -1,$

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

故切线方程为 $y-1=(-1)(x-0)$,即 $x+y=1$.

(7) 解 (Ⅰ) 由题设可得

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0}\frac{x^k\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to0}x^{k-1}\sin\frac{1}{x},$$

当 $k\leqslant1$ 时,$f'(0)$ 不存在;当 $k>1$ 时,$f'(0)$ 存在,且 $f'(0)=0$.

(Ⅱ) 当 $k>1$ 时,$f(x)$ 的导函数为

$$f'(x) = \begin{cases} kx^{k-1}\sin\dfrac{1}{x} - x^{k-2}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

若 $k\leqslant2$,则 $\lim\limits_{x\to0}f'(x) = \lim\limits_{x\to0}\left(kx^{k-1}\sin\dfrac{1}{x} - x^{k-2}\cos\dfrac{1}{x}\right)$ 不存在,故当 $1<k\leqslant2$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,但导函数不连续.

(Ⅲ) 当 $k>2$ 时,$\lim\limits_{x\to0}f'(x) = 0 = f'(0)$,此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处导函数连续.

注 下列解法是错误的:

$$f'(x) = \left(x^k\sin\frac{1}{x}\right)' = kx^{k-1}\sin\frac{1}{x} - x^{k-2}\cos\frac{1}{x},$$

当 $x=0$ 时,没有意义,故 $f'(0)$ 不存在;当 $x\neq0$ 时,$f'(x) = kx^{k-1}\sin\dfrac{1}{x} - x^{k-2}\cos\dfrac{1}{x}$. 错误是当 $x=0$ 时,应该用导数定义求解.

(8) 证 令 $x=y=1$,由 $f(xy)=f(x)+f(y)$,知 $f(1)=0$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to0}\frac{f\left[x\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]-f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x)+f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to0}\frac{f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{f'(1)}{x} = \frac{1}{x},$$

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导.

对于 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$，积分后得 $f(x)=\ln x+C$. 因 $f(1)=0$，可得 $C=0$，所以 $f(x)=\ln x$.

(9) 解 依题设，有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=0.$$

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$，故

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{x^3}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}}=0.$$

同理，可得 $f^{(k)}(0)=0\ (k=3,4,\cdots)$，所以 $f^{(n)}(0)=0$.

注 利用洛必达法则，对任意正整数 k，有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k}=0$.

(10) 解 设开始充气以来的时间为 t，并且 t 时刻气球体积为 $V=V(t)$，半径为 $r=r(t)$.

由题设知，气球体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$，两边同时对 t 求导，有

$$\frac{dV}{dt}=4\pi r^2\cdot\frac{dr}{dt}.$$

由题设知，$\dfrac{dV}{dt}=100$，$r=10$，代入上式得 $100=4\pi\cdot 10^2\cdot\dfrac{dr}{dt}$，解得 $\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{1}{4\pi}$，即气球半径增加的速率为 $\dfrac{1}{4\pi}$ cm/s.

(11) 解 由题设知，若设点 P 的坐标为 (x,y)，则 $\dfrac{dx}{dt}=30$.

在方程 $9y=4x^2$ 两边同时对 t 求导，有 $9\dfrac{dy}{dt}=8x\dfrac{dx}{dt}$，即 $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{8}{9}x\cdot\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{80x}{3}$.

又 $S=\sqrt{x^2+y^2}$，两边同时对 t 求导，有

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(30x+\frac{80}{3}xy\right),$$

将 $x=3$，$y=4$ 代入上式，则有 $\dfrac{dS}{dt}=82$，即 S 的变化率为 82 cm/s.

(12) 解 依题设，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0)=1.$$

注 ① 下列解法是错误的：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}f''(0)=1,$$

题中条件是 $f(x)$ 二阶可导，不能保证 $f''(x)$ 连续，故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{2}=\dfrac{1}{2}f''(0)$ 错误.

② 此题也可以用泰勒公式求解：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)=x+x^2+o(x^2),$$

故
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+o(x^2)-x}{x^2}=1.$$

(13) 证 由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-(1+x)^{2x}+1}{x^2}=1$,根据极限与无穷小的关系,有

$$\frac{xf(x)-(1+x)^{2x}+1}{x^2}=1+\alpha\quad(\text{当 } x\to 0 \text{ 时},\alpha\to 0),$$

即

$$xf(x)-e^{2x\ln(1+x)}+1=x^2+x^2\alpha. \tag{①}$$

由 ① 式,可得

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{x}[x^2+x^2\alpha+e^{2x\ln(1+x)}-1]\\&=x+x\alpha+\frac{1}{x}[e^{2x\ln(1+x)}-1].\end{aligned}$$

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,知$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$,即有

$$\begin{aligned}f(0)&=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}[e^{2x\ln(1+x)}-1]\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2x\ln(1+x)}{x}=0,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x\alpha+\frac{1}{x}[e^{2x\ln(1+x)}-1]}{x}\\&=1+\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x\ln(1+x)}-1}{x^2}=1+\lim_{x\to 0}\frac{2x\ln(1+x)}{x^2}\\&=1+\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2}=1+2=3.\end{aligned}$$

(14) 证 由 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=1=f(0)$,知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,故 $f(x)$ 在$[-1,1]$上连续.又由

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1+x^2)-1}{x}=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(1-x^2)-1}{x}=0,$$

知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,所以 $f(x)$ 在$(-1,1)$ 内可导,故 $f(x)$ 在$[-1,1]$ 上满足拉格朗日中值定理.

由 $f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\dfrac{2-0}{2}=1$,而

$$f'(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\-2x, & -1\leqslant x<0,\end{cases}$$

由 $f'(x)=1$,得$\begin{cases}2x=1,\\-2x=1,\end{cases}$故解得 $\xi_1=\dfrac{1}{2}$, $\xi_2=-\dfrac{1}{2}$.

(15) 证 (Ⅰ) 令 $F(x)=x^2f(x)$,则有 $F(a)=F(b)=0$,由罗尔定理,知至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得$F'(\xi)=0$,即 $2\xi f(\xi)+\xi^2f'(\xi)=0$,故 $2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

(Ⅱ) 令 $G(x)=e^{-x^2}f(x)$,则有 $G(a)=G(b)=0$,由罗尔定理,知至少存在一点 $\eta\in(a,b)$,使得 $G'(\eta)=0$,即 $-2\eta e^{-\eta^2}f(\eta)+e^{-\eta^2}f'(\eta)=0$,故 $2\eta f(\eta)-f'(\eta)=0$.

(16) 证 令 $F(x)=(b-x)^af(x)$,由题设知,有 $F(a)=F(b)=0$,由罗尔定理,知至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $F'(\xi)=0$,即$(b-\xi)^{a-1}[(b-\xi)f'(\xi)-af(\xi)]=0$,故$(b-\xi)f'(\xi)-af(\xi)=0$,即 $af(\xi)+(\xi-b)f'(\xi)=0$.

(17) 证 只要证 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$ 内取得极值即可.

若 $f(x)=0$，则在 $(0,+\infty)$ 内处处有 $f'(x)=0$，因此不妨设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内不恒为 0，于是存在 $x_1>0$，使得 $f(x_1)\neq 0$，故不妨设 $f(x_1)>0$.

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，知存在正实数 $M>x_1$，使得当 $x>M$ 时，有 $|f(x)|<f(x_1)$.

又因 $f(x)$ 在 $[0,M]$ 上连续，所以存在 $\xi\in[0,M]$，使得

$$f(\xi)=\max_{0\leqslant x\leqslant M}\{f(x)\},$$

于是 $f(\xi)$ 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最大值，也是 $f(x)$ 的极值，故 $f'(\xi)=0$.

注 此题可视为罗尔定理的推广.

(18) 证 令 $F(x)=f(x)-\dfrac{x}{1+x^2}$，则 $F(0)=0$，并且

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{x}{1+x^2}\right]=0.$$

由 $0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}$ 及夹逼准则，知 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

由上一题结论知，至少存在一点 $\xi\in(0,+\infty)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=\dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

(19) 证 对 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{x_0}{2}\right]$，$\left[\dfrac{x_0}{2},x_0\right]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，得

$$f\left(\frac{x_0}{2}\right)-f(0)=f'(\xi_1)\cdot\frac{x_0}{2}\quad\left(0<\xi_1<\frac{x_0}{2}\right),\tag{①}$$

$$f(x_0)-f\left(\frac{x_0}{2}\right)=f'(\xi_2)\cdot\frac{x_0}{2}\quad\left(\frac{x_0}{2}<\xi_2<x_0\leqslant 1\right).\tag{②}$$

由 ②－①，可得

$$f(x_0)-2f\left(\frac{x_0}{2}\right)+f(0)=[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)]\cdot\frac{x_0}{2}.$$

又 $f(0)=0$，$f''(x)\leqslant 0$，知 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调减少. 由 $0<\xi_1<\xi_2<1$，知

$$f'(\xi_2)-f'(\xi_1)\leqslant 0,$$

故 $f(x_0)\leqslant 2f\left(\dfrac{x_0}{2}\right)$.

(20) 证 由于 $f(x)$ 不恒等于 x，可知存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $f(x_0)\neq x_0$.

若 $f(x_0)>x_0$，则根据拉格朗日中值定理，知存在一点 $\xi_1\in(0,x_0)$，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}>\frac{x_0}{x_0}=1;$$

若 $f(x_0)<x_0$，则根据拉格朗日中值定理，知存在一点 $\xi_2\in(x_0,1)$，使得

$$f'(\xi_2)=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}>\frac{1-x_0}{1-x_0}=1.$$

综上可知，存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)>1$.

(21) 证 (Ⅰ) 令 $F(x)=f(x)-2(1-x)$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $F(0)=-2<0$，$F(1)=1>0$，由零点定理，知至少存在一点 $x_0\in(0,1)$，使得 $F(x_0)=0$，即 $f(x_0)=2(1-x_0)$.

(Ⅱ) $f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 与 $[x_0,1]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，知存在 $\xi\in(0,x_0)$，$\eta\in(x_0,1)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\frac{f(x_0)}{x_0}=\frac{2(1-x_0)}{x_0},$$

$$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=\frac{1-f(x_0)}{1-x_0}=\frac{2x_0-1}{1-x_0},$$

所以 $f'(\xi)[1+f'(\eta)]=\dfrac{2(1-x_0)}{x_0}\left(1+\dfrac{2x_0-1}{1-x_0}\right)=2$.

(22) 证 由 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取得最小值，知存在一点 $x_0\in(0,1)$，使得 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上的最小值，于是 $f'(x_0)=0$. 由拉格朗日中值定理，有

$$f'(x_0)-f'(0)=f''(\xi_1)(x_0-0),\ 0<\xi_1<x_0,$$
$$f'(1)-f'(x_0)=f''(\xi_2)(1-x_0),\ x_0<\xi_2<1,$$

于是有

$$|f'(0)|=|f''(\xi_1)|(x_0-0)\leqslant x_0,$$
$$|f'(1)|=|f''(\xi_2)|(1-x_0)\leqslant 1-x_0,$$

两式相加，得 $|f'(0)|+|f'(1)|\leqslant 1$.

(23) 证 由 $f(x)$ 不恒为常数且 $f(a)=f(b)$，知存在一点 $c\in(a,b)$，使得

$$f(c)\neq f(a)=f(b),$$

不妨设 $f(c)>f(a)=f(b)$，根据拉格朗日中值定理，知存在 $\xi\in(a,c)$，$\eta\in(c,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0,\ f'(\eta)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}<0,$$

故 $f'(\xi)\cdot f'(\eta)<0$.

(24) 证 (Ⅰ) 由推广的积分中值定理，知存在一点 $c\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得

$$2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=2f(c)\left(1-\frac{1}{2}\right)=f(c),$$

于是 $f(0)=f(c)=f(1)$，在 $[0,c]$ 与 $[c,1]$ 上分别应用罗尔定理，有

$$f'(\xi_1)=0(0<\xi_1<c),\ f'(\xi_2)=0\ (c<\xi_2<1),$$

在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上再应用罗尔定理，有 $f''(\xi)=0$，至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$.

(Ⅱ) 令 $F(x)=\mathrm{e}^{-\lambda x}f'(x)$，则 $F(\xi_1)=F(\xi_2)=0$，由罗尔定理，知至少存在一点 $\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$，使得 $F'(\eta)=0$，即 $\mathrm{e}^{-\lambda\eta}[f''(\eta)-\lambda f'(\eta)]=0$，故 $f''(\eta)-\lambda f'(\eta)=0$.

(25) 证 只需证 $f'(\xi)=\dfrac{(b+a)f'(\eta)}{2\eta}$ 即可.

对 $f(x)$ 及 x^2 在 $[a,b]$ 上应用柯西中值定理，得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta},\ a<\eta<b,$$

即 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{(b+a)f'(\eta)}{2\eta}$.

再由拉格朗日中值定理，知存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，故原等式成立.

(26) 证 $\dfrac{a\mathrm{e}^b-b\mathrm{e}^a}{a-b}=\mathrm{e}^{\xi}(1-\xi)$ 等式左边分子、分母同时除以 ab，有

$$\frac{\dfrac{\mathrm{e}^b}{b}-\dfrac{\mathrm{e}^a}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\mathrm{e}^{\xi}(1-\xi).$$

对 $F(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$，$G(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $[a,b]$ 上应用柯西中值定理，有

$$\frac{\dfrac{\mathrm{e}^b}{b}-\dfrac{\mathrm{e}^a}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{\dfrac{\xi\mathrm{e}^{\xi}-\mathrm{e}^{\xi}}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}=\mathrm{e}^{\xi}(1-\xi),\ a<\xi<b,$$

故原等式成立.

(27) 证 （Ⅰ）只需证$\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x}>\dfrac{1}{\pi}$，$0<x<\pi$ 即可. 令 $f(x)=\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x}-\dfrac{1}{\pi}$，则

$$f'(x)=\frac{\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{\left(\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}}{x^2}.$$

当 $0<x<\pi$ 时，$\cos\frac{x}{2}>0$，$\tan\frac{x}{2}>\frac{x}{2}$，故 $f'(x)<0$，从而 $f(x)$ 单调减少，于是 $f(x)>f(\pi)=0$，即 $f(x)=\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x}-\dfrac{1}{\pi}>0$.

（Ⅱ）要证 $a^b>b^a$，只需证 $e^{b\ln a}>e^{a\ln b}$，即证 $b\ln a>a\ln b$.

令 $f(x)=x\ln a-a\ln x$，且 $x\geqslant a$，则 $f'(x)=\ln a-\dfrac{a}{x}$，由 $e<a<b$，得

$$\ln b>\ln a>\ln e=1,$$

故 $f'(x)>1-\dfrac{a}{x}\geqslant 0$，从而当 $x\geqslant a$ 时，$f(x)$ 严格单调增加，于是 $f(b)>f(a)$，即$b\ln a>a\ln b$，所以原不等式成立.

（Ⅲ）令 $f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$，则

$$f'(x)=2x\ln x-x+2-\frac{1}{x},\ f'(1)=0,$$

$$f''(x)=2\ln x+1+\frac{1}{x^2},\ f''(1)>0,$$

$$f'''(x)=\frac{2(x^2-1)}{x^3}.$$

当 $0<x<1$ 时，$f'''(x)<0$；当 $1<x<+\infty$ 时，$f'''(x)>0$. 因此 $f''(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调减少，在 $(1,+\infty)$ 内单调增加，$f''(x)$ 在 $x=1$ 处取到最小值. 又因为 $f''(1)>0$，所以当 $0<x<+\infty$ 时，$f''(x)>0$，从而 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加. 又因为 $f'(1)=0$，所以当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $1<x<+\infty$ 时，$f'(x)>0$. 同理可知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取到最小值，又 $f(1)=0$，所以 $f(x)>0$，故原不等式成立.

（Ⅳ）由已知，有

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{f(x)}{x}=0,$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1.$$

由泰勒公式，有

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2\\&=x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2\ (\xi\text{ 介于 }x\text{ 与 }0\text{ 之间}),\end{aligned}$$

由 $f''(x)>0$，知 $f(x)\geqslant x$，故原不等式成立.

(28) 证 所证不等式$\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x>e$ 两边同时取对数，得

$$\ln\frac{2x+1}{2x}+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>1.$$

令 $f(x)=\ln\dfrac{2x+1}{2x}+\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x-1$，$x>0$，则

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln 1 + \ln \mathrm{e} - 1 = 0,$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(2x+1)x} + \ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1},$$

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0,$$

$$f''(x) = \frac{4x+1}{(2x^2+x)^2} - \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{5x^2+5x+1}{(2x^2+x)^2(x+1)^2} > 0.$$

故 $f'(x)$ 单调增加且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$,从而当 $x > 0$ 时,有 $f'(x) < 0$,所以 $f(x)$ 单调减少且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$,故当 $x > 0$ 时,$f(x) > 0$,所证不等式成立.

(29) 解 $y' = \dfrac{x^2+x}{1+x^2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$,令 $y' = 0$,得 $x = 0, x = -1$.

列表如下:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$-2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$	$\nearrow$

由列表可知,单调减少的区间为 $(-1,0)$,单调增加的区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,+\infty)$. 极小值为 $f(0) = -\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$,极大值为 $f(-1) = -2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$. 当 $x\to+\infty$ 时,有

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}}{x} = \mathrm{e}^{\pi},$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}(y - k_1 x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x} - \mathrm{e}^{\pi}}{\frac{1}{x}} - \lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\pi}\left(\mathrm{e}^{\arctan x - \frac{\pi}{2}} - 1\right)}{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}^{\pi} = \lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\pi}\cdot\frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}^{\pi}$$

$$= \mathrm{e}^{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{1+x^2} - \mathrm{e}^{\pi} = -\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{\pi} = -2\mathrm{e}^{\pi}.$$

同理,当 $x\to-\infty$ 时,有 $k_2 = 1, b_2 = -2$,故有两条斜渐近线,分别为

$$y = \mathrm{e}^{\pi}(x-2),\ y = x - 2,$$

该函数 y 没有水平渐近线和铅直渐近线.

(30) 解 依题设,有

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} x^{2x} = \lim_{x\to0^+}\mathrm{e}^{2x\ln x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}2x\ln x} = \mathrm{e}^0 = 1,$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}(x+2) = 2,$$

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续,所以不可导,于是有

$$f'(x) = \begin{cases} 2x^{2x}(\ln x + 1), & x > 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases}$$

令 $f'(x) = 0$,得驻点 $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$,故 $x = 0$ 与 $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 是可能的极值点.

当 $x < 0$ 时,$f'(x) = 1 > 0$;当 $0 < x < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时,$f'(x) < 0$. 因此 $f(0) = 2$ 是 $f(x)$ 的极大值.

当 $0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f'(x)>0$. 因此 $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{2}{\mathrm{e}}}$ 是 $f(x)$ 的极小值.

综上可知，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 与 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$ 内单调增加，在 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 内单调减少.

(31) 解 依题设，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{1-\ln t}{t^2(1+\ln t)},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1-\ln t}{t^2(1+\ln t)}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1-\ln t}{t^2(1+\ln t)}\right]\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{2(\ln^2 t-2)}{t^3(1+\ln t)^3}.$$

令 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，得 $t=\mathrm{e}$；令 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$，得 $t=\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$.

列表如下：

t	1	$(1,\mathrm{e})$	e	$\left(\mathrm{e},\mathrm{e}^{\sqrt{2}}\right)$	$\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$	$\left(\mathrm{e}^{\sqrt{2}},+\infty\right)$
x	0	$(0,\mathrm{e})$	e	$\left(\mathrm{e},\sqrt{2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}\right)$	$\sqrt{2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$	$\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}},+\infty\right)$
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$	1	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$	-4	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}^{\sqrt{2}}}$	$\searrow$

由列表可知，$y=y(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 内单调增加，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 内单调减少. $y(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 为极大值，向上凹区间为 $\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}},+\infty\right)$，向上凸区间为 $\left(0,\sqrt{2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}\right)$，拐点为 $\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}^{\sqrt{2}}}\right)$.

(32) 证 由参数方程求导法，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{t^2-(1+t)\ln^2(1+t)}{(1+t)\ln^2(1+t)}\quad(0<t\leqslant 1),$$

且 $(1+t)\ln^2(1+t)>0$. 令 $g(t)=t^2-(1+t)\ln^2(1+t)$，则

$$g'(t)=2t-2\ln(1+t)-\ln^2(1+t),$$

$$g''(t)=\frac{2}{1+t}[t-\ln(1+t)].$$

当 $t>0$ 时，$t-\ln(1+t)>0$，故当 $0<t\leqslant 1$ 时，$g''(t)>0$，所以 $g'(t)$ 单调递增，且 $g'_+(0)=0$. 从而 $g'(t)>g'_+(0)=0$，$g(t)$ 单调递增.

故 $g(t)>g(0)=0$，所以 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

当 $0<t\leqslant 1$ 时，$1\leqslant x<+\infty$，$f(1)=\frac{1}{\ln 2}-1$，

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x\right]\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to0^+}\left[\frac{1}{\ln(1+t)}-\frac{1}{t}\right]$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t\ln(1+t)}=\lim_{t\to0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{t-\left[t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right]}{t^2}=\frac{1}{2},$$

故$\dfrac{1}{\ln 2}-1\leqslant f(x)<\dfrac{1}{2}$.

(33) **解** 由题设 $y=\ln x$,知 $y'=\dfrac{1}{x}$,$y''=-\dfrac{1}{x^2}$,故曲率半径为

$$R=\frac{1}{K}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x}.$$

令 $R'=\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2}\cdot(2x^2-1)=0$,得 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$$R''=\frac{2x^4+x^2+2}{x^3\sqrt{1+x^2}}>0,$$

故当 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时,曲率半径最小,故 $y=\ln x$ 在点$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{1}{2}\ln 2\right)$处的曲率半径最小,最小曲率半径为$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

(34) **证** 令 $f(x)=2^x-x^2-1$,定义域为$(-\infty,+\infty)$,显然 $x_1=0$,$x_2=1$ 是方程的两个实根. 又

$$f(2)=-1<0,\ f(5)=2^5-25-1=6>0,$$

由零点定理,知 $f(x)=0$ 在$(2,5)$内至少有一个实根,故 $f(x)=0$ 至少有三个实根.

又由 $f'''(x)=2^x(\ln 2)^3\neq 0$,知 $f(x)$ 至多有三个实根,故方程有且仅有三个不同实根.

注 证明(34)题至多只有三个实根,可利用罗尔定理及反证法.

假设有四个不同实根 $x_1<x_2<x_3<x_4$,即有

$$f(x_1)\quad=\quad f(x_2)\quad=\quad f(x_3)\quad=\quad f(x_4)\quad=\quad 0$$

$$f'(\xi_1)=0\qquad f'(\xi_2)=0\qquad f'(\xi_3)=0$$

$$f''(\xi_4)=0\qquad f''(\xi_5)=0$$

$$f'''(\xi_6)=0$$

与 $f'''(x)=2^x(\ln 2)^3\neq 0$ 矛盾,故至多只有三个实根.

一般情况,若 $f^{(n)}(x)\neq 0$,则 $f(x)=0$ 至多有 n 个不同实根.

(35) **证** 首先计算出$\displaystyle\int_0^\pi\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi\sqrt{2}\sin x\,\mathrm{d}x=2\sqrt{2}$. 令 $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-\ln x-2\sqrt{2}$,由 $f'(x)=0$,得唯一驻点 $x=\mathrm{e}$.

当 $0<x<\mathrm{e}$ 时,由 $f'(x)<0$,知 $f(x)$ 单调减少;当 $\mathrm{e}<x<+\infty$ 时,由 $f'(x)>0$,知 $f(x)$ 单调增加. 因此 $f(\mathrm{e})=-2\sqrt{2}<0$ 是 $f(x)$ 的极小值. 又因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,所以方程仅有两个不同实根.

(36) **解** 问题等价于讨论 $\ln^4 x-4\ln x+4x-k=0$ 不同实根的个数.

令 $f(x)=\ln^4 x-4\ln x+4x-k$,定义域为$(0,+\infty)$,则

$$f'(x)=\frac{4(\ln^3 x-1+x)}{x}=0,$$

得唯一驻点 $x=1$.

当 $0<x<1$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调减少;当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调增加. 因此 $f(1)=4-k$ 为 $f(x)$ 的最小值,并且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

当 $4-k>0$ 时,$f(x)=0$ 没有实根,无交点;

当 $4-k=0$ 时,$f(x)=0$ 有唯一实根,交点个数为 1;

当 $4-k<0$ 时,$f(x)=0$ 仅有两个不同实根,交点个数为 2.

注 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,且

$$\lim_{x\to a^+} f(x)>0(<0),\ \lim_{x\to b^-} f(x)>0(<0),$$

若仅存在 $x_0\in(a,b)$,使得 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值 m 或极大值M,则

① 当 $m>0$(或 $M<0$) 时,在$[a,b]$上 $f(x)$ 与 x 轴没有交点,故 $f(x)=0$ 在$[a,b]$上没有实根,如图 2-2(a) 所示;

② 当 $m=0$(或 $M=0$) 时,在$[a,b]$上 $f(x)$ 与 x 轴只有一个交点,故 $f(x)=0$ 在$[a,b]$上只有一个实根,如图 2-2(b) 所示;

③ 当 $m<0$(或 $M>0$) 时,在$[a,b]$上 $f(x)$ 与 x 仅有两个交点,故 $f(x)=0$ 在$[a,b]$上仅有两个不同实根,如图 2-2(c) 所示.

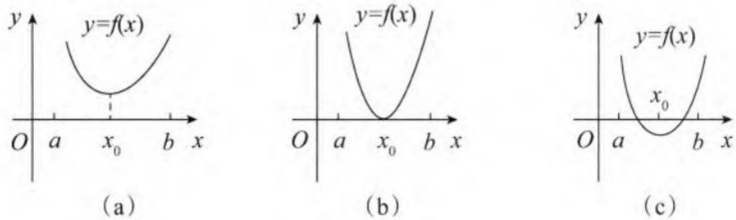


图 2-2

上述结论对$(-\infty,+\infty)$ 仍成立.

综合题

一、选择题

(1)A.

解 比较 $f(x)$ 与 x 的大小,考虑作差构造新函数,利用单调性求解.

令 $F(x)=f(x)-x$,则 $F'(x)=f'(x)-1$, $F(1)=f(1)-1=0$.

因 $f'(x)$ 严格单调减少,所以当 $x\in(1-\delta,1)$ 时,$f'(x)>f'(1)=1$.从而 $F'(x)=f'(x)-1>0$,即 $F(x)$ 在$(1-\delta,1)$ 内单调增加,所以 $F(x)<F(1)=0$,故 $f(x)<x$.

同理,当 $x\in(1,1+\delta)$ 时,

$$f'(1)>f'(x),\ F'(x)=f'(x)-1<0,$$

于是 $F(x)$ 在 $x\in(1,1+\delta)$ 内单调减少,故 $F(1)>F(x)$,即 $f(x)<x$.选项 A 正确.

(2)B.

解 讨论$\dfrac{f(x)}{x}$的单调性.令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$,则

$$F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{xf'(x)-[f(x)-f(0)]}{x^2}$$
$$=\frac{xf'(x)-f'(\xi)x}{x^2}\quad(0<\xi<x<b).$$

由 $f''(x)<0$,得 $f'(x)<f'(\xi)$,故 $F'(x)<0$,所以 $F(x)$ 单调减少,故$\dfrac{f(x)}{x}>\dfrac{f(b)}{b}$.选项 B 正确.

(3)C.

解 用反证法.假设 $f'_+(a)<0$,则 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$,由极限的保号性,知 $f(x)<f(a)$,与 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取得最小值矛盾.同理,若$f'_-(b)<0$,可知 $f(x)$ 在 $x=b$ 处不可能取得最大值,故选项 C 正确.

(4)C.

解 由 $f''(x)\neq 0$,知 $f(x)$ 在$[0,1]$上不恒为常数,又因 $f(0)=f(1)$,故 $f(x)$ 在$[0,1]$上最大值 M 和最小值 m 至少有一个是在(a,b)内取得,不妨设最大值 $M=f(\xi)$,$\xi\in(a,b)$,则 $f(\xi)$ 是 $f(x)$ 的极大值,从而 $f'(\xi)=0$.

用反证法证明 ξ 的唯一性. 假设有两个点 $\xi,\eta\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=f'(\eta)=0$,则由罗尔定理,知存在介于 ξ 和 η 之间的点 x_0,使得 $f''(x_0)=0$,这与 $f''(x)\neq 0$ 矛盾,故 ξ 是唯一的. 故选项 C 正确.

(5) D.

解 利用导数定义,有

$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-f(x)\sin x}{x}=-\lim_{x\to 0^-}f(x),$$

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^+}f(x),$$

$$F(x)\text{ 在 }x=0\text{ 处可导}\Leftrightarrow F'_-(0)=F'_+(0)\Leftrightarrow -\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x),$$

故选项 D 正确.

(6) B.

解 由已知,有 $f(0)=0,F(0)=0$.

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=0,$$

$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to 0^-}[-f(-x)]=-f(0)=0,$$

故 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $F'(0)=0$. 所以,有

$$F'(x)=\begin{cases}f(x), & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -f(-x), & x<0,\end{cases}$$

即 $F(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内可导.

记 $h(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,由 $f(t)$ 是奇函数,知 $h(x)$ 是偶函数,从而 $F(x)=h(|x|)$ 是偶函数. 故选项 B 正确.

(7) D.

解 由 $f(x)$ 在$(-1,1)$内可导,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$,知 $f(0)=0$.

又由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\cdot\dfrac{1}{x}=1$,知

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0,$$

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的驻点.

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1>0$,根据极限的保号性,知在 $x=0$ 的去心邻域内,有 $f(x)>0=f(0)$,故 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值. 选项 D 正确.

对于选项 A,B:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}$ 不一定存在. 例如

$$f(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{1}{x}+x^2, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin\frac{1}{x}+x^2}{x^2}=1,$$

$f(x)$ 是可导函数,且

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}+2x, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

但$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(3x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}+2\right)$不存在.

对于选项 C:由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}$不一定存在,知 $f''(0)=2$ 不一定成立. 排除选项 C.

(8)C.

解 当 $t>0$ 时,有

$$\begin{cases}x=t^2,\\ y=t\int_0^t e^{u^2}\,du,\end{cases}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\int_0^t e^{u^2}\,du+te^{t^2}}{2t}.$$

当 $t<0$ 时,有

$$\begin{cases}x=-t^2,\\ y=-t\int_0^{-t} e^{u^2}\,du,\end{cases}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\int_0^{-t} e^{u^2}\,du-te^{t^2}}{2t}.$$

当 $t=0$ 时,$x=0$. 由导数的定义,有

$$\begin{aligned}f'_{+}(0)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t\int_0^t e^{u^2}\,du}{t^2}\\&=\lim_{t\to 0^+}e^{t^2}=1,\\ f'_{-}(0)&=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{t\to 0^-}\frac{-t\int_0^{-t} e^{u^2}\,du}{-t^2}\\&=\lim_{t\to 0^-}(-e^{t^2})=-1,\end{aligned}$$

故 $f'(0)$ 不存在. 选项 C 正确而选项 A,D 不正确. 由于左右导数存在但不相等,故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处左连续,也右连续,从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,选项 B 不正确.

(9)B.

解 由已知,有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\arctan(nx)}{n\sqrt{1+\frac{x}{n}}}=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -\frac{\pi}{2}, & x<0,\end{cases}$$

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 在$[-1,1]$上的跳跃间断点,从而 $f(x)$ 可积,所以 $F(x)=\int_{-1}^x f(t)dt$ 连续. 但在 $x=0$ 处不可导,又 $f(x)$ 为奇函数,知 $F(x)$ 是连续的偶函数. 选项 B 正确.

注 结论:设 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$,$f(x)$ 在$[a,b]$上除了 $x_0\in(a,b)$ 处以外连续.

① 若 x_0 是 $f(x)$ 的可去间断点,则 $F(x)$ 在 x_0 处可导,且 $F'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

② 若 x_0 是 $f(x)$ 的跳跃间断点,则 $F(x)$ 在 x_0 处连续,但不可导,且

$$F'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}f(x),\ F'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}f(x).$$

(10) B.

解 由已知 $f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=0$ 及泰勒公式,有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+$$
$$\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^4\ (\xi\text{ 介于 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间})$$
$$=f(x_0)+\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^4,\ x\in(x_0-\delta,x_0+\delta),$$

故 $f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^4<0$,于是 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值,故选项 B 正确.

(11) B.

解 由已知,$F'(x)=f(x)$ 在 $x=a$ 处取得最小值,在 $x=b$ 处取得最大值.

用反证法. 若 $F''_+(a)<0$,则

$$F''_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{F'(x)-F'_+(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0.$$

由极限的保号性,知在 $x=a$ 的某去心右邻域内 $f(x)<f(a)$. 这与 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取得最小值矛盾,故 $F''_+(a)\geqslant 0$. 同理,若 $F''_-(b)<0$,则 $f(x)$ 在 $x=b$ 处不可能取得最大值,所以 $F''_-(b)\geqslant 0$. 选项 B 正确.

(12) C.

解 利用极值的定义判别.

由 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=1>0$,知在 x_0 的去心邻域内有 $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}>0$,即 $f(x)-f(x_0)$ 的正负由 $(x-x_0)^n$ 确定.

当 n 为奇数时,若 $x>x_0$,则 $f(x)-f(x_0)>0$;若 $x<x_0$,则 $f(x)-f(x_0)<0$. 故 x_0 不是 $f(x)$ 的极值点,排除选项 A 和 B.

当 n 为偶数时,当 $x>x_0$ 或 $x<x_0$ 时,都有 $f(x)-f(x_0)>0$. 故 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点,选项 C 正确.

(13) D.

解 涉及 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的极限,考虑用拉格朗日中值定理.

由 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$,知存在充分大的 x_0 和 M. 当 $x>x_0$ 时,有 $f'(x)>M>1$,故当 $x\to+\infty$ 时,

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)>f(x_0)+(x-x_0)\to+\infty,\ \xi\text{ 介于 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间},$$

故选项 D 正确.

(14) C.

解 令 $f(x)=\ln x-\frac{x}{\mathrm{e}}+k$,则 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{e}-x}{\mathrm{e}x}$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=\mathrm{e}$,可知 $x=\mathrm{e}$ 是 $f(x)$ 的最大值点,最大值为 $f(\mathrm{e})=k$.

由 $k>0$,知当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时,$f(x)$ 单调增加;当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时,$f(x)$ 单调减少. 因此函数 $f(x)$ 的图形与 x 轴有两个不同交点,即方程有两个不同实根,选项 C 正确.

(15) A.

解 依题意,$k\neq 0$,否则方程有两个实根. 当 $x\neq 0$ 时,原方程与 $kx^3-x^2+1=0$ 同解.

令 $f(x)=kx^3-x^2+1$,则

$$f'(x)=3kx^2-2x=x(3kx-2)=0,$$

得驻点 $x_1=0$,$x_2=\frac{2}{3k}$. 又 $f''(x)=2(3kx-1)$,有

$$f''(0)<0,\ f''\left(\frac{2}{3k}\right)=2>0,$$

由 $f''(0)<0$,可知 $f(0)=1>0$ 是极大值点.

要使方程有唯一实根,必须有 $f\left(\frac{2}{3k}\right)>0$,故$\frac{8k}{27k^3}-\frac{4}{9k^2}+1>0$,解得 $|k|>\frac{2}{9}\sqrt{3}$,选项 A 正确.

(16)C.

解 由 $f'(0)<0$,及保号性,可知存在 $x_1>0$,使得 $f(x_1)<0$.

根据拉格朗日中值定理,有

$$f(x)=f(0)+f'(\xi)(x-0)=f'(\xi)x\ (\xi \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}).$$

又根据拉格朗日中值定理,有

$$f'(x)=f'(0)+f''(\eta)(x-0)=f'(0)+f''(\eta)x\ (\eta \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}),$$

而 $f''(x)\geqslant M>0$,知当 $x\to+\infty$ 时,有 $f'(x)\geqslant 1$,所以

$$f(x)=f'(\xi)x\to+\infty\ (x\to+\infty),$$

故存在充分大的 $x_2>x_1>0$,使得 $f(x_2)>0$. 由零点定理,知 $f(x)=0$ 至少有一个实根.

又由 $f''(x)\geqslant M>0$,知 $f(x)=0$ 在$[0,+\infty)$ 上至多有两个实根,又因 $f(0)=0$,故 $f(x)=0$ 在$(0,+\infty)$ 内只有一个实根.

(17)D.

解 根据拉格朗日中值定理,有

$$f\left(\frac{3}{4}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)=f'(\xi)\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}f'(\xi)\geqslant\frac{1}{4}M,\ \xi\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right),$$

即 $f\left(\frac{3}{4}\right)\geqslant\frac{1}{4}M+f\left(\frac{1}{2}\right)$.

又 $f'(x)\geqslant M>0$,知 $f(x)$ 单调增加,且 $f\left(\frac{1}{2}\right)\geqslant 0$,故 $f\left(\frac{3}{4}\right)\geqslant\frac{1}{4}M>0$,所以在$\left[\frac{3}{4},1\right]$上,有$f(x)\geqslant\frac{1}{4}M$,选项 D 正确.

(18)C.

解 由已知条件,知 $y=f_1(x)$ 与 $y=f_2(x)$ 是凹函数,且 $y=f_1(x)$ 在该点处曲率大于 $y=f_2(x)$ 的曲率. 如图 2-3 所示,在点 x_0 的某邻域内有 $f_1(x)\geqslant f_2(x)\geqslant g(x)$,故选项 C 正确.

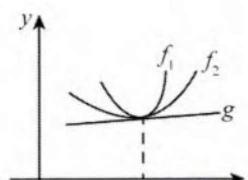


图 2-3

(19)C.

解 由已知,当 $x\in(0,1)$ 时,$f'(x)<0$;当 $x\in(1,3)$ 时,$f'(x)>0$;当 $x\in(3,4)$ 时,$f'(x)<0$.

由拉格朗日中值定理,有

$$f(3)-f(1)=f'(\xi_1)(3-1)=2f'(\xi_1)>0,\ \xi_1\in(1,3),$$
$$f(4)-f(3)=f'(\xi_2)(4-3)=f'(\xi_2)<0,\ \xi_2\in(3,4),$$

且由牛顿-莱布尼茨公式,有

$$f(4)-f(1)=\int_1^4 f'(x)\mathrm{d}x=\int_1^3 f'(x)\mathrm{d}x+\int_3^4 f'(x)\mathrm{d}x=S_2-S_3>0,$$

故 $f(3)>f(4)>f(1)$. 选项 C 正确.

(20)D.

解 依题设,$y=f(x)$ 如图 2-4 所示.

题中 ① 式可变形为

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}<\frac{f(1)-f(x)}{1-x}.$$

由拉格朗日中值定理,有

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(0)}{x},\ \xi_1\in(0,x);$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(1)-f(x)}{1-x},\ \xi_2\in(x,1).$$

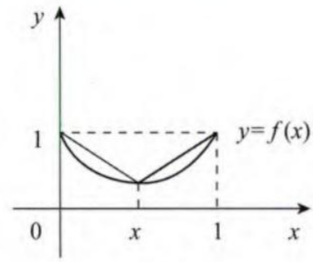


图 2-4

由 $f''(x)>0$,知 $f'(x)$ 单调递增,故 $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$. ① 式正确.

题中 ③ 式可变形为

$$xf(x)-xf(0)<f(1)-f(x)-xf(1)+xf(x).$$

由 $f(0)=f(1)$,知 ③ 式可变形为 $f(x)<f(1)$. 由 ① 式正确,知 $f(x)<f(0)=f(1)$. 故 ③ 式正确.

选项 D 正确.

(21) A.

解 依题设,当 $x>0$ 时,有

$$y'-p(x)y>0.$$

上式两边同乘以$e^{-\int_0^x p(t)dt}$,得

$$e^{-\int_0^x p(t)dt}[y'-p(x)y]>0,$$

故有$\left[f(x)e^{-\int_0^x p(t)dt}\right]'>0$,从而 $f(x)e^{-\int_0^x p(t)dt}$ 在$(0,+\infty)$ 内单调递增,故

$$f(x)e^{-\int_0^x p(t)dt}>f(x)e^{-\int_0^x p(t)dt}\Big|_{x=0}=f(0)\geqslant 0.$$

而由$e^{-\int_0^x p(t)dt}>0$,可知 $f(x)>0,x\in(0,+\infty)$.

由已知,可得 $y'=f'(x)>p(x)f(x)>0$,于是 $y=f(x)$ 在$(0,+\infty)$ 内单调递增.

故当 $0<a<b$ 时,有

$$f(0)<f(a)<f(b).$$

选项 A 正确.

(22) D.

解 由 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=1$,知$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=1>0$.

由极限的保号性,知 $f(x)$ 在 x_0 的去心邻域内单调递增. 选项 D 正确.

由$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=1$,不能保证 $f(x)$ 在 x_0 处可导,也不能保证 $f(x)$ 在 x_0 处连续和极限存在.

例如:$f(x)=\begin{cases}x+1, & x>0,\\ x, & x\leqslant 0,\end{cases}$则当 $x\neq 0$ 时,$f'(x)=1$.

$$\lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}f'(x)=1,$$

但$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$,所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在,$f(x)$在$x=0$处不连续,不可导. 排除选项 A,B,C.

注 注意区别 $f'_-(x_0),f'_+(x_0)$ 均存在和 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$.

(23) A.

解 $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha+1}}\sin\dfrac{1}{(x-1)^{\beta}}$.

当 $\alpha+1<0$ 时,$f'_+(1)=0$;当 $\alpha+1\geqslant 0$ 时,$f'_+(1)$ 不存在,而

$$f'_{-}(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{0-0}{x-1}=0.$$

故当 $\alpha<-1$ 时,有

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-\alpha}{(x-1)^{\alpha+1}}\sin\dfrac{1}{(x-1)^{\beta}}+\dfrac{-\beta}{(x-1)^{\alpha+\beta+1}}\cos\dfrac{1}{(x-1)^{\beta}}, & x>1,\\ 0, & x\leqslant1.\end{cases}$$

$$\lim_{x\to1^+}f'(x)=\lim_{x\to1^+}\left[\frac{-\alpha}{(x-1)^{\alpha+1}}\sin\frac{1}{(x-1)^{\beta}}+\frac{-\beta}{(x-1)^{\alpha+\beta+1}}\cos\frac{1}{(x-1)^{\beta}}\right].$$

当 $\alpha+1<0$ 且 $\alpha+\beta+1<0$ 时,有

$$\lim_{x\to1^+}f'(x)=0,\ 而\lim_{x\to1^-}f'(x)=0.$$

即当 $\alpha<-1$ 且 $\alpha+\beta<-1$ 时,$\lim\limits_{x\to1}f'(x)=0=f'(1)$,从而 $f'(x)$ 在 $x=1$ 处连续. 选项 A 正确.

(24)B.

解 依题设,知 $f(0)=1$,$y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处与 $x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ 相切,且曲率半径为 $\frac{1}{2}$. 方程 $x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ 两边同时对 x 求导,得

$$2x+2\left(y-\frac{3}{2}\right)y'=0.$$

将 $x=0$,$y=1$ 代入上式,得 $y'|_{x=0}=0$,故 $f'(0)=0$.

又 $\frac{1}{2}=\left.\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}\right|_{(0,1)}=\left.\frac{1}{|y''|}\right|_{(0,1)}$,解得 $y''|_{x=0}=2$,故

$$f''(0)=2\ \left(由曲率圆在点(0,1)处的凹向,知 y''|_{x=0}>0\right).$$

由泰勒公式,有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)=1+x^2+o(x^2),$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的二次泰勒多项式为 $1+x^2$. 选项 B 正确.

二、填空题

(1) $-\frac{99!}{2}\pi$.

解 因为 $\left.\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)-1\right]\right|_{x=1}=0$,令 $f(x)=\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)-1\right]\cdot g(x)$,则

$$\begin{aligned}f'(1)&=\left.\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)-1\right]'\right|_{x=1}\cdot g(1)+0\cdot g'(1)\\&=\left.\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)-1\right]'\right|_{x=1}\left.\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}x^2\right)-2\right]\cdots\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}x^{100}\right)-100\right]\right|_{x=1}\\&=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}\cdot(-99!)=-\frac{99!}{2}\pi.\end{aligned}$$

(2)64.

解 由 $f(x)=3x^2+kx^{-3}$,有 $f'(x)=6x-3kx^{-4}=0$,得唯一驻点 $x=\sqrt[5]{\frac{k}{2}}$. 又

$$f''(x)=6+12kx^{-5},\ f''\left(\sqrt[5]{\frac{k}{2}}\right)>0,$$

故 $f\left(\sqrt[5]{\frac{k}{2}}\right)=5\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{2}{5}}$ 为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最小值.

由 $5\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{2}{5}}\geqslant 20$,解得 $k\geqslant 64$,即 k 至少为 64.

(3) 1.

解 由

$$y'=\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right]e^{-x}-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}=0,$$

得 $x=0$. 由于 n 为奇数,当 $x<0$ 时,$y'>0$;当 $x>0$ 时,$y'<0$,故 $f(0)=1$ 是极大值.

(4) 2.

解 由 $f(a)=f(b)$,知 $\ln b+1=-\frac{1}{a}$,即 $b=e^{-\frac{1}{a}-1}$. 故 $b-a=e^{-\frac{1}{a}-1}-a$.

令 $g(t)=e^{-\frac{1}{t}-1}-t\,(t<0)$,则由

$$g'(t)=\frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}-1}-1=\frac{e^{-\frac{1}{t}-1}-t^2}{t^2}=0$$

得 $t=-1$ 为唯一驻点.

当 $t<-1$ 时,$g'(t)<0$,知 $g(t)$ 单调递减;当 $t>-1$ 时,$g'(t)>0$,知 $g(t)$ 单调递增.

所以当 $t=-1$ 时,$g(-1)=2$ 为极小值,也是最小值. 故 $b-a$ 的最小值为 2.

注 由 $e^{-\frac{1}{t}-1}-t^2\,(t<0)$ 的单调性,可知 $t=-1$ 为 $g(t)$ 的唯一驻点.

(5) $\frac{1}{2}$.

解 易知 $k\neq 0$,$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+k}{x-k}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2k}{x-k}\right)^{\frac{x-k}{2k}}\right]^{\frac{2kx}{x-k}}=e^{2k}$.

根据拉格朗日中值定理,有

$$f(x)-f(x-1)=f'(\xi)\cdot 1\ (\xi \text{ 介于 } x-1 \text{ 与 } x \text{ 之间}),$$

因而 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim\limits_{x\to\infty}f'(\xi)=e$,于是 $e^{2k}=e$,所以 $k=\frac{1}{2}$.

(6) 4,3.

解 由图 2-5 可知,

$$f'(x_1)=f'(x_3)=f'(x_4)=f'(x_6)=0,$$

故 x_1,x_3,x_4,x_6 是驻点. $f'(0)$ 与 $f'(x_5)$ 不存在,所以可能的极值点为:$x=x_1$, $x=x_3$, $x=0$, $x=x_4$, $x=x_6$, $x=x_5$.

在 $x=x_1$, $x=x_3$, $x=0$, $x=x_4$ 两侧,$f'(x)$ 均异号,故有 4 个极值点.

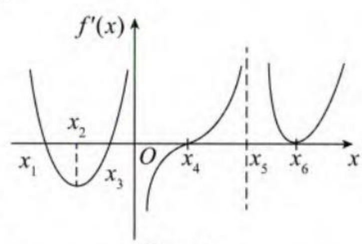


图 2-5

$f''(x_2)=0$,$f''(x_6)=0$,$f''(0)$ 与 $f''(x_5)$ 不存在. 在 $x=x_2$, $x=x_6$ 两侧,$f''(x)$ 变号;在 $x=x_5$ 两侧,$f''(x)$ 变号,故拐点有 3 个.

(7) $e^{\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}}$.

解 极限为 1^∞ 型,利用重要极限结论.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f\left(x_0+\frac{1}{x}\right)}{f(x_0)}\right]^x=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{f\left(x_0+\frac{1}{x}\right)-f(x_0)}{f(x_0)}\right]^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{f\left(x_0+\frac{1}{x}\right)-f(x_0)}{f(x_0)}\right]^{\frac{f(x_0)}{f\left(x_0+\frac{1}{x}\right)-f(x_0)}\cdot\frac{f\left(x_0+\frac{1}{x}\right)-f(x_0)}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{f(x_0)}},$$

而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f\left(x_0+\frac{1}{x}\right)-f(x_0)}{\frac{1}{x}}=f'(x_0)$，故原极限 $=\mathrm{e}^{\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}}$.

(8) 9.

解 由反函数求导法则，可知 $g'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$.

由复合函数求导法则，可知

$$g''(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\frac{1}{f'(x)}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{f'(x)}\right]\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\cdot\frac{1}{f'(x)}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3},$$

$$\begin{aligned}g'''(y)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[g''(y)]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left\{\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right\}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right\}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\\&=-\frac{f'''(x)[f'(x)]^3-3[f'(x)]^2\cdot[f''(x)]^2}{[f'(x)]^6}\cdot\frac{1}{f'(x)}\\&=-\frac{f'''(x)[f'(x)]^3-3[f'(x)]^2[f''(x)]^2}{[f'(x)]^7},\end{aligned}$$

故 $g'''(y_0)=-\dfrac{f'''(x_0)[f'(x_0)]^3-3[f'(x_0)]^2[f''(x_0)]^2}{[f'(x_0)]^7}=9$.

(9) $n!\dfrac{(-1)^{n-2}}{(n-1)2^{n-1}}$.

解 $f(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-f(t)}\mathrm{d}t$ 两边同时对 x 求导，得 $f'(x)=\mathrm{e}^{-f(x)}$，即

$$\mathrm{e}^{f(x)}\cdot f'(x)=1.$$

上式两边同时积分，得 $\mathrm{e}^{f(x)}=x+C$，即 $f(x)=\ln(x+C)$.

由已知，$f(0)=0$，得 $C=1$，故 $f(x)=\ln(x+1)$.

$$\begin{aligned}g(x)&=xf(x+1)=x\ln(x+2)=x\ln\left[2\left(1+\frac{x}{2}\right)\right]\\&=x\left[\ln 2+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)\right]\\&=x\left[\ln 2+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n+o(x^n)\right]\\&=x\ln 2+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}x^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}x^{n+1}+o(x^{n+1}),\end{aligned}$$

故 $g^{(n)}(0)=n!a_n=n!\dfrac{(-1)^{n-2}}{(n-1)2^{n-1}}$.

(10) $-4\sqrt{3}$.

解 由 $f'(y)=\dfrac{1}{g'(x)}$，且当 $x=1$ 时，$y=g(1)=2$，知

$$f'(2)=\frac{1}{g'(1)}=-\sqrt{3},$$

故
$$\lim_{y\to 2}\left[(y-2)\frac{f(y)-f(2)}{(\ln y-\ln 2)^2}\right]=\lim_{y\to 2}\left[\frac{f(y)-f(2)}{y-2}\cdot\frac{(y-2)^2}{(\ln y-\ln 2)^2}\right]$$

$$=f'(2)\lim_{y\to 2}\frac{(y-2)^2}{\left[\ln\left(1+\frac{y}{2}-1\right)\right]^2}=4f'(2)=-4\sqrt{3}.$$

(11) 1.

解
$$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(\frac{2n+1}{n}\right)-3\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(2+\frac{1}{n}\right)-3}{\frac{1}{n}}.$$

由已知可得,当 $x=2$ 时,$t=1$,$y=3$,故

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(2+\frac{1}{n}\right)-f(2)}{\frac{1}{n}}=f'_+(2)=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2}=\left.\frac{4-2t}{2t}\right|_{t=1}=1.$$

(12) $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

解 由 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处与 x 轴相切,知 $f(0)=0$,$f'(0)=0$.

又 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}f''(0)=1$,知 $f''(0)=2$,故 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的曲率半径为

$$R=\frac{[1+f'^2(0)]^{\frac{3}{2}}}{|f''(0)|}=\frac{1}{2}.$$

由 $f''(0)=2>0$ 及 $f''(x)$ 连续,知在 $x=0$ 的邻域内有 $f''(x)>0$.

由于曲率圆在点 $(0,0)$ 处与 $y=f(x)$ 有相同的凹向,知 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的曲率圆方程为

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

三、解答题

(1) 解
$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=c,\ \lim_{x\to 0^+}f(x)=0,\ f(0)=c,$$

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,故 $c=0$.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-0}{x}=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax^2+b\sin x-0}{x}=b,$$

由 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续,知 $b=1$,故当 $b=1$,$c=0$ 时,$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且

$$f'(x)=\begin{cases}2ax+\cos x, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0,\end{cases}$$

$$f''_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{x}=-1,$$

$$f''_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2ax+\cos x-1}{x}=2a,$$

故当 $a\neq-\frac{1}{2}$ 时,$f''(0)$ 不存在.

(2) 解 此题是复合函数和隐函数的综合题.

由 $y+\mathrm{e}^y=x$，两边同时对 x 求导，得 $y'+\mathrm{e}^y\cdot y'=1$，解得 $y'=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^y}$，故$y''=\dfrac{-\mathrm{e}^y}{(1+\mathrm{e}^y)^3}$. 由 $z=f[\varphi(x)+y^2]$，得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}&=f'[\varphi(x)+y^2]\cdot[\varphi'(x)+2y\cdot y']\\&=f'[\varphi(x)+y^2]\cdot\left[\varphi'(x)+\frac{2y}{1+\mathrm{e}^y}\right],\\\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}&=f''[\varphi(x)+y^2]\cdot[\varphi'(x)+2yy']^2+\\&\quad f'[\varphi(x)+y^2]\cdot[\varphi''(x)+2y'^2+2yy'']\\&=f''[\varphi(x)+y^2]\cdot\left[\varphi'(x)+\frac{2y}{1+\mathrm{e}^y}\right]^2+\\&\quad f'[\varphi(x)+y^2]\cdot\left[\varphi''(x)+\frac{2}{(1+\mathrm{e}^y)^2}-\frac{2y\mathrm{e}^y}{(1+\mathrm{e}^y)^3}\right].\end{aligned}$$

(3) 解 考虑到 $f(x)$ 的周期性及 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，本题关键是求 $f(1)$ 和 $f'(1)$.

由
$$\lim_{x\to0}[f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)]=\lim_{x\to0}[8x+\alpha(x)],$$
得 $f(1)-3f(1)=0$，即 $f(1)=0$. 又
$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{8x}{\sin x}+\frac{\alpha(x)}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right]=8,$$
即
$$\lim_{x\to0}\left[\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{\sin x}+3\frac{f(1-\sin x)-f(1)}{-\sin x}\right]=8,$$
故 $f'(1)+3f'(1)=8$，即 $f'(1)=2$.

又 $f(x+5)=f(x)$，有 $f(6)=f(1)=0$，$f'(6)=f'(1)=2$，故切线方程为 $y-0=2(x-6)$，即 $2x-y-12=0$.

(4) 解 对 $f(x)$ 求导，得
$$\begin{aligned}f'(x)&=n(1-x)^n+n^2x(1-x)^{n-1}\cdot(-1)\\&=n(1-x)^{n-1}[1-(n+1)x]\quad(0<x<1),\end{aligned}$$
令 $f'(x_0)=0$，解得 $x_0=\dfrac{1}{n+1}$.

当 $0<x<\dfrac{1}{n+1}$ 时，$f'(x)>0$；当$\dfrac{1}{n+1}<x<1$ 时，$f'(x)<0$. 故 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值.

又因为 $f(0)=0$，$f(1)=0$，所以
$$M(n)=f(x_0)=\frac{n}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$
为 $f(x)$ 在$[0,1]$上的最大值，且$\lim\limits_{n\to\infty}M(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\mathrm{e}^{-1}$.

(5) 解 (Ⅰ) 当 $p\leqslant0$ 时，由于$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}|x|^p\sin\dfrac{1}{x}$，该极限不存在，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点；

当 $p>0$ 时，由于$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}|x|^p\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(Ⅱ) 当 $p>1$ 时，由于
$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\lim_{x\to0^-}|x|^{p-1}\sin\frac{1}{x}=0,$$
$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}|x|^{p-1}\sin\frac{1}{x}=0,$$
故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(Ⅲ) 当 $p>2$ 时,由(Ⅱ)知 $f'(0)=0$.若 $x>0$,则

$$f'(x)=\left(x^p\sin\frac{1}{x}\right)'=px^{p-1}\sin\frac{1}{x}-x^{p-2}\cos\frac{1}{x}\to 0\ (x\to 0^+),$$

故 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=0$;若 $x<0$,则

$$f'(x)=\left[(-x)^p\sin\frac{1}{x}\right]'=-p(-x)^{p-1}\sin\frac{1}{x}-(-x)^{p-2}\cos\frac{1}{x}\to 0\ (x\to 0^-),$$

故 $\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)=0$.

由此可知,当 $p>2$ 时,$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(6) **证** (Ⅰ) 由

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=1\Rightarrow\begin{cases}f(0)=0,\\ f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=1,\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{x-1}=1\Rightarrow\begin{cases}f(1)=0,\\ f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=1,\end{cases}$$

知 $f(0)=f(1)=0$.

由保号性,$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=1>0$,知 $\exists x_1\in(0,\delta_1)(\delta_1>0)$,使得 $f(x_1)>0$;

由保号性,$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)}{x-1}=1>0$,知 $\exists x_2\in(1-\delta_2,1)(\delta_2>0)$,使得 $f(x_2)<0$.

由零点定理,知 $\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(0,1)$,使得 $f(\xi)=0$.

(Ⅱ) 令 $g(x)=f(x)e^{-x}$,在 $[0,\xi]$,$[\xi,1]$ 上分别应用罗尔定理.

由 $g(0)=g(\xi)=0$,知 $\exists\xi_1\in(0,\xi)$,使得 $g'(\xi_1)=0$,即

$$e^{-\xi_1}[f'(\xi_1)-f(\xi_1)]=0,$$

可得 $f'(\xi_1)-f(\xi_1)=0$.

又由 $g(\xi)=g(1)=0$,知 $\exists\xi_2\in(\xi,1)$,使得 $g'(\xi_2)=0$,即

$$e^{-\xi_2}[f'(\xi_2)-f(\xi_2)]=0,$$

可得 $f'(\xi_2)-f(\xi_2)=0$.综上可知,$f'(x)-f(x)=0$ 有两个根 ξ_1 和 ξ_2.

再令 $F(x)=e^x[f'(x)-f(x)]$,在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用罗尔定理,$F(\xi_1)=F(\xi_2)=0$,所以 $\exists\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$,使得 $F'(\eta)=0$,即

$$e^\eta[f''(\eta)-f'(\eta)+f'(\eta)-f(\eta)]=0,$$

故 $f''(\eta)=f(\eta)$.

(7) **证** 令

$$F(x)=f(x)\int_x^b g(t)dt+g(x)\int_a^x f(t)dt,$$

则 $F(a)=F(b)=0$,由罗尔定理,知至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $F'(\xi)=0$,即

$$\begin{aligned}F'(\xi)&=f'(\xi)\int_\xi^b g(t)dt-f(\xi)g(\xi)+g(\xi)f(\xi)+g'(\xi)\int_a^\xi f(t)dt\\&=f'(\xi)\int_\xi^b g(t)dt+g'(\xi)\int_a^\xi f(t)dt=0.\end{aligned}$$

(8) **解** 将函数 $f(x)$ 进行恒等变换,有 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$,

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3),$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2),$$

故

$$\begin{aligned}e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}&=e^{\frac{1}{x}\left[x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]}=e\cdot e^{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)}\\&=e\cdot\left[1+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^3\right)^2+o(x^2)\right]\\&=e-\frac{1}{2}ex+\frac{11}{24}ex^2+o(x^2),\end{aligned}$$

所以 $a=-\frac{1}{2}e,b=\frac{11}{24}e$.

(9) **证** (Ⅰ) 由已知,$f'_+(a)f'_-(b)<0$,不妨设 $f'_+(a)<0,f'_-(b)>0$. 由

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0,$$

知存在 $x_1\in(a,a+\delta_1)(\delta_1>0)$,使得 $f(x_1)<f(a)$,故 $f(a)$ 不是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的最小值.

同理,由 $f'_-(b)>0$ 可推得 $f(b)$ 不是 $f(x)$ 在$[a,b]$上最小值,于是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的最小值只能在区间(a,b) 内取得. 令 $x=\xi\in(a,b)$,$f(x)$ 取得最小值,从而知 $f'(\xi)=0$.

(Ⅱ) 令 $g(x)=f(x)-\mu x$,则 $g'(x)=f'(x)-\mu$,于是有 $g'_+(a)\cdot g'_-(b)<0$.

由(Ⅰ)知,存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $g'(\xi)=0$,即 $f'(\xi)=\mu$.

注 本题(Ⅱ)是导函数的介值定理. 本题(Ⅰ)说明导函数 $f'(x)$ 具有连续函数的零点定理性质,结论(Ⅱ)说明 $f'(x)$ 具有介值定理性质,不需要 $f'(x)$ 连续的条件.

(10) **证** 先证存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$. 用反证法. 假设不存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$,则在(a,b) 内,总有 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$.

若 $f(x)>0$,由 $f(a)=f(b)=0$,则

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}\geqslant 0,$$

$$f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{x-b}\leqslant 0,$$

故有 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)\leqslant 0$,与条件 $f'_+(a)f'_-(b)>0$ 矛盾;

若 $f(x)<0$,则

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}\leqslant 0,\ f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{x-b}\geqslant 0,$$

故有 $f'_+(a)f'_-(b)\leqslant 0$,与条件 $f'_+(a)f'_-(b)>0$ 矛盾.

综上可知,存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

再证存在 $\eta\in(a,b)$,使得 $f''(\eta)=0$. 由 $f(a)=f(\xi)=f(b)$,在$[a,\xi]$与$[\xi,b]$上对 $f(x)$ 分别应用罗尔定理,$\exists\,\eta_1\in(a,\xi),\eta_2\in(\xi,b)$,使得 $f'(\eta_1)=0,f'(\eta_2)=0$,对 $f'(x)$ 在$[\eta_1,\eta_2]$上再用罗尔定理,$\exists\,\eta\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$,使得 $f''(\eta)=0$.

(11) **证** 令 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$,已知不等式变形为 $f(x_0)\geqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,即

$$f(x_0)-f(x_1)\geqslant f(x_2)-f(x_0).\qquad ①$$

由拉格朗日中值定理,得

$$f(x_0)-f(x_1)=f'(\xi_1)(x_0-x_1)\ (\xi_1\text{ 介于 }x_0\text{ 与 }x_1\text{ 之间}),$$

$$f(x_2)-f(x_0)=f'(\xi_2)(x_2-x_0)\ (\xi_2\text{ 介于 }x_0\text{ 与 }x_2\text{ 之间}),$$

将两式同时代入 ① 式,得

$$f'(\xi_1)(x_0-x_1)\geqslant f'(\xi_2)(x_2-x_0),$$

而 $x_0-x_1=x_2-x_0=\frac{x_2-x_1}{2}>0$,故 $f'(\xi_1)\geqslant f'(\xi_2)$.

(12) 证 由
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}<0,$$
可知存在 $x_1\in(0,\delta),\delta>0$,使得 $f(x_1)<0$. 由拉格朗日中值定理,有
$$f'(x)=f'(0)+f''(\xi_1)(x-0)\geqslant f'(0)+Mx\to+\infty\ (x\to+\infty),$$
其中 ξ_1 介于 0 与 x 之间,故存在充分大的 $x_0\in(0,+\infty)$,使得在$(x_0,+\infty)$ 内有$f'(x)>1$.

对 $f(x)$ 应用拉格朗日中值定理,有
$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi_2)(x-x_0)\geqslant f(x_0)+(x-x_0)\to+\infty\ (x\to+\infty),$$
其中 ξ_2 介于 x_0 与 x 之间,于是存在充分大的 $x_2\in(x_0,+\infty)$,使得 $f(x_2)>0$.

在区间(x_1,x_2) 内由零点定理,可知 $f(x)=0$ 至少有一个实根.

用反证法,证明 $f(x)=0$ 在$(0,+\infty)$ 内至多有一个实根.

若 $f(x)=0$ 有两个不同实根 $a_1,a_2(a_1<a_2)$,则由罗尔定理知,在$(0,a_1)$ 和(a_1,a_2) 内分别有 $f'(x)$ 的零点 b_1 与 b_2. 再由罗尔定理,知存在 $c\in(b_1,b_2)$,使得 $f''(c)=0$,与已知条件$f''(x)\geqslant M>0$ 矛盾,所以$f(x)=0$ 在$(0,+\infty)$ 内有唯一实根.

(13) 解 (Ⅰ) 设 $f(x_0)=m$,由 $f(0)=f(1)=0,m<0$,知 $x_0\in(0,1)$,且 $f'(x_0)=0$. 由拉格朗日中值定理,知存在一点 $\xi\in(0,x_0)$,使得
$$f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\frac{m}{x_0}<\frac{m}{n}<f'(x_0).$$

对 $f'(x)$ 在$[\xi,x_0]$ 上应用介值定理,存在 $x_n\in(\xi,x_0)\subset(0,1)$,使得 $f'(x_n)=\dfrac{m}{n}$,即 $nf'(x)=m$ 在 $x\in(0,1)$ 内有实根 x_n. 又由 $f''(x)>0$,知 $f'(x)$ 在$(0,1)$ 内严格单调递增,故 x_n 是唯一的.

(Ⅱ) 由 $f'(x)$ 严格单调递增,知
$$f'(x_n)=\frac{m}{n}<\frac{m}{n+1}=f'(x_{n+1}),$$
故 $x_n<x_{n+1}<x_0<1$,$\{x_n\}$ 单调递增有上界,由单调有界准则,知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,则 $0<A\leqslant x_0$,由 $f'(x)$ 在$(0,1)$ 内连续,知
$$f'(A)=f'(\lim_{n\to\infty}x_n)=\lim_{n\to\infty}f'(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}=0;$$
由 $f'(x)$ 严格单调递增,知 $A=x_0$.

故$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)=f(x_0)=m$.

(14) 证 (Ⅰ) 将要证等式变形为$\dfrac{e^{-1}-1}{\int_0^1 f(t)dt}=-\dfrac{e^{-\xi}}{f(\xi)}$.

由极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x+1)}{x}$ 存在,可知 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x+1)=0=f(1)$.

对 e^{-x},$\int_0^x f(t)dt$ 在$[0,1]$ 上应用柯西中值定理,有
$$\frac{e^{-1}-1}{\int_0^1 f(t)dt}=-\frac{e^{-\xi}}{f(\xi)},\ 0<\xi<1. \qquad ①$$

(Ⅱ) 由 $f(1)-f(\xi)=f'(\eta)(1-\xi)$,$\xi<\eta<1$,得 $f(\xi)=(\xi-1)f'(\eta)$. 将其代入 ① 式,得
$$\frac{e^{-1}-1}{\int_0^1 f(t)dt}=-\frac{e^{-\xi}}{(\xi-1)f'(\eta)}.$$

整理后得 $e\int_0^1 f(t)dt=(e-1)e^{\xi}(\xi-1)f'(\eta)$.

(15) 解 (Ⅰ)$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$,$\xi$ 介于 x 与 c 之间.

证 (Ⅱ) 在上式中,分别令 $x=0,x=1$,则有

$$f(0)=f(c)+f'(c)(0-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(0-c)^2,0<\xi_1<c<1,$$

$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2,0<c<\xi_2<1.$$

两式相减,得 $f(1)-f(0)=f'(c)+\frac{1}{2!}[f''(\xi_2)(1-c)^2-f''(\xi_1)c^2]$,故

$$|f'(c)|\leqslant|f(1)|+|f(0)|+\frac{1}{2!}|f''(\xi_2)|(1-c)^2+\frac{1}{2!}|f''(\xi_1)|c^2$$

$$\leqslant a+a+\frac{b}{2}[(1-c)^2+c^2].$$

又因为 $c\in(0,1)$,$(1-c)^2+c^2\leqslant1$,所以 $|f'(c)|\leqslant 2a+\frac{b}{2}$.

(16) 证 (Ⅰ)
$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0,$$

故 $f(x)\equiv c$(c 为常数).又

$$f(1)=2\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=2\arctan t\Big|_0^1=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2},$$

故 $f(x)=\frac{\pi}{2}$.

(Ⅱ) 当 $x=1$ 时,$\arctan 1-\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{1+1^2}=\frac{\pi}{4}$;

当 $x>1$ 时,令 $f(x)=\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}-\frac{\pi}{4}$,则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}\cdot\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1+x^2}{x^2-1}\cdot\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\equiv0,$$

故 $f(x)\equiv c$(c 为常数).

又 $f(x)$ 在$[1,+\infty)$ 上连续,故 $f(1)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=0$,故有 $f(x)=0$,即

$$\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}.$$

(17) 证 当 x_0 是 $f(x)$ 的极值点时,有 $f'(x_0)=0$,将 x_0 代入已知条件,得

$$f''(x_0)=\frac{1-\mathrm{e}^{1-x_0}}{x_0-1}.$$

当 $x_0\neq1$ 时,若 $x_0>1$,则 $f''(x_0)>0$,若 $x_0<1$,则 $f''(x_0)>0$,故 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 极小值点;

当 $x_0=1$ 时,由 $f'(1)=0$,$f''(1)=\lim\limits_{x\to1}f''(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{1-\mathrm{e}^{1-x}}{x-1}=1>0$,知 $f(x)$ 在$x_0=1$ 处取得极小值.

综上可知,$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极小值.

(18) 解 本题是隐函数求最值问题.

椭圆方程 $x^2-xy+y^2=3$,两边同时对 x 求导,得 $2x-y-xy'+2yy'=0$,解得$y'=\frac{2x-y}{x-2y}$.

令 $y'=0$,有 $y=2x$. $x=2y$ 是 y' 不存在的点.

将 $y=2x$ 代入原方程,得 $x=1,y=2$ 或 $x=-1,y=-2$;

将 $x=2y$ 代入原方程,得 $x=2,y=1$ 或 $x=-2,y=-1$.

比较可得 $x=1$ 和 $x=-1$ 分别是 $y=y(x)$ 的最大值点和最小值点,且椭圆上纵坐标最大的点为 $(1,2)$,最小的点为 $(-1,-2)$.

(19) 解 (Ⅰ) 由 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$,有 $y'=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$,故曲线在点 $P\left(a,\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)$ 处的切线方程为

$$y-\frac{1}{\sqrt{a}}=-\frac{1}{2\sqrt{a^3}}(x-a),$$

则切线与 x 轴和 y 轴的交点如题图所示,分别为 $A(3a,0)$, $B\left(0,\dfrac{3}{2\sqrt{a}}\right)$. 于是三角形 AOB 的面积为

$$S=\frac{1}{2}\cdot 3a\cdot\frac{3}{2\sqrt{a}}=\frac{9}{4}\sqrt{a}.$$

(Ⅱ) 当切点在曲线上且 $a\to+\infty$ 时,有 $\lim\limits_{a\to+\infty}S=\lim\limits_{a\to+\infty}\dfrac{9}{4}\sqrt{a}=+\infty$;

当切点在曲线上且 $a\to0^+$ 时,有 $\lim\limits_{a\to0^+}S=\lim\limits_{a\to0^+}\dfrac{9}{4}\sqrt{a}=0$.

(20) 解 由 $f(x)=\arctan x$,有 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$,故 $(1+x^2)f'(x)=1$.

上式两边同时对 x 求 $(n-1)$ 阶导数,得

$$[(1+x^2)f'(x)]^{(n-1)}=0,$$

利用莱布尼兹公式,令 $u=f'(x),v=1+x^2$,则

$$f^{(n)}(x)(1+x^2)+(n-1)f^{(n-1)}(x)\cdot 2x+\frac{(n-1)(n-2)}{2}f^{(n-2)}(x)\cdot 2=0,$$

将 $x=0$ 代入上式,得

$$f^{(n)}(0)(1+0)+(n-1)f^{(n-1)}(0)\cdot 0+\frac{(n-1)(n-2)}{2}f^{(n-2)}(0)\cdot 2=0,$$

即
$$f^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0).\qquad ①$$

又 $f(0)=0$,由 ① 式得 $f''(0)=0$,故 $f^{(2k)}(0)=0$.

又 $f'(0)=1$,由 ① 式可得

$$f'''(0)=-2!,\ f^{(5)}=-4\cdot3\cdot f'''(0)=4!.$$

故 $f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!\ (k=0,1,2,\cdots)$.

注 也可利用泰勒公式.

由 $f(x)=\arctan x=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^k\cdot\dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}+\cdots$,得

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k,\\ (-1)^k(2k)!, & n=2k+1.\end{cases}$$

(21) 解 (Ⅰ) $f'(x)=a_1\cos x+2a_2\cdot\cos 2x+\cdots+na_n\cos nx$,故

$$f'(0)=a_1+2a_2+\cdots+na_n.$$

证 (Ⅱ) $|f'(0)|=\left|\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=\lim\limits_{x\to0}\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\leqslant\lim\limits_{x\to0}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|=1$,故

$$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant1.$$

(22) 证 只要证明两曲线在交点处导数相等.

设交点为 (x_0,y_0),则 $f(x_0)=f(x_0)\sin x_0$,又 $f(x_0)>0$,故 $\sin x_0=1$,得 $x_0=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$(n 为

整数).

曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0,y_0) 处的切线斜率为 $f'(x_0)$;

曲线 $y=f(x)\sin x$ 在点 (x_0,y_0) 处的切线斜率为

$$[f(x)\sin x]'\Big|_{x=x_0}=f'(x_0)\sin x_0+f(x_0)\cos x_0,$$

由于在 $x_0=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ 处, $\cos x_0=0$, $\sin x_0=1$, 故 $[f(x)\sin x]'\Big|_{x=x_0}=f'(x_0)$.

因此它们在交点处相切.

(23) **解** 令 $f(x)=x^3+2x^2+x$, $g(x)=k$, 当曲线 $y=f(x)$ 与 $g(x)=k$ 有 3 个不同交点时, 确定 k 的值. 对函数 $f(x)$ 求导, 有

$$f'(x)=3x^2+4x+1=(3x+1)(x+1),$$

令 $f'(x)=0$, 解得驻点 $x_1=-1$, $x_2=-\dfrac{1}{3}$. 又

$$f''(x)=6x+4,\ f''(-1)=-2<0,$$

故 $f(-1)=0$ 为极大值. 同理 $f''\left(-\dfrac{1}{3}\right)=2>0$, 故 $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{4}{27}$ 为极小值.

综上可知, 当 $-\dfrac{4}{27}<k<0$ 时, 方程有 3 个不同实根.

(24) **解** 由 $y=\sqrt{x}$, 有 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $y''=\dfrac{-1}{4\sqrt{x^3}}$, 则曲率半径为

$$R=R(x)=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}.$$

抛物线上 $\overset{\frown}{AM}$ 的弧长为 $s=s(x)=\int_1^x\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^x\sqrt{1+\dfrac{1}{4t}}\,\mathrm{d}t$, 故

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(4x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 4}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}=6\sqrt{x},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}s^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\frac{6}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}=\frac{6}{\sqrt{4x+1}}.$$

因此 $3R\dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}s^2}-\left(\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\right)^2=3\cdot\dfrac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\cdot\dfrac{6}{\sqrt{4x+1}}-36x=9$.

(25) **解** $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 处的切线方程为

$$Y=f(x)+f'(x)(X-x).$$

令 $Y=0$, 可得切线在 x 轴上的截距为 $X=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}=u(x)$, 故

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{u(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x-\frac{f(x)}{f'(x)}}=\lim_{x\to0}\frac{xf'(x)}{xf'(x)-f(x)}$$

$$\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)+xf''(x)}{xf''(x)}=1+\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{xf''(x)}$$

$$=1+\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}\cdot\frac{1}{f''(x)}$$

$$=1+\frac{f''(0)}{f''(0)}=1+1=2.$$

(26) 证 (充分性)根据 $f(x)-f(x_0)=(x-x_0)g(x)$,当 $x\neq x_0$ 时,

$$g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

由 $g(x)$ 在 x_0 处连续,有 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$,故 $f'(x_0)=g(x_0)$.

(必要性)设 $f(x)$ 在 x_0 处可导,则有 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.令

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x\neq x_0,\\ f'(x_0), & x=x_0,\end{cases}$$

故 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=g(x_0)$.

综上可知,$g(x)$ 在 x_0 处连续.

(27) 证 令 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{2n+1}\frac{x^k}{k!}$, $F(x)=e^{-x}f(x)$,则

$$F'(x)=(e^{-x}-e^{-x})\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{x^k}{k!}-\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}e^{-x}=-\frac{x^{2n+1}e^{-x}}{(2n+1)!}.$$

当 $x<0$ 时,$F'(x)>0$,故 $F(x)$ 单调增加.又

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=-\infty, F(0)=1>0,$$

所以在 $(-\infty,0)$ 内,$F(x)=0$ 有且仅有一个实根;

当 $x>0$ 时,$F'(x)<0$,故 $F(x)$ 单调减少.又

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=0,\ F(0)=1>0,$$

所以在 $(0,+\infty)$ 内,$F(x)=0$ 没有实根.

综上所述,$F(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有且仅有一个实根,而 $e^{-x}>0$,于是 $f(x)=0$ 与 $F(x)=0$ 有相同实根个数,故 $f(x)=0$ 有且仅有一个实根.

注 方程 $\sum\limits_{k=0}^{2n}\frac{x^k}{k!}=0$ 无实根(n 为正整数).

(28) 解 $y'(x)=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $y''(x)=\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{4t}{3(t^2+1)^3}$.

由 $y'(x)=0$,得 $t=\pm1$,且 $t=1$ 对应点 $(4+k,-2+k)$,$t=-1$ 对应点 $(-4+k,2+k)$.

当 $|t|>1$ 时,$y'(x)>0$,$y=y(x)$ 单调递增.

当 $|t|<1$ 时,$y'(x)<0$,$y=y(x)$ 单调递减.

在点 $(4+k,-2+k)$ 处,$y''(x)=\frac{4\times1}{3\times2^3}=\frac{1}{6}>0$,$y(4+k)=-2+k$ 为 $y(x)$ 的极小值.

在点 $(-4+k,2+k)$ 处,$y''(x)=\frac{4\times(-1)}{3\times2^3}=\frac{-1}{6}<0$,$y(-4+k)=2+k$ 为 $y(x)$ 的极大值.

当 $x\to+\infty$ 时,即 $t\to+\infty$,有 $y(x)\to+\infty$;当 $x\to-\infty$ 时,即 $t\to-\infty$,有 $y(x)\to-\infty$.故

① 当 $2+k>0$ 且 $-2+k<0$,即 $-2<k<2$ 时,$y(x)=0$ 有三个不同实根.

② 当 $2+k=0$ 或 $-2+k=0$,即 $k=-2$ 或 $k=2$ 时,$y(x)=0$ 有两个不同实根.

③ 当 $2+k<0$ 或 $-2+k>0$,即 $k<-2$ 或 $k>2$ 时,$y(x)=0$ 有一个实根.

(29) 证 由已知,不妨设 $x_1<x_2$,令 $x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$,则 $x_1<x<x_2$.

由拉格朗日中值定理,有

$$f(x)-f(x_1)=f'(\xi_1)(x-x_1)=f'(\xi_1)(1-\lambda)(x_2-x_1)\quad(x_1<\xi_1<x),\qquad①$$

$$f(x_2)-f(x)=f'(\xi_2)(x_2-x)=f'(\xi_2)\lambda(x_2-x_1)\quad(x<\xi_2<x_2).\qquad②$$

①$\times\lambda-$②$\times(1-\lambda)$,得

$$f(x)-\lambda f(x_1)-(1-\lambda)f(x_2)=\lambda(1-\lambda)(x_2-x_1)[f'(\xi_1)-f'(\xi_2)].$$

由 $f'(x)$ 严格单调增加，知 $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$，即 $f(x)-\lambda f(x_1)-(1-\lambda)f(x_2)<0$，故

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

注 ① 对任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$，且 $x_1\neq x_2$，$0<\lambda<1$，有

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),$$

是 $f(x)$ 在 (a,b) 内为凹函数的定义.

② 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，且 $f''(x)>0$，对任意 $x_1,x_2\in(a,b)$，$x_1\neq x_2$，则

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

可用泰勒公式证明：

令 $x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$，$f(u)$ 在点 x 处展开，有

$$f(u)=f(x)+f'(x)(u-x)+\frac{f''(\xi)}{2!}(u-x)^2\quad(\xi\text{ 介于 }u\text{ 与 }x\text{ 之间}).$$

将 $u=x_1$，$u=x_2$ 代入上式，得

$$\begin{aligned}f(x_1)&=f(x)+f'(x)(x_1-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1-x)^2\\&=f(x)+f'(x)(1-\lambda)(x_1-x_2)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1-x)^2,\qquad ①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x_2)&=f(x)+f'(x)(x_2-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_2-x)^2\\&=f(x)+f'(x)\lambda(x_2-x_1)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_2-x)^2,\qquad ②\end{aligned}$$

其中 ξ_1 介于 x_1 与 x 之间，ξ_2 介于 x_2 与 x 之间，则 ①$\times\lambda+$②$\times(1-\lambda)$，得

$$\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)=f(x)+\lambda\frac{f''(\xi_1)}{2}(x_1-x)^2+(1-\lambda)\frac{f''(\xi_2)}{2}(x_2-x)^2.$$

由 $f''(x)>0$，知

$$\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)>f(x)=f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2].$$

(30) **证** 将 $|\boldsymbol{A}|$ 的第二行 $\times(-1)$ 加到第三行，再将第一行 $\times(-1)$ 加到第二行，按 $|\boldsymbol{A}|$ 的第一列展开，有

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}|&=\begin{vmatrix}1&x_1&f(x_1)\\1&x_2&f(x_2)\\1&x_3&f(x_3)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&x_1&f(x_1)\\0&x_2-x_1&f(x_2)-f(x_1)\\0&x_3-x_2&f(x_3)-f(x_2)\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}x_2-x_1&f(x_2)-f(x_1)\\x_3-x_2&f(x_3)-f(x_2)\end{vmatrix}\\&=(x_2-x_1)[f(x_3)-f(x_2)]-(x_3-x_2)[f(x_2)-f(x_1)],\end{aligned}$$

故 $|\boldsymbol{A}|>0$ 等价于 $\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}>\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

先证必要性. 由拉格朗日中值定理，知存在 $\xi_1\in(x_1,x_2)$，$\xi_2\in(x_2,x_3)$，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},\ f'(\xi_2)=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

由 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单调递增以及 $\xi_1<\xi_2$，可得 $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$，即

$$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}>\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

再证充分性. 任取 $x_0,x_1,x_2\in(a,b)$，满足 $x_1<x_0<x_2$. 取 s,t 满足 $x_1<s<x_0<t<x_2$. 由已知，有

$$\frac{f(s)-f(x_1)}{s-x_1}<\frac{f(x_0)-f(s)}{x_0-s},\quad \frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}<\frac{f(x_2)-f(t)}{x_2-t},$$

则

$$f'(x_1)=\lim_{s\to x_1^+}\frac{f(s)-f(x_1)}{s-x_1}\leqslant\lim_{s\to x_1^+}\frac{f(x_0)-f(s)}{x_0-s}=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}, \quad ①$$

$$f'(x_2)=\lim_{t\to x_2^-}\frac{f(x_2)-f(t)}{x_2-t}\geqslant\lim_{t\to x_2^-}\frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}=\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}. \quad ②$$

由①、②式以及$\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}<\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$,知 $f'(x_1)<f'(x_2)$.

由 x_1,x_2 的任意性,知 $f'(x)$ 在(a,b) 内严格单调递增.

(31) **证** (Ⅰ)由已知条件及拉格朗日中值定理,得

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-x_0|&=|f(x_n)-f(x_0)|=|f'(\xi)(x_n-x_0)|\\&=|f'(\xi)||x_n-x_0|\\&\leqslant k|x_n-x_0|\quad(\xi\text{ 介于 }x_0\text{ 与 }x_n\text{ 之间}),\end{aligned}$$

故 $|x_{n+1}-x_0|\leqslant k|x_n-x_0|\leqslant k^2|x_{n-1}-x_0|\leqslant\cdots\leqslant k^n|x_1-x_0|$.

由 $0\leqslant k<1$,知$\lim\limits_{n\to\infty}k^n=0$,故$\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_0|=0$,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

解 (Ⅱ)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_0}{(x_n-x_0)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{(x_n-x_0)^2}$. 由泰勒公式,有

$$\begin{aligned}f(x_n)&=f(x_0)+f'(x_0)(x_n-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x_n-x_0)^2+o[(x_n-x_0)^2]\\&=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x_n-x_0)^2+o[(x_n-x_0)^2],\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_0}{(x_n-x_0)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}f''(x_0)(x_n-x_0)^2+o[(x_n-x_0)^2]}{(x_n-x_0)^2}=\frac{1}{2}f''(x_0).$$

(32) **证** (Ⅰ)由拉格朗日中值定理,知存在一点 $\xi_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$,使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)}{\frac{1}{2}-0}=2f\left(\frac{1}{2}\right); \quad ①$$

存在一点 $\xi_2\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,使得

$$f'(\xi_2)=\frac{f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}}=2\left[1-f\left(\frac{1}{2}\right)\right]. \quad ②$$

①+②,得

$$f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=2.$$

(Ⅱ)所证不等式变形为

$$f'(\xi)=\frac{f(\eta)f'(\eta)}{\eta}.$$

由拉格朗日中值定理,知存在一点 $\xi\in(0,1)$,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1. \quad ③$$

令 $F(x)=f^2(x)$,$G(x)=x^2$,则 $F(0)=0$,$F(1)=1$,$G(0)=0$,$G(1)=1$.

由柯西中值定理,知存在一点 $\eta \in (0,1)$,使得

$$\frac{F'(\eta)}{G'(\eta)}=\frac{F(1)-F(0)}{G(1)-G(0)}=1,$$

即

$$\frac{f(\eta)f'(\eta)}{\eta}=1. \tag{④}$$

由 ③ 式与 ④ 式,知 $f'(\xi)=\dfrac{f(\eta)f'(\eta)}{\eta}$,即 $\eta f'(\xi)=f(\eta)f'(\eta)$.

拓展题

解答题

(1) 解 由已知,点 $(x,f(x))$ 处的切线方程为

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x),$$

令 $Y=0$,可得切线在 x 轴上的截距为 $F(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}\ (x>0)$.

由 $f''(x)>0$,知 $f'(x)>f'(0)=0$,

$$\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to0^+}\left[x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right]=-\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{f'(x)}=0,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}F'(x)&=\lim_{x\to0^+}\left[1-\frac{f'^2(x)-f(x)f''(x)}{f'^2(x)}\right]=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}\\&=f''(0)\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{f'^2(x)}=f''(0)\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)}{2f'(x)f''(x)}=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{x\to0^+}[F(x)+F'(x)]=0+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 证 (Ⅰ) 当 $f(x)\equiv0$ 时,显然原不等式恒成立. 不妨设 $f(x)\not\equiv0$,且 $|f(x_0)|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$,则 x_0 是 $f(x)$ 的极值点,从而 $f'(x_0)=0$,故利用泰勒公式,可知存在 ξ,使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

成立. 将 $x=a,x=b$ 代入上式,可得

$$0=f(a)=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-x_0)^2, \tag{①}$$

$$0=f(b)=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(b-x_0)^2, \tag{②}$$

其中 $\xi_1\in(a,x_0)$,$\xi_2\in(x_0,b)$.

若 $x_0\in\left(a,\dfrac{a+b}{2}\right]$,则由 ① 式可得

$$|f(x_0)|=\frac{1}{2}|f''(\xi_1)|(a-x_0)^2\leqslant\frac{1}{2}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|\cdot\frac{(b-a)^2}{4}=\frac{1}{8}M(b-a)^2.$$

若 $x_0\in\left(\dfrac{a+b}{2},b\right)$,则由 ② 式可得

$$|f(x_0)|=\frac{1}{2}|f''(\xi_2)|(b-x_0)^2\leqslant\frac{1}{2}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|\cdot\frac{(b-a)^2}{4}=\frac{1}{8}M(b-a)^2.$$

综上所述,原不等式得证.

(Ⅱ) 不妨设 $|f'(x_1)|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|$,则由泰勒公式,可知

$$0=f(a)=f(x_1)+f'(x_1)(a-x_1)+\frac{1}{2}f''(\eta_1)(a-x_1)^2, \tag{③}$$

$$0=f(b)=f(x_1)+f'(x_1)(b-x_1)+\frac{1}{2}f''(\eta_2)(b-x_1)^2, \qquad ④$$

其中 $\eta_1\in(a,x_1)$，$\eta_2\in(x_1,b)$. 由 ③ − ④，得

$$\begin{aligned}|f'(x_1)(b-a)|&=\frac{1}{2}|f''(\eta_2)(b-x_1)^2-f''(\eta_1)(a-x_1)^2|\\&\leqslant\frac{1}{2}|f''(\eta_2)(b-x_1)^2|+\frac{1}{2}|f''(\eta_1)(a-x_1)^2|\\&\leqslant\frac{1}{2}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|\cdot[(b-x_1)^2+(a-x_1)^2],\end{aligned}$$

又 $(a-x_1)^2+(b-x_1)^2$ 在 $a\leqslant x_1\leqslant b$ 上的最大值为 $(b-a)^2$，故 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}M(b-a)$.

(3) 证 由 $f'(x)>0$，知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调递增，从而 $f(b)>f(a)$. 对 $f(x)$ 在区间 $[f(a),f(b)]$ 与 $[a,b]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，有

$$f[f(b)]-f[f(a)]=f'(\eta_1)[f(b)-f(a)],\ \eta_1\in(f(a),f(b)).$$
$$f(b)-f(a)=f'(\eta_2)(b-a),\ \eta_2\in(a,b)$$

故

$$f[f(b)]-f[f(a)]=f'(\eta_1)f'(\eta_2)(b-a). \qquad ①$$

若 $f'(\eta_1)=f'(\eta_2)$，则取 $\xi=\eta_1$，则有 $f[(f(b)]-f[f(a)]=[f'(\xi)]^2(b-a)$.

若 $f'(\eta_1)\neq f'(\eta_2)$，不妨设 $f'(\eta_1)<f'(\eta_2)$，又 $f'(\eta_1)$，$f'(\eta_2)$ 均大于零，故

$$f'(\eta_1)<\sqrt{f'(\eta_1)f'(\eta_2)}<f'(\eta_2).$$

对 $f'(x)$ 应用连续函数的介值定理，知存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\sqrt{f'(\eta_1)f'(\eta_2)}$，代入 ① 式，得

$$f[f(b)]-f[f(a)]=[f'(\xi)]^2(b-a).$$

(4) 证 依题设，知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续的导数，且 $F(a)=F(b)=0$，则

$$|F''(x)|=\left|\begin{vmatrix}1&1&0\\a&b&0\\f(a)&f(b)&f''(x)\end{vmatrix}\right|=|f''(x)(b-a)|\geqslant(b-a).$$

由已知 $|F(x)|$ 在 $x_0\in(a,b)$ 处取得最大值，故 $F(x)$ 在 x_0 处取得极值，从而 $F'(x_0)=0$.

由泰勒公式，有

$$F(a)=F(x_0)+\frac{F''(\xi_1)}{2!}(a-x_0)^2, \qquad ①$$

$$F(b)=F(x_0)+\frac{F''(\xi_2)}{2!}(b-x_0)^2, \qquad ②$$

其中 ξ_1 介于 a 与 x_0 之间，ξ_2 介于 x_0 与 b 之间.

若 $a<x_0\leqslant\frac{a+b}{2}$，则由 ② 式及 $F(b)=0$，知

$$|F(x_0)|=\frac{|F''(\xi_2)|}{2}(b-x_0)^2\geqslant\frac{b-a}{2}\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^3}{8};$$

若 $\frac{a+b}{2}<x_0<b$，则由 ① 式及 $F(a)=0$，知

$$|F(x_0)|=\frac{|F''(\xi_1)|}{2}(a-x_0)^2\geqslant\frac{b-a}{2}\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^3}{8}.$$

综上所述，$|F(x_0)|\geqslant\frac{(b-a)^3}{8}$.

注 ① 行列式函数求导. 设

$$A(x)=\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{vmatrix},$$

则

$$A'(x)=\begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & a'_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & a'_{23}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a'_{31}(x) & a'_{32}(x) & a'_{33}(x) \end{vmatrix}.$$

求 $A'(x)$ 也可以按列求导计算.

② 此题为 3 阶行列式函数，也可以先将 $F(x)$ 计算出来：

$$F(x)=[f(x)-f(a)](b-a)-[f(b)-f(a)](x-a),$$

再求出 $F''(x)=(b-a)f''(x)$.

(5) 证 （Ⅰ）由 $f(x)\not\equiv 0, f(0)=f(1)=0$，知 $M>0$，且 $|f(x)|$ 在 $(0,1)$ 内取得最大值 M. 不妨设 $|f(x_0)|=M, x_0\in(0,1)$.

若 $x_0\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$，由拉格朗日中值定理，知存在一点 $\xi_1\in(0,x_0)\subset(0,1)$，使得

$$|f'(\xi_1)|=\left|\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}\right|=\frac{M}{x_0}\geqslant 2M;$$

若 $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，则由拉格朗日中值定理，知存在一点 $\xi_2\in(x_0,1)\subset(0,1)$，使得

$$|f'(\xi_2)|=\left|\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}\right|=\frac{M}{1-x_0}>2M.$$

综上所述，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $|f'(\xi)|\geqslant 2M$.

（Ⅱ）由 $f(0)=f(1)=0$，根据罗尔定理，知存在一点 $x_1\in(0,1)$，使得 $f'(x_1)=0$.

对 $f'(x)$ 在 $[0,x_1]$ 与 $[x_1,1]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，有

$$|f'(x_1)-f'(0)|=|f''(\xi_1)(x_1-0)|\geqslant Mx_1\quad(0<\xi_1<x_1),$$
$$|f'(1)-f'(x_1)|=|f''(\xi_2)(1-x_1)|\geqslant M(1-x_1)\quad(x_1<\xi_2<1),$$

即 $|f'(0)|\geqslant Mx_1$，$|f'(1)|\geqslant M(1-x_1)$，故

$$|f'(0)|+|f'(1)|\geqslant M(x_1+1-x_1)=M.$$

第三章　一元函数积分学及其应用

基础题

一、选择题

(1)C.

解 已知等式$\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$,两边同时对$x$求导,得

$$xf(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

故$\frac{1}{f(x)}=x\sqrt{1-x^2}$,所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}(1-x^2)=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

故选项C正确.

(2)A.

解 令$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,当$f(t)$是连续的奇函数时,$F(x)$是偶函数.故选项A正确.

(3)D.

解 由原函数的定义,知$F'(t)=\sin t^2$, $\mathrm{d}[F(t)]=F'(t)\mathrm{d}t=\sin t^2\mathrm{d}t$,令$t=x^2$,得

$$\mathrm{d}[F(x^2)]=\sin x^4\mathrm{d}(x^2)=2x\sin x^4\mathrm{d}x.$$

故选项D正确.

(4)C.

解 $x=\pi$是$f(x)$的跳跃间断点,故$f(x)$可积,则$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$在$x=\pi$处连续但不可导.故选项C正确.

注 ① 此题利用了结论:设$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,x\in[a,b]$,则

(i)$f(x)$在$[a,b]$上可积$\Rightarrow F(x)$在$[a,b]$上连续;

(ii)$f(x)$在$[a,b]$上连续$\Rightarrow F(x)$在$[a,b]$上可导.

② 若$f(x)$在$[a,b]$上只有有限个第一类间断点,则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

③ 若$f(x)$在$[a,b]$上存在第一类间断点,则$f(x)$没有原函数.

(5)D.

解 当$x\leqslant 0$时,$F(x)=\int(x^2+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+x+C_1$;

当$x>0$时,$F(x)=\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C_2$.

由原函数$F(x)$的连续性,知

$$\lim_{x\to0^-}F(x)=C_1,\ \lim_{x\to0^+}F(x)=C_2,$$

故$C_1=C_2$.令$C_1=C_2=C$,得

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+x+C, & x\leqslant 0,\\ \sin x+C, & x>0.\end{cases}$$

取 $C=0$，知选项 D 正确.

注 作为选择题，可以利用 $F(x)$ 的连续性，检查选项中 $F(x)$ 在 $x=0$ 的左、右极限，当 $\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)$ 时，可得正确答案.

(6)C.

解 记 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$，则 $a_n=\int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$. 故

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}+\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}\xlongequal{\text{记}}I_1+I_2.$$

$$I_1=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}\xlongequal[x=t^2+1]{\sqrt{x-1}=t}\int_0^1\frac{2t}{t(t^2+1)}\mathrm{d}t=2\arctan t\Big|_0^1=\frac{\pi}{2},$$

$$I_2=\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}\xlongequal[x=t^2+1]{\sqrt{x-1}=t}\int_1^{+\infty}\frac{2t}{t(t^2+1)}\mathrm{d}t=2\arctan t\Big|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{2}.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=I_1+I_2=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$. 选项 C 正确.

(7)B.

解 由已知条件，画出示意图，如图 3-1 所示.

由 $f'(x)<0$，知当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)>f(1)$，故

$$N=(1-0)f(1)<M=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

由 $f''(x)>0$，知

$$P=\frac{1}{2}(1-0)[f(0)+f(1)]>\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=M.$$

故选项 B 正确.

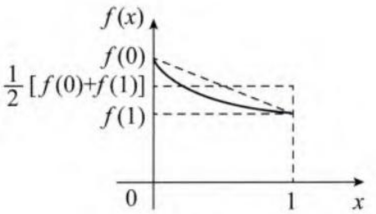


图 3-1

(8)A.

解 $$I_1=\int_0^{\pi}\frac{x\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^{\cos^2 x}}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos^2 t}{1+\mathrm{e}^{\sin^2 t}}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{1+\mathrm{e}^{\sin^2 t}}\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{t\cos^2 t}{1+\mathrm{e}^{\sin^2 t}}\mathrm{d}t$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{1+\mathrm{e}^{\sin^2 t}}\mathrm{d}t\ \text{（利用被积函数的奇偶性）},$$

$$I_2=\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^{\cos^2 x}}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{1+\mathrm{e}^{\sin^2 t}}\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{1+\mathrm{e}^{\sin^2 t}}\mathrm{d}t,$$

即 $I_1=\pi I_3$，$I_2=2I_3$，$I_3>0$，故 $I_1>I_2>I_3$. 选项 A 正确.

(9)C.

解 $$F(x)=\int_0^1|f(x)-f(t)|\mathrm{d}t=\int_0^x[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t+\int_x^1[f(t)-f(x)]\mathrm{d}t$$

$$=xf(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t-f(x)(1-x),$$

$$F'(x)=f(x)+xf'(x)-f(x)-f(x)+f(x)-(1-x)f'(x)=(2x-1)f'(x).$$

令 $F'(x)=0$，因为 $f'(x)>0$，所以 $x=\frac{1}{2}$ 为唯一驻点，

当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$F'(x)<0$；当 $\frac{1}{2}<x<1$ 时，$F'(x)>0$，故 $x=\frac{1}{2}$ 是 $F(x)$ 的极小值点，也是

$F(x)$ 的最小值点. 故 $F(x) \geqslant F\left(\frac{1}{2}\right)$. 选项 C 正确.

(10)A.

解 当 $x \to 0$ 时, $\sin x - ax \to 0$, 故 $\int_b^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t \to 0$, 于是必有 $b = 0$.

若 $a \neq 1$, 则当 $x \to 0$ 时, $\sin x - ax$ 与 x 是同阶无穷小, $\int_b^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$ 是关于 x 的高阶无穷小, 故必有 $c = 0$, 与题设矛盾, 所以 $a = 1$. 由洛必达法则, 有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t}{\sin x - x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{-\frac{1}{2}x^2} = -2,$$

即 $c = -2$, 故选项 A 正确.

(11)C.

解
$$y = \int_0^t \sin(t-u)\mathrm{d}u \xlongequal{t-u=s} \int_0^t \sin s\,\mathrm{d}s,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{\sin t}{2\mathrm{e}^{-t^2}} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t^2}\sin t,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t^2}\sin t\right)_t'}{x_t'} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t^2}(2t\sin t + \cos t).$$

由 $x = \int_0^t 2\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = 0$ 及 $2\mathrm{e}^{-u^2} > 0$, 知 $t = 0, y = 0$, 即 $f(0) = 0$, 故

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0} = 0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0} = \frac{1}{4}.$$

则由泰勒公式, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + o(x^2) \\ &= 0 + 0 + \frac{\frac{1}{4}}{2}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

故当 $x \to 0$ 时, $f(x)$ 与 x^2 是同阶但不等价的无穷小. 选项 C 正确.

(12)C.

解 当 $t = 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x = \lim_{\xi\to 0^+}\int_\xi^1 \ln x\,\mathrm{d}x = \lim_{\xi\to 0^+}(x\ln x - x)\Big|_\xi^1 \\ &= -1 - \lim_{\xi\to 0^+}(\xi\ln\xi - \xi) = -1 - \lim_{\xi\to 0^+}\frac{\ln\xi}{\frac{1}{\xi}} = -1; \end{aligned}$$

当 $t \neq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^1 \ln\sqrt{x^2+t^2}\,\mathrm{d}x = x\ln\sqrt{x^2+t^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+t^2}\mathrm{d}x \\ &= \ln\sqrt{1+t^2} - \int_0^1 \frac{x^2+t^2-t^2}{x^2+t^2}\mathrm{d}x \\ &= \ln\sqrt{1+t^2} - 1 + \int_0^1 \frac{t^2}{x^2+t^2}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$=\ln\sqrt{1+t^2}-1+t\arctan\frac{1}{t}.$$

由$\lim\limits_{t\to0}f(t)=-1=f(0)$,知 $f(t)$ 在 $t=0$ 处连续.

又
$$f'_-(0)=\lim_{t\to0^-}\frac{f(t)-f(0)}{t}=-\frac{\pi}{2},\ f'_+(0)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\frac{\pi}{2}.$$

故 $f(t)$ 在 $t=0$ 处不可导. 选项 C 正确.

(13)A.

解 对于选项 A:利用极限审敛法. 由于

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{5}{2}}\frac{1}{x^2\sqrt{1+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=1\left(\lambda=\frac{5}{2}>1,0<l=1<+\infty\right),$$

故积分收敛.

对于选项 B:$x=0$ 是$\frac{1}{\ln(1+x)}$ 的瑕点. 由

$$\lim_{x\to0^+}(x-0)\frac{1}{\ln(1+x)}=1\ (\lambda=1,0<l<1<+\infty),$$

知积分发散.

对于选项 C:$x=0$ 是$\frac{1}{\sin x}$ 的瑕点. 由

$$\lim_{x\to0^+}(x-0)\frac{1}{\sin x}=1\ (\lambda=1,0<l=1<+\infty),$$

知积分发散.

对于选项 D:$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x+\int_{1}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$,用定义法,知

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^1\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\int_a^1\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}\cdot2\lim_{a\to-\infty}\sqrt{1+x^2}\Big|_a^1=-\infty,$$

故积分发散. 综上可知,选项 A 正确.

注 ① 判别反常积分敛散性有两种方法:

(ⅰ) 定义法,当积分计算较容易时,选择定义法判别.

(ⅱ) 反常积分的审敛法:

(a) 设 $I=\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$,$f(x)$ 非负连续,则

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\lambda}f(x)=l,\ \begin{cases}0\leqslant l<+\infty\text{ 且 }\lambda>1,\text{则收敛};\\0<l\leqslant+\infty\text{ 且 }\lambda\leqslant1,\text{则发散}.\end{cases}$$

(b) 设 $I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,$x=a$ 是 $f(x)$ 的瑕点,$f(x)$ 非负连续,则

$$\lim_{x\to a^+}(x-a)^{\lambda}f(x)=l,\ \begin{cases}0\leqslant l<+\infty\text{ 且 }0<\lambda<1,\text{则收敛};\\0<l\leqslant+\infty\text{ 且 }\lambda\geqslant1,\text{则发散}.\end{cases}$$

② 两个常用结果:

(ⅰ)$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$,$\begin{cases}p>1,\text{收敛};\\p\leqslant1,\text{发散}.\end{cases}$　(ⅱ)$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}$,$\begin{cases}p<1,\text{收敛};\\p\geqslant1,\text{发散}.\end{cases}$

(14)B.

解 依题设,有

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{2x^2+ax+b}{2x^2+bx}-1\right)\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{(a-b)x+b}{2x^2+bx}\mathrm{d}x.$$

当 $a-b\neq 0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\dfrac{(a-b)x+b}{2x^2+bx}=\dfrac{a-b}{2}\neq 0$，

由比较判别法，知原反常积分发散，而已知积分收敛，故 $a-b=0$，于是有

$$1=\int_1^{+\infty}\frac{b}{2x^2+bx}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{2x+b}\right)\mathrm{d}x=\ln\frac{x}{2x+b}\bigg|_1^{+\infty}=\ln\frac{2+b}{2}.$$

故 $a=b=2(\mathrm{e}-1)$. 选项 B 正确.

二、填空题

(1) $\dfrac{1}{\sin x\cos x}$.

解 由已知，$F'(x)=f(x)$，故 $2F(x)F'(x)=\dfrac{2\ln(\tan x)}{\sin x\cos x}$，两边同时积分，得

$$\int 2F(x)F'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2\ln(\tan x)}{\sin x\cos x}\mathrm{d}x,$$

故

$$F^2(x)=\int\frac{2\ln(\tan x)}{\sin x\cos x}\mathrm{d}x=[\ln(\tan x)]^2+C.$$

将 $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ 代入上式，得 $C=0$，故 $F(x)=\sqrt{[\ln(\tan x)]^2}=\ln(\tan x)$，所以

$$f(x)=F'(x)=[\ln(\tan x)]'=\frac{1}{\sin x\cos x}.$$

(2) $\dfrac{5}{2}$.

解 由 $f(x+4)=f(x)$，知 $f(9)=f(1)$，而

$$f'(x)=1+|x|=\begin{cases}1-x, & -2<x<0,\\ 1+x, & 0\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$$

积分得

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2}+x+C_1, & -2<x<0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{x^2}{2}+x+C_2, & 0<x<2.\end{cases}$$

因 $f(x)$ 可导，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，可得 $C_1=C_2=1$，故 $f(9)=f(1)=\dfrac{5}{2}$.

(3) $\sin x^2$.

解 因为

$$\int_0^x\sin(x-t)^2\mathrm{d}t\xlongequal{x-t=u}-\int_x^0\sin u^2\mathrm{d}u=\int_0^x\sin u^2\mathrm{d}u,$$

故 $f'(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^x\sin u^2\mathrm{d}u=\sin x^2$.

(4) $xf(x^2)$.

解 依题设，有

$$\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_0^x f(x^2-t^2)\mathrm{d}(x^2-t^2)$$
$$\xlongequal{x^2-t^2=u}-\frac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u,$$

故 $F'(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u\right]=xf(x^2)$.

(5) $\frac{1}{4}$.

解 利用第(4)题解,有

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x^2)}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{4x^2}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2-0}=\frac{1}{4}f'(0)=\frac{1}{4}.$$

注 错误做法:$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{4x^2}\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2xf'(x^2)}{8x}=\frac{1}{4}$.

由于没有 $f'(x)$ 连续的条件,故$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 未必存在.

(6)$3\ln 2-1$.

解 由$\int_x^{x+f(x)}g(t-x)\mathrm{d}t\xlongequal{t-x=u}\int_0^{f(x)}g(u)\mathrm{d}u$,得

$$\int_0^{f(x)}g(u)\mathrm{d}u=x^2\ln(1+x).$$

上式两边同时对 x 求导,得 $g[f(x)]f'(x)=2x\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x}$,即

$$xf'(x)=2x\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x}.$$

当 $x\neq 0$ 时,$f'(x)=2\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}$,故

$$f(x)=\int 2\ln(1+x)\mathrm{d}x+\int\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x$$
$$=2x\ln(1+x)-x+\ln(1+x)+C.$$

由 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$,知 $C=0$. 故 $f(1)=3\ln 2-1$.

(7) $\frac{5}{\mathrm{e}}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t}{\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\frac{\sin 5x}{5x}}{\cos x\cdot(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}}=\frac{5}{\mathrm{e}}.$$

(8) $-\frac{1}{8}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^1 t\ln t\,\mathrm{d}t}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\int_1^{\cos x}t\ln t\,\mathrm{d}t}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x\cdot\ln(\cos x)\cdot(-\sin x)}{4x^3}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x\cdot\cos x}=-\frac{1}{8}.$$

(9) $\frac{\pi}{6}$.

解 依题设,有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t}{\frac{3}{2}x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\arctan(1+x^2)}{3x}=\frac{\pi}{6}.$$

(10) $\frac{2}{\pi}$.

解 $|\sin t|$ 以 π 为周期,它在每个周期上的积分相等,且 $\int_0^{\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=2$.

故当 $n\pi\leqslant x\leqslant(n+1)\pi$ 时,有

$$2n=\int_0^{n\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{x}|\sin t|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{(n+1)\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t\leqslant 2(n+1),$$

从而

$$\frac{2n}{(n+1)\pi}\leqslant\frac{\int_0^x|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x}\leqslant\frac{2(n+1)}{n\pi}.$$

令上式 $n\to\infty$,有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x}=\frac{2}{\pi}.$$

(11) $\frac{(\sqrt{3}+1)\pi}{12}$.

解 依题设,有

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sin t}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{12},$$

故平均值为 $\dfrac{\frac{\pi}{12}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)\pi}{12}$.

(12) $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{a^2}-1)$.

解 由 $f(x)=\int_0^{a-x}\mathrm{e}^{t(2a-t)}\mathrm{d}t\,(a>0)$,知当 $x\in[0,a]$ 时,

$$f(x)\geqslant 0,\ f(a)=0,\ f(0)>0.$$

故所求面积为

$$\begin{aligned}S&=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a\left[\int_0^{a-x}\mathrm{e}^{t(2a-t)}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\\&=x\int_0^{a-x}\mathrm{e}^{t(2a-t)}\mathrm{d}t\,\Big|_0^a-\int_0^a x\left[\int_0^{a-x}\mathrm{e}^{t(2a-t)}\mathrm{d}t\right]'\mathrm{d}x\\&=\int_0^a x\,\mathrm{e}^{a^2-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^a\mathrm{e}^{a^2-x^2}\mathrm{d}(a^2-x^2)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{a^2-x^2}\Big|_0^a=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{a^2}-1).\end{aligned}$$

(13) 1.

解 依题设,有

$$V(\xi)=\pi\int_0^{\xi}y^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\xi}\frac{x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)\Big|_0^{\xi}=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{1+\xi^2}\right).$$

又 $$\lim_{\xi\to+\infty}V(\xi)=\frac{\pi}{2},\ V(a)=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{1+a^2}\right),$$

由 $V(a)=\frac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)$,得 $\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{1+a^2}\right)=\frac{\pi}{4}$,解得 $a=\pm1$,又 $a>0$,故 $a=1$.

(14) $\dfrac{3\pi a}{2}$.

解 $$s=\int_0^{3\pi}\sqrt{r^2+r'^2}\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^6\frac{\theta}{3}+a^2\sin^4\frac{\theta}{3}\cos^2\frac{\theta}{3}}\,\mathrm{d}\theta$$
$$=a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\theta}{3}\,\mathrm{d}\theta\xlongequal{t=\frac{\theta}{3}}3a\int_0^{\pi}\sin^2t\,\mathrm{d}t=\frac{3\pi a}{2}.$$

(15) 4.

解 函数 $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,\mathrm{d}t$ 的定义域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，全长
$$s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=4.$$

(16) $\dfrac{3}{2}$.

解 如图 3-2 所示，所围平面图形的面积为
$$S=\int_0^1[(\mathrm{e}+1)-y-\mathrm{e}^y]\mathrm{d}y=\frac{3}{2},$$
或 $$S=\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\,\mathrm{d}x+\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}+1}(\mathrm{e}+1-x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}.$$

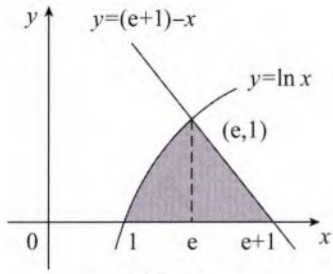


图 3-2

(17) $\dfrac{3}{2}\pi^2+4\pi$.

解 如图 3-3 所示，所得旋转体的体积为
$$V=\int_0^{\pi}\pi(\sin x+1)^2\mathrm{d}x$$
$$=\pi\int_0^{\pi}\left(1+2\sin x+\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\pi\left(\frac{3}{2}x-2\cos x-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi}$$
$$=\frac{3}{2}\pi^2+4\pi.$$

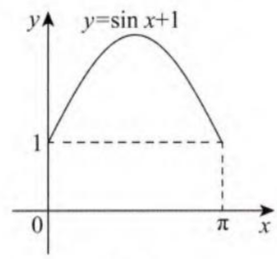


图 3-3

(18) $\dfrac{4}{15}$.

解 依题设，有
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{n-x}{n+x}\right)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to0}\left[\left(1-\frac{2x}{n+x}\right)^{\frac{-(n+x)}{2x}}\right]^{\frac{-4}{n+x}}=\mathrm{e}^{-\frac{4}{n}},$$
$$\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-4x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}x\mathrm{e}^{-4x}\Big|_{\frac{1}{n}}^{+\infty}+\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-4x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{4n}\mathrm{e}^{-\frac{4}{n}}-\frac{1}{16}\mathrm{e}^{-4x}\Big|_{\frac{1}{n}}^{+\infty}=\frac{1}{4n}\mathrm{e}^{-\frac{4}{n}}+\frac{1}{16}\mathrm{e}^{-\frac{4}{n}},$$
故 $\left(\dfrac{1}{4n}+\dfrac{1}{16}\right)\mathrm{e}^{-\frac{4}{n}}=\mathrm{e}^{-\frac{4}{n}}$，解得 $n=\dfrac{4}{15}$.

(19) $\dfrac{7}{12}$.

解 由细棒的质心坐标公式，得 $\overline{x}=\dfrac{\int_0^1 x\rho(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1\rho(x)\mathrm{d}x}=\dfrac{\int_0^1 x(2x+1)\mathrm{d}x}{\int_0^1(2x+1)\mathrm{d}x}=\dfrac{7}{12}.$

(20) 0.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\frac{n+2k}{3n-2k}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2-0}{n}\ln\frac{1+\frac{2k}{n}}{3-\frac{2k}{n}}=\frac{1}{2}\int_0^2\ln\frac{1+x}{3-x}\mathrm{d}x$

$$\xlongequal{x=1+t}\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\ln\frac{2+t}{2-t}\mathrm{d}t.$$

因 $\ln\frac{2+t}{2-t}$ 为奇函数,故原式 $=0$.

注 $\frac{1}{2}\int_0^2\ln\frac{1+x}{3-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\int_0^2\ln(1+x)\mathrm{d}x-\int_0^2\ln(3-x)\mathrm{d}x\right]$,利用分部积分法分别计算两个积分亦可.

(21) $4;1-5\mathrm{e}^{-2}$.

解 依题设,所求路程为

$$\begin{aligned}s&=\int_0^{+\infty}\sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t\xlongequal{\sqrt{t}=u}\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u}\cdot 2u\mathrm{d}u=-2\int_0^{+\infty}u^2\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-u})\\&=-2\left(u^2\mathrm{e}^{-u}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}2u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u\right)=-4\int_0^{+\infty}u\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-u})\\&=-4\left(u\mathrm{e}^{-u}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u\right)=-4\mathrm{e}^{-u}\Big|_0^{+\infty}=4(\mathrm{m}),\end{aligned}$$

所求平均速度为

$$\begin{aligned}\bar{v}&=\frac{1}{4-0}\int_0^4\sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t\xlongequal{-\sqrt{t}=u}-\frac{1}{2}\int_0^{-2}u^2\mathrm{e}^u\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}u^2\mathrm{d}(\mathrm{e}^u)\\&=\frac{1}{2}\left(u^2\mathrm{e}^u\Big|_{-2}^{0}-2\int_{-2}^{0}u\mathrm{e}^u\mathrm{d}u\right)\\&=\frac{1}{2}\left[-4\mathrm{e}^{-2}-2\int_{-2}^{0}u\mathrm{d}(\mathrm{e}^u)\right]\\&=-2\mathrm{e}^{-2}-\left(u\mathrm{e}^u\Big|_{-2}^{0}-\int_{-2}^{0}\mathrm{e}^u\mathrm{d}u\right)\\&=-2\mathrm{e}^{-2}-2\mathrm{e}^{-2}+\mathrm{e}^u\Big|_{-2}^{0}\\&=1-5\mathrm{e}^{-2}(\mathrm{m/s}).\end{aligned}$$

三、解答题

(1) **解** (Ⅰ) $\int\frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}\mathrm{d}x=\int\frac{6^x\mathrm{d}x}{4^x\left[\left(\frac{9}{4}\right)^x-1\right]}=\int\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x\mathrm{d}x}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2-1}$

$$=\frac{1}{\ln\frac{3}{2}}\int\frac{\mathrm{d}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2-1}=\frac{1}{2\ln\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|+C.$$

注 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$

(Ⅱ) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2(1-x^4)}=\int\frac{x^2}{x^4(1-x^4)}\mathrm{d}x=\int x^2\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{1-x^4}\right)\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x+\int\frac{1+x^2-1}{1-x^4}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}+\int\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}-\int\frac{\mathrm{d}x}{1-x^4}$$

$$= -\frac{1}{x} + \int \frac{dx}{1-x^2} - \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$
$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}$$
$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

(Ⅲ) 利用倒代换，令 $x = \frac{1}{t}$，则

$$\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)} = -\int \frac{t^4}{1+t^2}dt = -\int \frac{t^4-1+1}{1+t^2}dt = -\int (t^2-1)dt - \int \frac{dt}{1+t^2}$$
$$= -\frac{1}{3}t^3 + t - \arctan t + C = -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} - \arctan\frac{1}{x} + C.$$

(Ⅳ) 考虑到 $\frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}$，故

$$\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{\arctan x}{x^2}dx - \int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$$
$$= -\int \arctan x\, d\left(\frac{1}{x}\right) - \int \arctan x\, d(\arctan x)$$
$$= -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{dx}{x(1+x^2)} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2$$
$$= -\frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right) d(x^2) - \frac{1}{2}(\arctan x)^2$$
$$= -\frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + C.$$

(Ⅴ) $$\int \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{\ln(1-x)}{x^2}dx = \ln|x| - \int \ln(1-x)\, d\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= \ln|x| - \frac{\ln(1-x)}{x} - \int \frac{dx}{x(1-x)}$$
$$= \ln|x| - \frac{\ln(1-x)}{x} - \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) dx$$
$$= \left(1 - \frac{1}{x}\right)\ln(1-x) + C.$$

(2) 解 (Ⅰ) 令 $\sqrt{x} = t$，则 $x = t^2$，故

$$\int \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})} = \int \frac{2t\,dt}{t^2(1+t)} = 2\int \frac{dt}{t(1+t)} = 2\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right) dt$$
$$= 2[\ln t - \ln(1+t)] + C$$
$$= 2[\ln\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})] + C = 2\ln\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} + C.$$

(Ⅱ) $$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx = 2\int x\, d(\sqrt{e^x-1}) = 2\left(x\sqrt{e^x-1} - \int \sqrt{e^x-1}\,dx\right)$$
$$= 2x\sqrt{e^x-1} - 2\int \sqrt{e^x-1}\,dx,$$

令 $\sqrt{e^x-1} = t$，则 $x = \ln(1+t^2)$，$dx = \frac{2t}{1+t^2}dt$，故

$$\int \sqrt{e^x-1}\,dx = \int \frac{2t^2}{1+t^2}dt = 2\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt$$

$$=2t-2\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=2t-2\arctan t+C,$$

所以原式 $=2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-4\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C.$

(Ⅲ) 令 $x=\tan t, t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,则 $\mathrm{d}x=\sec^2t\mathrm{d}t$,故

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\tan^3t\cdot\sec^2t}{\sec t}\mathrm{d}t=\int\tan^2t\,\mathrm{d}(\sec t)$$
$$=\int(\sec^2t-1)\mathrm{d}(\sec t)=\frac{1}{3}\sec^3t-\sec t+C.$$

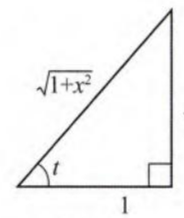


图 3-4

如图 3-4 所示,$\sec t=\sqrt{1+x^2}$,于是原式

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+C.$$

注 此题也可凑微分.

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2\cdot\mathrm{d}(1+x^2)}{2\sqrt{1+x^2}}=\int(x^2+1-1)\mathrm{d}(\sqrt{1+x^2})$$
$$=\int(\sqrt{x^2+1})^2\mathrm{d}(\sqrt{1+x^2})-\int\mathrm{d}(\sqrt{1+x^2})$$
$$=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+C.$$

(Ⅳ) 令 $\tan t=x$,则 $\mathrm{d}x=\sec^2t\mathrm{d}t$,故

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{(2\tan^2t+1)\cos t}=\int\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{2\sin^2t+\cos^2t}$$
$$=\int\frac{\mathrm{d}(\sin t)}{1+\sin^2t}=\arctan(\sin t)+C.$$

又 $\sin t=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,故原式 $=\arctan\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$

(Ⅴ) $\int\frac{\arctan\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x=2\int\frac{\arctan\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}(\sqrt{x-1})$

$$=2\int\frac{\arctan\sqrt{x-1}}{1+(\sqrt{x-1})^2}\mathrm{d}(\sqrt{x-1})$$
$$=2\int\arctan\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}(\arctan\sqrt{x-1})$$
$$=(\arctan\sqrt{x-1})^2+C.$$

(Ⅵ) $\int\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)}{\sqrt{1-x^{\frac{3}{2}}}}=-\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}\left(1-x^{\frac{3}{2}}\right)}{\sqrt{1-x^{\frac{3}{2}}}}$

$$=-\frac{2}{3}\cdot2\int\mathrm{d}\left(\sqrt{1-x^{\frac{3}{2}}}\right)=-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}+C.$$

(3) 解 (Ⅰ) $\int\frac{1}{\sin^2x\cos^4x}\mathrm{d}x=\int\frac{(\sin^2x+\cos^2x)^2}{\sin^2x\cos^4x}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{\sin^2x}{\cos^4x}+\frac{2}{\cos^2x}+\frac{1}{\sin^2x}\right)\mathrm{d}x$

$$=\int\tan^2x\,\mathrm{d}(\tan x)+2\tan x-\cot x$$
$$=\frac{1}{3}\tan^3x+2\tan x-\cot x+C.$$

注 求解三角有理式积分首先考虑利用恒等变形、三角公式,一般的方法是利用万能代换.

此题也可以分子、分母同乘以 $\cos^2 x$,得

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^4 x}dx &= \int \frac{1}{\tan^2 x\cos^6 x}dx = \int \frac{\sec^4 x}{\tan^2 x}d(\tan x)\\ &= \int \frac{\tan^4 x + 2\tan^2 x + 1}{\tan^2 x}d(\tan x) = \frac{1}{3}\tan^3 x + 2\tan x - \cot x + C.\end{aligned}$$

(Ⅱ) 分子、分母同时乘以 $(1-\sin x)$,再凑微分.

$$\int \frac{1}{1+\sin x}dx = \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int \frac{1}{\cos^2 x}d(\cos x) = \tan x - \frac{1}{\cos x} + C.$$

注 利用三角公式.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sin x}dx &= \int \frac{1}{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \int \frac{dx}{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}\\ &= \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}dx = 2\int \frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2} = -\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + C.\end{aligned}$$

(Ⅲ)
$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{(\sin x + \cos x) + (\sin x - \cos x)}{\sin x + \cos x}dx\\ &= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x}\\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sin x + \cos x| + C.\end{aligned}$$

注 这里利用了

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

即 $f(x)$ 可以表示成一个偶函数与一个奇函数之和.

(Ⅳ) 考虑拆项凑微分. 令

$$3\sin x + \cos x = A(\sin x + 2\cos x) + B(\cos x - 2\sin x),$$

比较两边系数,可得 $A = 1, B = -1$,故

$$\begin{aligned}\int \frac{3\sin x + \cos x}{\sin x + 2\cos x}dx &= \int \frac{(\sin x + 2\cos x) - (\cos x - 2\sin x)}{\sin x + 2\cos x}dx\\ &= \int dx - \int \frac{d(\sin x + 2\cos x)}{\sin x + 2\cos x}\\ &= x - \ln|\sin x + 2\cos x| + C.\end{aligned}$$

(Ⅴ) 用万能代换,令 $\tan\frac{x}{2} = t$,则 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$,故

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin 2x + 2\sin x} &= \int \frac{dx}{2\sin x\cos x + 2\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2\cdot\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 2\cdot\frac{2t}{1+t^2}}\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1+t^2}{t}dt = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t}dt + \frac{1}{4}\int t\,dt\\ &= \frac{1}{4}\ln|t| + \frac{1}{8}t^2 + C\\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2} + C.\end{aligned}$$

(Ⅵ)当 $a=0,b\neq 0$ 时,$\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{b^2\cos^2x}=\frac{1}{b^2}\tan x+C$;

当 $a\neq 0,b=0$ 时,$\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2x}=-\frac{1}{a^2}\cot x+C$;

当 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}&=\int\frac{\mathrm{d}x}{b^2\cos^2x\left(1+\frac{a^2}{b^2}\tan^2x\right)}\\&=\int\frac{1}{ab}\frac{1}{1+\left(\frac{a}{b}\tan x\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{a}{b}\tan x\right)\\&=\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right)+C.\end{aligned}$$

(4) 解 (Ⅰ)用分部积分法.

$$\begin{aligned}\int\arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x&=x\arctan\sqrt{x}-\int x\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x\\&=x\arctan\sqrt{x}-\frac{1}{2}\int\frac{x+1-1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x\\&=x\arctan\sqrt{x}-\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x+\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2}\\&=x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+C.\end{aligned}$$

(Ⅱ)$$\begin{aligned}\int\frac{\ln x}{(1-x)^2}\mathrm{d}x&=-\int\ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x-1}\right)=-\frac{\ln x}{x-1}+\int\frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\&=-\frac{\ln x}{x-1}+\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\\&=-\frac{\ln x}{x-1}+\ln|x-1|-\ln|x|+C.\end{aligned}$$

(Ⅲ)$$\begin{aligned}\int\frac{x^2\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x&=-\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x+2}\right)=-x^2\mathrm{e}^x\cdot\frac{1}{x+2}+\int\frac{1}{x+2}\mathrm{d}(x^2\mathrm{e}^x)\\&=-\frac{x^2\mathrm{e}^x}{x+2}+\int\frac{x^2\mathrm{e}^x+2x\mathrm{e}^x}{x+2}\mathrm{d}x=-\frac{x^2\mathrm{e}^x}{x+2}+\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\\&=-\frac{x^2\mathrm{e}^x}{x+2}+x\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=-\frac{x^2\mathrm{e}^x}{x+2}+x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C.\end{aligned}$$

(Ⅳ)令 $\ln x=t$,则 $x=\mathrm{e}^t$, $\mathrm{d}x=\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x&=\int\sin t\cdot\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\int\sin t\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^t)=\mathrm{e}^t\sin t-\int\mathrm{e}^t\cos t\,\mathrm{d}t\\&=\mathrm{e}^t\sin t-\int\cos t\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^t)=\mathrm{e}^t\sin t-\left(\mathrm{e}^t\cos t+\int\mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t\right),\end{aligned}$$

设 $I=\int\mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t$,则 $I=\mathrm{e}^t\sin t-\mathrm{e}^t\cos t-I$,即

$$I=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^t\sin t-\mathrm{e}^t\cos t)+C=\frac{1}{2}x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C.$$

(Ⅴ)令 $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=t$,则 $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$,$\mathrm{d}x=-\frac{4t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$,故

$$\int\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x=-\int\frac{4t^2}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}t=-2\int\frac{t\,\mathrm{d}(t^2)}{(1-t^2)^2}=-2\int t\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{1-t^2}\right)$$

$$=-\frac{2t}{1-t^2}+2\int\frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t=-\frac{2t}{1-t^2}+\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C$$

$$=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right|+C.$$

注 此题也可利用倒代换，令 $x=\frac{1}{t}$，则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$，故

$$\int\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x=-\int\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\mathrm{d}t,$$

再令 $\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}=u$，去根号继续求解即可.

(Ⅵ) $\int e^{2x}(1+\tan x)^2\mathrm{d}x=\int e^{2x}(1+2\tan x+\tan^2x)\mathrm{d}x=\int e^{2x}\sec^2x\,\mathrm{d}x+2\int e^{2x}\tan x\,\mathrm{d}x$

$$=\int e^{2x}\mathrm{d}(\tan x)+2\int e^{2x}\tan x\,\mathrm{d}x$$

$$=e^{2x}\tan x-2\int e^{2x}\tan x\,\mathrm{d}x+2\int e^{2x}\tan x\,\mathrm{d}x$$

$$=e^{2x}\tan x+C.$$

注 此题通过分部积分法消去 $2\int e^{2x}\tan x\,\mathrm{d}x$，这类问题一般也可凑微分.

$$\int e^{2x}\sec^2x\,\mathrm{d}x+2\int e^{2x}\tan x\,\mathrm{d}x=\int(e^{2x}\sec^2x+2e^{2x}\tan x)\mathrm{d}x$$

$$=\int\mathrm{d}(e^{2x}\tan x)=e^{2x}\tan x+C.$$

(5) 解 (Ⅰ) 在对称区间上积分，考查被积函数的奇偶性.

$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$ 是奇函数，$\cos x$ 是偶函数，故

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(x^2\ln\frac{1+x}{1-x}-\cos x\right)\mathrm{d}x=0-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,\mathrm{d}x=-\sqrt{2}.$$

(Ⅱ) $\int_{-1}^{1}(2+\sin x)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x+0=4\cdot\frac{1}{4}\pi=\pi.$

(Ⅲ) $\int_{-2}^{2}(x+|x|)e^{-|x|}\mathrm{d}x=0+2\int_0^2|x|e^{-|x|}\mathrm{d}x=2\int_0^2xe^{-x}\mathrm{d}x$

$$=-2xe^{-x}\Big|_0^2+2\int_0^2e^{-x}\mathrm{d}x=2-6e^{-2}.$$

(Ⅳ) 由题可知，$\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}$ 是偶函数，$\frac{x(e^x+e^{-x})}{1+\sqrt{1-x^2}}$ 是奇函数，故

$$\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x(e^x+e^{-x})}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=4\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+0$$

$$=4\int_0^1\mathrm{d}x-4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=4-\pi.$$

(6) 解 (Ⅰ) $\int_0^2(x-1)^2\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^2(x-1)^2\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$

$$\xlongequal{x-1=t}\int_{-1}^{1}t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=2\int_0^1t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{t=\sin u}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2u\sin^2u\,\mathrm{d}u$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2u)\sin^2u\,\mathrm{d}u$$

$$=2\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4u\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{\pi}{2}-2\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}.$$

(Ⅱ) $\int_0^{\pi}(\mathrm{e}^{-\cos x}-\mathrm{e}^{\cos x})\mathrm{d}x\xlongequal{x=\frac{\pi}{2}+t}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\mathrm{e}^{\sin t}-\mathrm{e}^{-\sin t})\mathrm{d}t=0.$

注 $\mathrm{e}^{\sin t}-\mathrm{e}^{-\sin t}$ 是奇函数.

(7) 解 (Ⅰ) 由于 $\min\{2,x^2\}=\begin{cases}2, & -3\leqslant x\leqslant-\sqrt{2},\\ x^2, & -\sqrt{2}<x<\sqrt{2},\text{故}\\ 2, & \sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$

$$\int_{-3}^{2}\min\{2,x^2\}\mathrm{d}x=\int_{-3}^{-\sqrt{2}}\min\{2,x^2\}\mathrm{d}x+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\min\{2,x^2\}\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{2}}^{2}\min\{2,x^2\}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-3}^{-\sqrt{2}}2\mathrm{d}x+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}x^2\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{2}}^{2}2\mathrm{d}x=10-\frac{8}{3}\sqrt{2}.$$

(Ⅱ) 当 $-1\leqslant x<0$ 时,$\int_{-1}^{x}(1-|t|)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{x}(1+t)\mathrm{d}t=\frac{(1+t)^2}{2}\Big|_{-1}^{x}=\frac{(1+x)^2}{2}$;

当 $x\geqslant 0$ 时,$\int_{-1}^{x}(1-|t|)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}(1+t)\mathrm{d}t+\int_0^x(1-t)\mathrm{d}t=1-\frac{1}{2}(1-x)^2.$

注 注意当 $x\geqslant 0$ 时,$\int_{-1}^{x}(1-|t|)\mathrm{d}t\neq\int_{-1}^{x}(1-t)\mathrm{d}t.$

(Ⅲ) 分段积分,去绝对值符号.

$$\int_{-1}^{1}|x-y|\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int_{-1}^{y}(y-x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_y^1(x-y)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

$$=(y-x)\mathrm{e}^x\Big|_{-1}^{y}+\int_{-1}^{y}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{e}^x\Big|_y^1-\int_y^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

$$=2\mathrm{e}^y-(y+2)\mathrm{e}^{-1}-y\mathrm{e}.$$

(Ⅳ) $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x+$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=4(\sqrt{2}-1).$$

注 因为 $\sqrt{1-\sin x}$ 在 $[0,\pi]$ 上关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称,所以

$$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin x}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=2\left(2\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=4(\sqrt{2}-1).$$

(8) 解 (Ⅰ) 由题可知,$x\cos^2x$ 是奇函数,$\sin^2x\cos^2x$ 为偶函数,故

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x+\sin^2x)\cos^2x\,\mathrm{d}x=0+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cos^2x\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x(1-\sin^2x)\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\,\mathrm{d}x-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4x\,\mathrm{d}x$$

$$=2\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-2\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}.$$

（Ⅱ）令 $x^2=\sin t$，则 $2x\,dx=\cos t\,dt$，故

$$\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\cos^3 t\,dt=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{32}.$$

（Ⅲ）$\int_0^{\pi}t\sin t\,dt=-\int_0^{\pi}t\,d(\cos t)=(-t\cos t)\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos t\,dt=\pi.$

注 利用结论 $\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$，有

$$\int_0^{\pi}x\sin^n x\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^n x\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi^2}{2}, & n\text{ 为正偶数},\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\pi, & n\text{ 为正奇数},\end{cases}$$

故（Ⅲ）可利用结论求解，即 $\int_0^{\pi}t\sin t\,dt=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin t\,dt=\pi.$

（Ⅳ）分别积分计算：

$$\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx\xlongequal{x-1=t}\int_{-1}^0\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{1}{4}\pi,$$

$$\int_0^1\sqrt{(1-x^2)^3}\,dx\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16},$$

故原积分 $=\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{16}=\frac{7\pi}{16}.$

(9) 解（Ⅰ）令 $x-1=t$，则

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^{x+1}+e^{3-x}}=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^2(e^{x-1}+e^{1-x})}=\frac{1}{e^2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{e^t+e^{-t}}$$
$$=\frac{1}{e^2}\int_0^{+\infty}\frac{e^t}{1+e^{2t}}dt=\frac{1}{e^2}\arctan e^t\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{e^2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4e^2}.$$

（Ⅱ）积分区间内 $x=1$ 是瑕点，在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right)$ 和 $\left(1,\frac{3}{2}\right]$ 上分别计算积分.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}+\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x^2-x}}$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}+\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}$$
$$=\arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^1+\ln\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right]\Bigg|_1^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3}).$$

注 积分公式：

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C,\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$$

(10) 解 当 $x<0$ 时，有

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(t-x)\sin t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin t\,dt-x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt$$
$$=-\left(t\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt\right)-x(-\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1-x.$$

同理，当 $x>\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)=x-1$. 当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，

$$f(x)=\int_0^x (x-t)\sin t\mathrm{d}t+\int_x^{\frac{\pi}{2}}(t-x)\sin t\mathrm{d}t=x-2\sin x+1.$$

故
$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0,\\ x-2\sin x+1, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ x-1, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

计算可知：$f'_-(0)=f'_+(0)=-1$，$f'_-\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f'_+\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

当 $x<0$ 时，$f'(x)=-1$；当 $x>\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f'(x)=1$；当 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时，由 $f'(x)=1-2\cos x=0$，得 $x=\dfrac{\pi}{3}$.

由 $f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}>0$，知 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}$ 为极小值，无极大值.

单调减少区间为$\left(-\infty,\dfrac{\pi}{3}\right)$，单调增加区间为$\left(\dfrac{\pi}{3},+\infty\right)$.

(11) 解 $I=\int_0^\pi[f(x)+f''(x)]\sin x\mathrm{d}x=\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x+\int_0^\pi f''(x)\sin x\mathrm{d}x.$ ①

又$\int_0^\pi f''(x)\sin x\mathrm{d}x=\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}[f'(x)]=f'(x)\sin x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)\cos x\mathrm{d}x=-\int_0^\pi f'(x)\cos x\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}&=-\int_0^\pi\cos x\mathrm{d}[f(x)]\\&=-f(x)\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi f(x)(-\sin x)\mathrm{d}x\\&=f(\pi)+f(0)-\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x\\&=3-\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

将结果代入 ① 式，得 $I=3$.

(12) 解 令 $tx^2=u$，则当 $x\neq0$ 时，有

$$\begin{aligned}g(x)&=\int_0^{x^2\sin x}f(u)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{x^2}\int_0^{x^2\sin x}f(u)\mathrm{d}u,\\ g'(x)&=-\frac{2}{x^3}\int_0^{x^2\sin x}f(u)\mathrm{d}u+\frac{1}{x^2}f(x^2\sin x)(2x\sin x+x^2\cos x)\\&=-\frac{2}{x^3}\int_0^{x^2\sin x}f(u)\mathrm{d}u+\left(\frac{2}{x}\sin x+\cos x\right)f(x^2\sin x).\end{aligned}$$

当 $x=0$ 时，$g(0)=0$，故

$$\begin{aligned}g'(0)&=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2\sin x}f(u)\mathrm{d}u}{x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(2x\sin x+x^2\cos x)f(x^2\sin x)}{3x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x+x\cos x}{3x}\cdot\lim_{x\to0}f(x^2\sin x)=f(0)=1,\end{aligned}$$

所以

$$g'(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{x^3}\displaystyle\int_0^{x^2\sin x}f(u)\mathrm{d}u+\left(\dfrac{2}{x}\sin x+\cos x\right)f(x^2\sin x), & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

(13) 证 利用泰勒公式，将 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{a}{2}$ 处展开为

$$f(x)=f\left(\frac{a}{2}\right)+f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2!}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$$
$$\geqslant f\left(\frac{a}{2}\right)+f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right)\ (\xi\text{ 介于}\frac{a}{2}\text{ 与 }x\text{ 之间}),$$

对上式积分，得

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x>\int_0^a\left[f\left(\frac{a}{2}\right)+f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right)\right]\mathrm{d}x$$
$$=\left[f\left(\frac{a}{2}\right)\cdot x+\frac{1}{2}f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\right]\Bigg|_0^a=af\left(\frac{a}{2}\right).$$

(14) 证 利用单调性证明. 令 $F(x)=\displaystyle\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t-\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，$a\leqslant x\leqslant b$，则

$$F'(x)=xf(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{a+x}{2}f(x)$$
$$=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}f(\xi)(x-a)\ (\text{这里利用积分中值定理})$$
$$=\frac{x-a}{2}[f(x)-f(\xi)]\geqslant 0\ (\text{因 }f(x)\text{ 单调增加}),$$

其中 $a\leqslant\xi\leqslant x$，所以 $F(x)$ 单调增加，故 $F(b)\geqslant F(a)=0$，即

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

所证不等式成立.

(15) 证 利用积分换元法.

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\ \xlongequal{x=a+b-t}\ \int_b^a(a+b-t)f(a+b-t)(-\mathrm{d}t)$$
$$=\int_a^b(a+b-t)f(a+b-t)\mathrm{d}t.$$

由题设知 $y=f(x)$ 关于 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称，则 $f(x)=f\left(2\cdot\dfrac{a+b}{2}-x\right)=f(a+b-x)$，故

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\int_a^b(a+b-t)f(a+b-t)\mathrm{d}t$$
$$=(a+b)\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t$$
$$=(a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x,$$

移项，得 $\displaystyle\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

注 结论：

若 $y=f(x)$ 关于直线 $x=a\,(a\neq 0)$ 对称，则 $f(x)=f(2a-x)$；若 $y=f(x)$ 关于点 $(a,0)$ 对称 $(a\neq 0)$，则 $f(x)=-f(2a-x)$.

(16) 证 利用单调性证明. 令 $F(x)=\displaystyle\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\left[x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-a\int_0^a f(t)\mathrm{d}t\right]$，则

$$F'(x) = xf(x) - \frac{1}{2}xf(x) - \frac{1}{2}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}xf(x) - \frac{1}{2}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$
$$\geqslant \frac{1}{2}xf(x) - \frac{1}{2}\int_0^x f(x)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}xf(x) - \frac{1}{2}xf(x) = 0,$$

故 $F(x)$ 单调增加,所以 $F(b) \geqslant F(a) = 0$. 所证不等式成立.

注 考虑到 $b\int_0^b f(x)\mathrm{d}x - a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$,令辅助函数为 $F(x) = x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\,(x \geqslant 0)$,则

$$\begin{aligned} b\int_0^b f(x)\mathrm{d}x - a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x &= F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + xf(x)\right]\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \left[\int_0^x f(x)\mathrm{d}t + xf(x)\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b [f(x)x + xf(x)]\mathrm{d}x = 2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

所以 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}\left[b\int_0^b f(x)\mathrm{d}x - a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]$.

(17) **解** 对 $f(x)$ 求导有 $f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$,令 $f'(x)=0$,解得 $x = \dfrac{1}{2}$.

当 $-1 < x < \dfrac{1}{2}$ 时,$f'(x) < 0$;当 $\dfrac{1}{2} < x < 1$ 时,$f'(x) > 0$.

$$f(1) = \int_0^1 \frac{2t-1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t = \ln(t^2-t+1)\Big|_0^1 = 0,$$
$$f(-1) = \int_0^{-1} \frac{2t-1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t = \ln(t^2-t+1)\Big|_0^{-1} = \ln 3,$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2t-1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t = \ln(t^2-t+1)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \ln\frac{3}{4},$$

故最小值为 $\ln\dfrac{3}{4}$,最大值为 $\ln 3$.

(18) **证** 依题设,如图 3-5 所示,由 $y = \dfrac{1}{2} + x^2$,有 $y(0) = \dfrac{1}{2}$,

$y(a) = a^2 + \dfrac{1}{2}$,故梯形 $OABC$ 的面积为

$$S = \frac{1}{2}(|OC| + |AB|)\cdot|OA|$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + a^2 + \frac{1}{2}\right)\cdot a = \frac{1}{2}a(a^2+1).$$

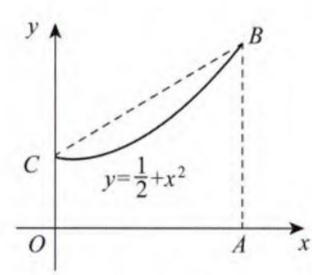


图 3-5

曲边梯形 $OABC$ 的面积为

$$S_1 = \int_0^a \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x\right)\Big|_0^a = \frac{1}{3}a\left(a^2 + \frac{3}{2}\right),$$

故 $\dfrac{S}{S_1} = \dfrac{\frac{1}{2}a(a^2+1)}{\frac{1}{3}a\left(a^2+\frac{3}{2}\right)} < \dfrac{3}{2}$.

(19) **解** 由已知,如图 3-6 所示.

设 $\sin x = k\left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$,依题意知,两个函数图形的交点是唯一的,则

$$S_1 = \int_0^x (k - \sin t)\mathrm{d}t = kx + \cos x - 1,$$

$$S_2=\int_x^{\frac{\pi}{2}}(\sin t-k)\mathrm{d}t=\cos x+kx-\frac{1}{2}\pi k.$$

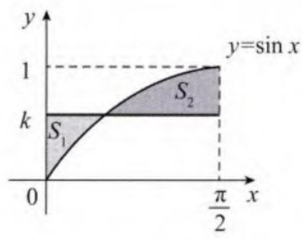


图 3-6

将 $k=\sin x$ 代入上两式，得

$$S_1=x\sin x+\cos x-1,S_2=\cos x+x\sin x-\frac{1}{2}\pi\sin x,$$

故 $S=S_1+S_2=2(x\sin x+\cos x)-\left(1+\frac{\pi}{2}\sin x\right),0<x<\frac{\pi}{2}$,

则 $S'=2x\cos x-\frac{\pi}{2}\cos x=0$，得唯一驻点 $x=\frac{\pi}{4}$. 又

$$S(0)=1,\ S\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1,\ S\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-1,$$

所以 S 的最小值为 $S\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1$.

(20) 解 (Ⅰ) 如图 3-7 所示，用微元法.

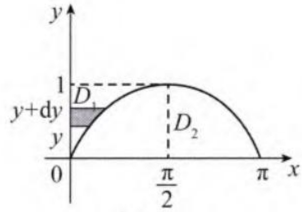


图 3-7

任取 $[y,y+\mathrm{d}y]\subset[0,1]$，则微元

$$\mathrm{d}V_1=\left[\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2\right]\mathrm{d}y$$
$$=[\pi^2\arcsin y-\pi(\arcsin y)^2]\mathrm{d}y,$$

故
$$V_1=\int_0^1\mathrm{d}V_1=\pi^2\int_0^1\arcsin y\mathrm{d}y-\pi\int_0^1(\arcsin y)^2\mathrm{d}y$$
$$=\pi^2\left(y\arcsin y+\sqrt{1-y^2}\right)\Big|_0^1-\pi\left[y(\arcsin y)^2+2\sqrt{1-y^2}\arcsin y-2y\right]\Big|_0^1$$
$$=\pi^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-\pi\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)=\frac{\pi^3}{4}-\pi^2+2\pi.$$

(Ⅱ) 任取 $[x,x+\mathrm{d}x]\subset[0,\pi]$ 则微元 $\mathrm{d}V_2=2\pi x\cdot\sin x\mathrm{d}x$，故 $V_2=\int_0^{\pi}2\pi x\sin x\mathrm{d}x=2\pi^2$.

(21) 解 (Ⅰ) 星形线如图 3-8 所示. 所围面积

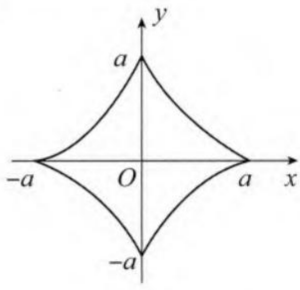


图 3-8

$$A=4\int_0^a y\mathrm{d}x=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3 t\cdot(-3a\cos^2 t\cdot\sin t)\mathrm{d}t$$
$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2(\sin^4 t-\sin^6 t)\mathrm{d}t=\frac{3\pi a^2}{8}.$$

(Ⅱ) $L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin t\cos t\mathrm{d}t=6a.$

(Ⅲ) $V=2\int_0^a\pi y^2\mathrm{d}x=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t=\frac{32}{105}\pi a^3,$

$$S=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi y\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$$
$$=12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cdot\cos t\mathrm{d}t=\frac{12}{5}\pi a^2.$$

注 参数方程所围区域图形，求其旋转体面积或体积，关键是在直角坐标系中写出面积或体积表达式，再将参数方程代入，相当于定积分的换元.

如参数方程 $x=x(t),y=y(t)$，设 $x=x(t)$ 的反函数为 $t=t(x)$，则面积为

$$A=\int_a^b y(t(x))\mathrm{d}x\xlongequal{x=x(t)}\int_\alpha^\beta y(t)\mathrm{d}[x(t)],$$

这里 α,β 是 t 的积分限.

(22) 解 依题意,立体图形如图 3-9 所示,先求垂直于 x 轴截面的面积

$$A(x)=\frac{1}{2}(x^2-1)^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}(x^2-1)^2,$$

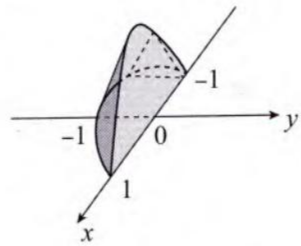


图 3-9

故所求体积为

$$\begin{aligned}V&=\int_{-1}^{1}A(x)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^2\mathrm{d}x\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{0}^{1}(x^2-1)^2\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}x^3+x\right)\Big|_0^1\\&=\frac{4}{15}\sqrt{3}.\end{aligned}$$

(23) 解 弧微分为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\mathrm{d}y=\sqrt{1+\left(\frac{y}{2}-\frac{1}{2y}\right)^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y,$$

故 $s=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^2+1)$.

综合题

一、选择题

(1)C.

解 由 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内的一个原函数,知 $F'(x)=f(x)$. 因为 $F(x)$ 在 $(-1,1)$ 内连续,从而 $F(x)$ 在 $(-1,1)$ 内存在原函数,所以 $f(x)+F(x)$ 在 $(-1,1)$ 内存在原函数. 选项 C 正确.

由 $F'(x)=f(x)$ 是奇函数,知 $F(x)$ 是连续的偶函数,但 $f(x)+F(x)$ 没有奇偶性. 排除选项 D.

$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内存在原函数,但 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内不一定连续.

例如:

$$F(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\0, & x=0.\end{cases}$$

$$F'(x)=f(x)=\begin{cases}2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\0, & x=0.\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续,而 $F(x)$ 在 $(-1,1)$ 内连续.

因此 $f(x)+F(x)$ 在 $(-1,1)$ 内不连续. 排除选项 A,B.

(2)A.

解 由于 $\mathrm{e}^{\sin t}\sin t$ 是以 2π 为周期的周期函数,所以

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_x^{x+2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t=-\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\mathrm{d}(\cos t)\\&=-\mathrm{e}^{\sin t}\cos t\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\cos t\cdot\mathrm{e}^{\sin t}\cdot\cos t\mathrm{d}t\\&=-(1-1)+\int_0^{2\pi}\cos^2t\,\mathrm{e}^{\sin t}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

又因为 $\cos^2t\geqslant 0$, $\mathrm{e}^{\sin t}>0$,所以 $\cos^2t\,\mathrm{e}^{\sin t}\geqslant 0$,故 $F(x)>0$,选项 A 正确.

注 设 $f(x+T)=f(x)$,且 $f(x)$ 连续,则对任意 $a\in\mathbf{R}$,有

$$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

(3)B.

解 确定 $f(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 内的符号.

由 $|f(x)|\leqslant x^2$,知 $f(0)=0$,且

$$0\leqslant|f'(0)|=\lim_{x\to0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\lim_{x\to0}\frac{x^2}{|x|}=0,$$

故 $f'(0)=0$. 由 $f''(x)>0$,知 $f'(x)$ 单调增加,故在区间 $(-\delta,0)$ 和 $(0,\delta)$ 内分别有 $f'(x)<0$ 和 $f'(x)>0$. 因而 $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少,在 $(0,\delta)$ 内单调增加,又 $f(0)=0$,知 $f(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 内非负,且仅在 $x=0$ 处 $f(x)=0$,所以 $I=\int_{-\delta}^{\delta}f(x)\mathrm{d}x>0$,故选项 B 正确.

(4)A.

解 因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,所以在该区间上 $\sin x$ 单调增加,$\cos x$ 单调减少,而 $\sin x\leqslant x$,故当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时,有 $\sin(\sin x)<\sin x$,$\cos(\sin x)>\cos x$,所以

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1,$$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)\mathrm{d}x>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

综上可知,$I_1<1<I_2$,选项 A 正确.

(5)C.

解 当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时,$(1+x)^2=1+x^2+2x\geqslant1+x^2$,故

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=I_3.$$

为比较I_1与I_2的大小,作差:

$$\begin{aligned}I_1-I_2&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

又

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t}\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\sin t-\cos t}{1+\left(\frac{\pi}{2}-t\right)^2}(-\mathrm{d}t)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin t-\cos t}{1+\left(\frac{\pi}{2}-t\right)^2}\mathrm{d}t,$$

故

$$\begin{aligned}I_1-I_2&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\left[\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}\right]\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2-x^2}{(1+x^2)\left[1+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2\right]}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时,$\cos x>\sin x$,$0<x<\frac{\pi}{2}-x$,故$I_1-I_2>0$.

综上所述,$I_1>I_2>I_3$. 选项 C 正确.

(6)B.

解 对于 ①、② 两项:因为是选择题,所以 $f(x)$ 可以取特殊值. 例如取 $f(x)=-x$,则 $f'(x)=-1<0$.

$$\int_0^t f(x)\mathrm{d}x=\int_0^t(-x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}t^2,$$

$$\int_0^1 tf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 t(-x)\mathrm{d}x=t\int_0^1(-x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}t,$$

只要比较 $-\frac{1}{2}t^2$ 与 $-\frac{1}{2}t$ 的大小即可.

当 $0<t<1$ 时,$0<t^2<t$,故 $-\frac{1}{2}t^2>-\frac{1}{2}t$. 知第 ② 项正确.

对于 ③、④ 两项:令 $F(x)=\int_0^x xf(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$,则

$$\begin{aligned}F'(x)&=\left(x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right)'\\&=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-2xf(x)\\&=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)\\&\xlongequal[\text{定理}]{\text{积分中值}}x[f(\xi)-f(x)]\quad(0<\xi<x).\end{aligned}$$

当 $x>0$ 时,由 $f'(x)<0$,知 $f(x)$ 单调减少,故 $f(\xi)-f(x)>0$.

当 $x=0$ 时,$F'(x)=0$,从而 $F'(x)\geqslant 0$,所以 $F(x)\geqslant F(0)=0$,故第 ③ 项正确.

综上所述,选项 B 正确.

(7)C.

解 由已知,有 $F'(x)=f(x)>0$,$F''(x)=f'(x)<0$,且 $F(0)=0$,故 $y=F(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增,且是凸曲线,如图 3-10 所示.

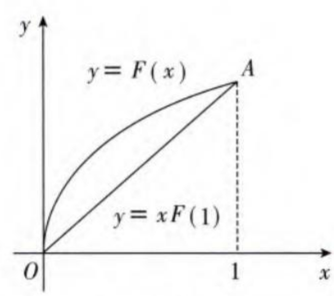


图 3-10

$\overline{OA}$ 的方程为

$$y=xF(1),\ F(x)>xF(1),\ x\in(0,1),$$

故
$$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x>\int_0^1 xF(1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}F(1),$$

即 $F(1)<2\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x$,可排除选项 B.

又 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增,知 $F(1)>F(x)$,$x\in(0,1)$. 故 $2\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x>F(1)>F(x)$,知选项 C 正确.

由 $xF(1)<F(x)<F(1)<2\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x$,知选项 A 不正确.

(8)B.

解 令 $F(t)=\int_0^t xf(x)\mathrm{d}x-\frac{2}{3}t\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$,则

$$F'(t)=\frac{1}{3}tf(t)-\frac{2}{3}\int_0^t f(x)\mathrm{d}x,\ F'(0)=0;$$

$$\begin{aligned}F''(t)&=\frac{1}{3}tf'(t)-\frac{1}{3}f(t)=\frac{1}{3}tf'(t)-\frac{1}{3}[f(t)-f(0)]\\&=\frac{1}{3}tf'(t)-\frac{1}{3}tf'(\xi)\quad(0<\xi<t\leqslant a).\end{aligned}$$

由 $f''(x)>0$,知 $f'(t)>f'(\xi)$,故 $F''(t)>0$.

所以当 $t>0$ 时,$F'(t)>F'(0)=0$,$F(t)$ 单调递增.

又由 $F(0)=0$,知 $F(t)>F(0)=0$,令 $t=a$,则 $F(a)>F(0)=0$,即

$$\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x > \frac{2}{3}a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

选项 B 正确.

(9)D.

解 依题意,只需判别被积函数的正、负即可,考虑到 $\sin x$ 在$[0,\pi]$与$[-\pi,0]$上分别非负和非正,有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{0} f(x)\sin x\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x.$$

而
$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin x\mathrm{d}x \xlongequal{x=-u} \int_{\pi}^{0} f(-u)\sin(-u)(-\mathrm{d}u)$$
$$= -\int_0^{\pi} f(-u)\sin u\mathrm{d}u = -\int_0^{\pi} f(-x)\sin x\mathrm{d}x,$$

故
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}[f(x)-f(-x)]\sin x\mathrm{d}x.$$

由 $f'(x)<0$,知 $f(x)$ 单调减少,故当 $x\in[0,\pi]$ 时,有 $f(x)\leqslant f(-x)$,于是

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}[f(x)-f(-x)]\sin x\mathrm{d}x < 0,$$

故第①项正确.又

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}(\sin x) = f(x)\sin x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin x\mathrm{d}x$$
$$= -\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin x\mathrm{d}x,$$

且由 $f''(x)>0$,知 $f'(x)$ 单调增加,从而 $-f'(x)$ 单调减少.由第①项正确,知

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x = -\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin x\mathrm{d}x < 0,$$

故第④项也正确.综上可知,选项 D 正确.

注 作为选择题,可用取特殊值法,如对第①、②项取 $f(x)=-x$,对于第①、④项取$f(x)=\mathrm{e}^x$.

(10)D.

解
$$\mathrm{e}^{-\cos\frac{1}{x}} - \mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1}\left(\mathrm{e}^{-\cos\frac{1}{x}+1} - 1\right).$$

当 $x\to+\infty$ 时,$\mathrm{e}^{-1}\left(\mathrm{e}^{-\cos\frac{1}{x}+1}-1\right)$ 与 $\mathrm{e}^{-1}\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$ 是等价无穷小,又 $1-\cos\frac{1}{x}$ 与$\frac{1}{2x^2}$ 是等价无穷小,故 $x^k\left(\mathrm{e}^{-\cos\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{-1}\right)$ 与$\frac{1}{2\mathrm{e}x^{2-k}}$ 是等价无穷小.

当 $k<1$ 时,$2-k>1$,故$\int_1^{+\infty} x^k\left(\mathrm{e}^{-\cos\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{-1}\right)\mathrm{d}x$ 收敛.选项 D 正确.

当 $k\geqslant1$ 时,$2-k\leqslant1$,$\frac{1}{2\mathrm{e}x^{2-k}}$ 是阶数不高于$\frac{1}{x}$ 的无穷小,故$\int_1^{+\infty} x^k(\mathrm{e}^{-\cos\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{-1})\mathrm{d}x$ 发散.

注 结论:$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\,(a>0,p$ 为任意实数),当 $p\leqslant1$ 时,发散;当 $p>1$ 时,收敛于$\frac{a^{1-p}}{p-1}$.

(11)C.

解
$$\int_{-b}^{b} f(a-x)\mathrm{d}x = \int_{-b}^{0} f(a-x)\mathrm{d}x + \int_0^{b} f(a-x)\mathrm{d}x.$$

由 $f(x)=f(2a-x)$,得 $f(a+x)=f(a-x)$,则

$$\int_{-b}^{0} f(a-x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=-t} -\int_{b}^{0} f(a+t)\mathrm{d}t = \int_0^{b} f(a-t)\mathrm{d}t = \int_0^{b} f(a-x)\mathrm{d}x,$$

故$\int_{-b}^{b} f(a-x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{b} f(a-x)\mathrm{d}x$.选项 C 正确.

(12) A.

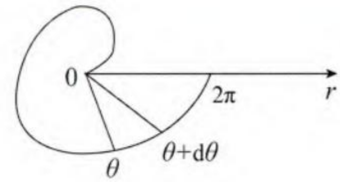


图 3-11

解 由已知，$r=\theta(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 与极轴所围区域如图 3-11 所示.

将区间$[0,2\pi]$ n 等分，则所围区域的面积

$$
\begin{aligned}
A&=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}r^2\left(0+\frac{2\pi-0}{n}i\right)\frac{2\pi-0}{n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\pi i}{n}\right)^2\frac{2\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{4\pi^3 i^2}{n^3}.
\end{aligned}
$$

故选项 A 正确.

(13) A.

解 令 $g(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $g(x^3)=\int_0^{x^3}f(t)\mathrm{d}t$，$g'(x)=f(x)$，$g''(x)=f'(x)$，故

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{g''(x)}{2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2}=\frac{f'(0)}{2}=3,$$

即有$\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)}{3x^2}=1$，所以 $g(x)\sim 3x^2$，$g(x^3)\sim3(x^3)^2=3x^6$，故

$$\lim_{x\to0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to0}\frac{3x^6}{(3x^2)^3}=\frac{1}{9},$$

即 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小，选项 A 正确.

(14) B.

解 令 $t+\frac{x}{s}=u$，则 $\mathrm{d}u=\frac{1}{s}\mathrm{d}x$，故

$$I=\frac{1}{s}\int_0^{st}f\left(t+\frac{x}{s}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{s}\int_t^{2t}f(u)s\,\mathrm{d}u=\int_t^{2t}f(u)\mathrm{d}u.$$

由此可知，I 仅依赖于 t，选项 B 正确.

(15) C.

解 由 $\ln\frac{2+x}{2-x}$ 是关于 x 的奇函数，知 $x\ln\frac{2+x}{2-x}$ 是偶函数，故

$$\int_{-1}^{1}x\ln\frac{2+x}{2-x}\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\ln\frac{2+x}{2-x}\mathrm{d}x.$$

又由于 $x\ln\frac{2+x}{2-x}$ 在$[0,1]$上大于或等于零，故$\int_{-1}^{1}x\ln\frac{2+x}{2-x}\mathrm{d}x>0$. 选项 C 正确.

对于选项 A：由于$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(4x-1)^3}=\int_0^{\frac14}\frac{\mathrm{d}x}{(4x-1)^3}+\int_{\frac14}^1\frac{\mathrm{d}x}{(4x-1)^3}$ 且

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac14}\frac{\mathrm{d}x}{(4x-1)^3}&=\lim_{\xi\to0^+}\int_0^{\frac14-\xi}\frac{1}{4}(4x-1)^{-3}\mathrm{d}(4x-1)\\
&=\frac{1}{4}\lim_{\xi\to0^+}\frac{-1}{2(4x-1)^2}\Bigg|_0^{\frac14-\xi}=-\frac{1}{8}\lim_{\xi\to0^+}\left[\frac{1}{(-4\xi)^2}-1\right]=\infty,
\end{aligned}
$$

故$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(4x-1)^3}$ 发散.

对于选项 B：由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x,$$

且 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac12}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=+\infty$，根据反常积分的比较审敛法，知$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$ 发散.

对于选项 D:由于 $e^{x^2}\sin x$ 是奇函数,故$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{x^2}\sin x\,dx=0$.

(16) B.

解 当 $p\leqslant 0$ 时,$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^p}=+\infty$,故$\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^p}dx$ 发散.

当 $p>0$ 时,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx\xlongequal{\text{记}}I_1+I_2.$$

对于I_1:当 $x\to 0$ 时,$\dfrac{\ln(1+x)}{x^p}$ 与$\dfrac{1}{x^{p-1}}$ 是等价无穷小,故当 $p-1\geqslant 1$ 时,I_1 发散;当 $p-1<1$ 时,I_1 收敛. 故当 $0<p<2$ 时,I_1 收敛.

对于I_2:当 $p>1$ 时,总存在 $\delta>0$,使得 $p-\delta>1$. 由于

$$\lim_{x\to+\infty}x^{p-\delta}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^p}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\delta}=0,$$

故I_2 收敛.

当 $0<p\leqslant 1$ 时,由 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p\cdot\dfrac{\ln(1+x)}{x^p}=+\infty$,知$I_2$ 发散.

综上所述,当 $1<p<2$ 时,原积分收敛. 选项 B 正确.

注 $\int_a^b\dfrac{dx}{(x-a)^q}(a<b)\begin{cases}q<1, & \text{收敛},\\ q\geqslant 1, & \text{发散}.\end{cases}$　　$\int_a^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p}(a>0)\begin{cases}p>1, & \text{收敛},\\ p\leqslant 1, & \text{发散}.\end{cases}$

(17) A.

解

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}=\int_1^e\frac{dx}{x^p\ln^q x}+\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}.$$

因为 $\ln x=\ln[1+(x-1)]\sim x-1(x\to 1)$,故由

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\dfrac{1}{x^p\ln^q x}}{\dfrac{1}{(x-1)^q}}=1,$$

可知$\int_1^e\dfrac{dx}{x^p\ln^q x}$ 与$\int_1^e\dfrac{dx}{(x-1)^q}$ 敛散性相同,故当 $q<1$ 时,$\int_1^e\dfrac{dx}{x^p\ln^q x}$ 收敛. 排除选项 B 和 D.

当 $q<1,p=1$ 时,$\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln^q x}=\dfrac{1}{1-q}\ln^{1-q}x\Big|_e^{+\infty}=\infty$,故发散;

当 $q<1,p<1$ 时,对 $\forall\, p<a<1$,$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^p\ln^q x}}{\dfrac{1}{x^a}}=+\infty$,且$\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x^a}$ 发散,故$\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p\ln^q x}$ 发散;

当 $q<1,p>1$ 时,$\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p\ln^q x}<\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p}$,故$\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p\ln^q x}$ 收敛.

综上所述,当 $p>1,q<1$ 时,积分收敛,选项 A 正确.

(18) A.

解 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^{1-p}\arctan x}{2+x^p}dx=\int_0^1\dfrac{x^{1-p}\arctan x}{2+x^p}dx+\int_1^{+\infty}\dfrac{x^{1-p}\arctan x}{2+x^p}dx\xlongequal{\text{记}}I_1+I_2$.

对于I_1,

$$\lim_{x\to 0^+}x^{-(1-p)-1}\cdot\frac{x^{1-p}\arctan x}{2+x^p}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2+x^p}=\frac{1}{2}.$$

由比较审敛法,知当$-(1-p)-1<1$,即 $p<3$ 时,I_1 收敛.

对于I_2，$$\lim_{x\to+\infty} x^{p-(1-p)}\cdot\frac{x^{1-p}\arctan x}{2+x^p}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p\arctan x}{2+x^p}=\frac{\pi}{2}.$$
由比较审敛法，知当$p-(1-p)>1$，即$p>1$时，I_2收敛.

故当$1<p<3$时，原积分收敛. 选项A正确.

(19)C.

解 $$I=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}-\frac{a}{x+2}\right)\mathrm{d}x=\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)-a\ln(x+2)\right]\Big|_0^{+\infty}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{(x+2)^a}-\ln 2+a\ln 2.$$

当$a>1$时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{(x+2)^a}=\infty$，积分发散；

当$a<1$时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{(x+2)^a}=\infty$，积分发散；

当$a=1$时，
$$I=\ln\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{(x+2)^a}\right]-0=\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}}\right)=\ln 2.$$

选项C正确.

二、填空题

(1)$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{3}, & x<-1,\\ x+1, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{5}{3}, & x>1.\end{cases}$

解 依题设，有
$$f(x)=\max\{1,x^2\}=\begin{cases}x^2, & x<-1\text{或}x>1,\\ 1, & |x|\leqslant 1,\end{cases}$$

积分，得
$$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3+C_1, & x<-1,\\ x+C_2, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{3}x^3+C_3, & x>1.\end{cases}$$

令$x=0$，则由$F(0)=1$，知$C_2=1$，故当$-1\leqslant x\leqslant 1$时，$F(x)=x+1$.

又因为原函数$F(x)$处处可导，所以$F(x)$连续，从而有
$$\lim_{x\to(-1)^-}F(x)=\lim_{x\to(-1)^+}F(x)=F(-1),$$
$$\lim_{x\to 1^-}F(x)=\lim_{x\to 1^+}F(x)=F(1),$$

即$\begin{cases}-\dfrac{1}{3}+C_1=-1+1=0,\\ \dfrac{1}{3}+C_3=1+1,\end{cases}$ 解得$C_1=\dfrac{1}{3}$，$C_3=\dfrac{5}{3}$，故

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{3}, & x<-1,\\ x+1, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{5}{3}, & x>1.\end{cases}$$

(2) $f(x)-f(x_0)$.

解 由于 $\int_{x_0}^{x} f(t+\Delta x)\mathrm{d}t \xlongequal{t+\Delta x=u} \int_{x_0+\Delta x}^{x+\Delta x} f(u)\mathrm{d}u$，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x}[f(t+\Delta x)-f(t)]\mathrm{d}t=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_{x_0+\Delta x}^{x+\Delta x} f(u)\mathrm{d}u-\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}$$

$$\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x)-f(x_0+\Delta x)]=f(x)-f(x_0).$$

注 ① $\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 不含 Δx，对 $\Delta x\to 0$ 的极限而言为常数.

② $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x}[f(t+\Delta x)-f(t)]\mathrm{d}t=\lim_{\Delta x\to 0}\int_{x_0}^{x}\frac{f(t+\Delta x)-f(t)}{\Delta x}\mathrm{d}t=\int_{x_0}^{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(t+\Delta x)-f(t)}{\Delta x}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t=f(x)-f(x_0),$$

以上解法是错误的，一般情况下，积分号与极限号不能任意交换.

(3) $\dfrac{1}{2}$.

解 曲线与 x 轴的交点为 $(0,0),(1,0),(2,0)$，在区间 $[0,1]$ 上，$y<0$；在区间 $[1,2]$ 上，$y>0$，故所求面积为

$$A=-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x+\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

(4) 1.

解 双纽线的极坐标方程为

$$r^2=\cos 2\theta\left(-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{5\pi}{4}\right).$$

如图 3-12 所示，由对称性，知所围成的图形面积为

$$A=4\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta=1.$$

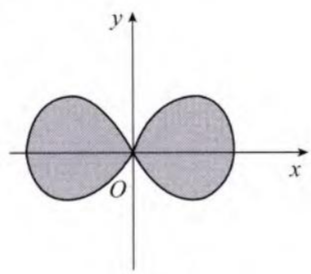


图 3-12

(5) $2+\dfrac{1}{2}\ln 3$.

解 曲线 $\theta=\dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{1}{r}\right)$ 的参数方程为

$$\begin{cases}x=r\cos\left[\dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\right],\\ y=r\sin\left[\dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\right],\end{cases}$$

所求弧长为

$$s=\int_1^3\sqrt{x'^2(r)+y'^2(r)}\,\mathrm{d}r=\int_1^3\sqrt{1+\frac{1}{4}r^2\left(1-\frac{1}{r^2}\right)^2}\,\mathrm{d}r$$

$$=\int_1^3\sqrt{\frac{1}{4}r^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4r^2}}\,\mathrm{d}r=\int_1^3\sqrt{\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{2r}\right)^2}\,\mathrm{d}r$$

$$=\int_1^3\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{2r}\right)\mathrm{d}r=2+\frac{1}{2}\ln 3.$$

(6) $\frac{3}{4}\pi$.

解 由已知,闭曲线$(x^2+y^2)^3=x^4+y^4$关于x轴、y轴均对称,其极坐标方程为

$$r=\sqrt{\cos^4\theta+\sin^4\theta},\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

故所求面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^4\theta+\sin^4\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\cos^4\theta+\sin^4\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4\theta+\sin^4\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4\theta+\sin^4\theta)\mathrm{d}\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=4\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi.$$

(7) $\frac{(\ln x)^2}{2}$.

解 令$\mathrm{e}^x=t$,则$x=\ln t$,$f'(t)=\frac{\ln t}{t}$,故

$$f(t)=\int f'(t)\mathrm{d}t=\int\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(\ln t)^2+C.$$

由$f(1)=0$,得$C=0$,故$f(x)=\frac{(\ln x)^2}{2}$.

(8) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2}(1-\cos x), & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \sqrt{2}(\cos x-1), & -\frac{\pi}{2}\leqslant x<0.\end{cases}$

解 依题设,有

$$f(x)=\int\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int|\sin x|\,\mathrm{d}x=\begin{cases}-\sqrt{2}\cos x+C_1, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \sqrt{2}\cos x+C_2, & -\frac{\pi}{2}\leqslant x<0.\end{cases}$$

由原函数的可导性,可知$f(x)$在$x=0$处必连续,所以

$$f(0)=0=-\sqrt{2}+C_1=\sqrt{2}+C_2,$$

解得$C_1=\sqrt{2}$,$C_2=-\sqrt{2}$,故$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2}(1-\cos x), & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \sqrt{2}(\cos x-1), & -\frac{\pi}{2}\leqslant x<0.\end{cases}$

(9) $\arcsin\frac{1}{x}+\frac{\pi}{6}(x<-1)$.

解 依题设，知$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$，故

$$y=\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}$$

$$=\arcsin\frac{1}{x}+C\ (x<-1).$$

由 $y(-2)=0$，得 $C=\frac{\pi}{6}$，故所求曲线方程为 $y=\arcsin\frac{1}{x}+\frac{\pi}{6}\ (x<-1)$.

注 $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，由于曲线通过 $(-2,0)$ 点，表明 $x\in(-\infty,-1)$，所以如下解法是错误的：

$$y=\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=-\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}=\arccos\frac{1}{x}+C.$$

由 $y(-2)=0$，得 $C=-\frac{2}{3}\pi$，故 $y=\arccos\frac{1}{x}-\frac{2}{3}\pi$.

事实上，

$$y=\begin{cases}\arcsin\frac{1}{x}+\frac{\pi}{6}, & x<-1,\\ \arccos\frac{1}{x}+C, & x>1.\end{cases}$$

(10) 2.

解 $g(x)=\int_0^{x^2}xf(t)\mathrm{d}t=x\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t$，由 $g(1)=1$，知$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=1$.

又 $g'(x)=\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t+2x^2f(x^2)$，由 $g'(1)=5$，知

$$5=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t+2f(1)=1+2f(1),$$

故 $f(1)=2$.

(11) 0.

解 $I=\int_0^1 x^2f''(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\mathrm{d}[f'(2x)]=\frac{1}{2}\left[x^2f'(2x)\Big|_0^1-\int_0^1 2xf'(2x)\mathrm{d}x\right]$

$=-\frac{1}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}[f(2x)]=-\frac{1}{2}\left[xf(2x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x\right]$

$=\frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}f(2)\xlongequal{2x=t}\frac{1}{4}\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{4}=0.$

(12) $\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}$.

解 $I=\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}(\sin x)=f(x)\sin x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)\sin x\mathrm{d}x$

$=0-\int_0^\pi \mathrm{e}^{\cos x}\sin x\mathrm{d}x=\int_0^\pi \mathrm{e}^{\cos x}\mathrm{d}(\cos x)=\mathrm{e}^{\cos x}\Big|_0^\pi=\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}.$

(13) $\frac{1}{2(1+2\mathrm{e})}-\frac{1}{4\mathrm{e}}\ln(1+2\mathrm{e})$.

解 先求 $f(x)$ 的表达式：

$$f(x)=\lim_{t\to\infty}x\cdot\frac{\sin\frac{x}{t}}{\frac{x}{t}}\cdot\frac{g\left(2x+\frac{1}{t}\right)-g(2x)}{\frac{1}{t}}=xg'(2x).$$

由已知，$\int g(x)\mathrm{d}x=\ln(1+x)+C$，故 $g(x)=\frac{1}{1+x}$.

$f(x)$ 在$[0,\mathrm{e}]$上的平均值为

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{e}}\int_0^{\mathrm{e}}f(x)\mathrm{d}x&=\frac{1}{\mathrm{e}}\int_0^{\mathrm{e}}xg'(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\mathrm{e}}\int_0^{\mathrm{e}}x\,\mathrm{d}[g(2x)]\\&=\frac{1}{2\mathrm{e}}\left[xg(2x)\Big|_0^{\mathrm{e}}-\int_0^{\mathrm{e}}g(2x)\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{2(1+2\mathrm{e})}-\frac{1}{4\mathrm{e}}\int_0^{2\mathrm{e}}g(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2(1+2\mathrm{e})}-\frac{1}{4\mathrm{e}}\ln(1+t)\Big|_0^{2\mathrm{e}}\\&=\frac{1}{2(1+2\mathrm{e})}-\frac{1}{4\mathrm{e}}\ln(1+2\mathrm{e}).\end{aligned}$$

(14) $\frac{\pi}{2}$.

解 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^2}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\sin^2x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\sin^2x}{x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2\sin x\cos x}{x}\mathrm{d}x$

$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}\mathrm{d}x\xlongequal{2x=t}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$.

(15) 0.

解 先求不定积分，得原函数

$$\begin{aligned}\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x&=-\frac{1}{2}\int\ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}\\&=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x&=\lim_{\substack{\varepsilon\to0^+\\b\to+\infty}}\left[-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right]\Big|_\varepsilon^b\\&=\lim_{\substack{\varepsilon\to0^+\\b\to+\infty}}\left[-\frac{\ln b}{2(1+b^2)}+\frac{\ln\varepsilon}{2(1+\varepsilon^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{b^2}{1+b^2}-\frac{1}{4}\ln\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}\right]\\&=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[-\frac{\varepsilon^2\ln\varepsilon}{2(1+\varepsilon^2)}+\frac{1}{4}\ln(1+\varepsilon^2)\right]=0.\end{aligned}$$

注 这里 $\varepsilon\to0^+$，$b\to+\infty$ 的取极限过程是独立的，分别求极限.

(16) $\pi-2\ln 2$.

解 因为

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\ln\frac{x+1}{x}\mathrm{d}x&=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{\sqrt{x}}\ln\frac{x+1}{x}\mathrm{d}x\\&=\lim_{b\to+\infty}\left[\int_1^b\frac{1}{\sqrt{x}}\ln(x+1)\mathrm{d}x-\int_1^b\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x\,\mathrm{d}x\right],\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\int_1^b\frac{1}{\sqrt{x}}\ln(x+1)\mathrm{d}x&=2\sqrt{x}\ln(x+1)\Big|_1^b-2\int_1^b\frac{\sqrt{x}}{x+1}\mathrm{d}x\\&=2\sqrt{b}\ln(b+1)-2\ln 2-(4\sqrt{b}-4\arctan\sqrt{b}-4+\pi),\end{aligned}$$

$$\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}}\ln x\,dx = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_1^b - 2\int_1^b \frac{\sqrt{x}}{x}dx = 2\sqrt{b}\ln b - 4\sqrt{b} + 4,$$

故
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\ln\frac{x+1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(2\sqrt{b}\ln\frac{b+1}{b} + 4\arctan\sqrt{b} - 2\ln 2 - \pi\right) = \pi - 2\ln 2.$$

(17) $y = \pm\sqrt{\pi}(x-6)$.

解 由于$\int_{-\infty}^0 e^{-t^2}dt \xlongequal{t=-u} \int_{+\infty}^0 e^{-(-u)^2}(-du) = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,所以

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(5+\frac{9}{x}\right)\int_0^{-x} e^{-t^2}dt + \left(7-\frac{3}{x}\right)\int_0^x e^{-t^2}dt\right]$$
$$= 7\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt - 5\int_{-\infty}^0 e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi},$$
$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}(y - k_1 x) = \lim_{x\to+\infty}(y - \sqrt{\pi}x)$$
$$= \left(-9\int_{-\infty}^0 e^{-t^2}dt - 3\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt\right) + \lim_{x\to+\infty} x\left(5\int_0^{-x} e^{-t^2}dt + 7\int_0^x e^{-t^2}dt - \sqrt{\pi}\right)$$
$$= -6\sqrt{\pi} + \lim_{x\to+\infty}\frac{7\int_0^x e^{-t^2}dt - 5\int_{-x}^0 e^{-t^2}dt - \sqrt{\pi}}{\frac{1}{x}}$$
$$= -6\sqrt{\pi} + \lim_{x\to+\infty}\frac{7e^{-x^2} - 5e^{-x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$
$$= -6\sqrt{\pi} - \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{e^{x^2}} = -6\sqrt{\pi}.$$

同理,可求得

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x} = -\sqrt{\pi},\ b_2 = \lim_{x\to-\infty}(y + \sqrt{\pi}x) = 6\sqrt{\pi},$$

故所求斜渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{\pi}(x-6)$.

三、解答题

(1) 解 (Ⅰ) $I = \int_0^1 x^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{3}x^3 f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1\frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^4}}$

$$= -\frac{1}{6}(1+x^4)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}(1-\sqrt{2}).$$

(Ⅱ) $I = \int_0^1 xf(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)d(x^2) = \frac{1}{2}x^2 f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)dx$

$$= -\int_0^1 x^3 e^{-x^4}dx = \frac{1}{4}e^{-x^4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}(e^{-1}-1),$$

这里 $f(1) = 0$.

注 积分$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$,$\int e^{\pm x^2}dx$,$\int\frac{\sin x}{x}dx$,$\int\frac{\cos x}{x}dx$ 俗称“积不出来”,即原函数不能用初等函数表达.

(2) 解 令 $\sin^2 x = t$,则 $\sin x = \pm\sqrt{t}$,由$\sqrt{x}\geqslant 0$, $\sqrt{1-x}\geqslant 0$,可知 $x\geqslant 0$,$1-x\geqslant 0$,故 $0\leqslant x\leqslant 1$,所以 $\sin x\geqslant 0$.

取 $\sin x = \sqrt{t}$,则 $x = \arcsin\sqrt{t}$,$f(t) = \frac{\arcsin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$,故

$$I = \int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)dx = \int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = -\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}d(1-x)$$

$$= -2\int \arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}(\sqrt{1-x})$$

$$= -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\int \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}(\arcsin\sqrt{x})$$

$$= -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C.$$

(3) 解 $I = \int e^{\sin x}\left(x\cos x - \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x = \int x\cos x\, e^{\sin x}\mathrm{d}x - \int e^{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$= \int x\,\mathrm{d}(e^{\sin x}) + \int e^{\sin x}\mathrm{d}\left(-\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$= x e^{\sin x} - \int e^{\sin x}\mathrm{d}x - \frac{e^{\sin x}}{\cos x} + \int e^{\sin x}\cos x\cdot\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x$$

$$= x e^{\sin x} - \frac{e^{\sin x}}{\cos x} + C.$$

(4) 解 $I = \int \frac{e^{-\sin x}\cdot 2\sin x\cos x}{\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]^2}\mathrm{d}x = \int \frac{e^{-\sin x}\cdot 2\sin x\cos x}{\left[\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2}\right]^2}\mathrm{d}x = 8\int \frac{e^{-\sin x}(-\sin x)\mathrm{d}(-\sin x)}{(1-\sin x)^2}$

$$\xlongequal{-\sin x = u} 8\int e^u\cdot\frac{u}{(1+u)^2}\mathrm{d}u = 8\int e^u\left[\frac{1}{1+u} - \frac{1}{(1+u)^2}\right]\mathrm{d}u$$

$$= 8\left[\int \frac{e^u}{1+u}\mathrm{d}u - \int \frac{e^u}{(1+u)^2}\mathrm{d}u\right]$$

$$= 8\left(\int \frac{e^u}{1+u}\mathrm{d}u + \frac{e^u}{1+u} - \int \frac{e^u}{1+u}\mathrm{d}u\right) + C$$

$$= \frac{8e^u}{1+u} + C = \frac{8e^{-\sin x}}{1-\sin x} + C.$$

(5) 解 令 $\ln x = t$,则 $x = e^t$,故 $f(t) = f(\ln x) = \frac{\ln(1+e^t)}{e^t}$,于是

$$I = \int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}\mathrm{d}x = -\int \ln(1+e^x)\mathrm{d}(e^{-x})$$

$$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int\left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= x - (1+e^{-x})\ln(1+e^x) + C.$$

(6) 解 $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x = f(1) - \int_0^1 x\arctan(x-1)^2\mathrm{d}x$

$$= f(1) - \int_0^1 (x-1+1)\arctan(x-1)^2\mathrm{d}(x-1)$$

$$= f(1) - \int_0^1 (x-1)\arctan(x-1)^2\mathrm{d}(x-1) - \int_0^1 \arctan(x-1)^2\mathrm{d}x$$

$$= f(1) - \int_0^1 (x-1)\arctan(x-1)^2\mathrm{d}(x-1) - \int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x$$

$$= f(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 \arctan(x-1)^2\mathrm{d}[(x-1)^2] - [f(1) - f(0)]$$

$$= -\frac{1}{2}(x-1)^2\arctan(x-1)^2\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x-1)^2\cdot 2(x-1)}{1+(x-1)^4}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{1+(x-1)^4}\mathrm{d}[(x-1)^4]$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln[1+(x-1)^4]\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2.$$

(7) 解 当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+2x^3}-1\sim\frac{1}{2}\cdot 2x^3=x^3$，又

$$\frac{1}{2}\int_0^2 x\sqrt{4-x^2u^2}\,\mathrm{d}u \xlongequal{xu=t} \frac{1}{2}\int_0^{2x}\sqrt{4-t^2}\,\mathrm{d}t,$$

所以

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\int_0^{2x}\sqrt{4-t^2}\,\mathrm{d}t-2x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{4-4x^2}\cdot 2-2}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sqrt{1-x^2}-1)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{1}{2}(-x^2)}{3x^2}=-\frac{1}{3}.$$

(8) 解 由于

$$\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t \xlongequal{x-t=u} \int_x^0 f(u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u,$$

$$\int_0^x tf(x-t)\,\mathrm{d}t \xlongequal{x-t=u} \int_x^0 f(u)\cdot(x-u)(-\mathrm{d}u)=x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u,$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(x)f(x-t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x tf(x-t)\,\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x tf(x-t)\,\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{x\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x tf(x-t)\,\mathrm{d}t}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x tf(x-t)\,\mathrm{d}t} \xlongequal{x-t=u} 2\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u+xf(x)}{\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}=2+2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x^2}}.$$

又由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\times 2=1$，故原式 $=2+2\times\dfrac{2}{1}=6$.

(9) 解 因为 $\int_0^x tf(t^2-x^2)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^x f(t^2-x^2)\,\mathrm{d}(t^2-x^2) \xlongequal{u=t^2-x^2} \frac{1}{2}\int_{-x^2}^0 f(u)\,\mathrm{d}u$，所以 $-\frac{1}{2}\int_0^{-x^2} f(u)\,\mathrm{d}u=\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. 令 $t=-x^2$，得

$$-\frac{1}{2}\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u=\frac{-t}{1-t}-\frac{1}{2}\ln(1-t),$$

上式两边同时对 t 求导，得

$$f(t)=\frac{2}{(1-t)^2}-\frac{1}{1-t}=\frac{1+t}{(1-t)^2},\ t\leqslant 0,$$

即 $f(x)=\dfrac{1+x}{(1-x)^2}$，$x\leqslant 0$.

由 $f'(x)=\dfrac{x+3}{(1-x)^3}$，知 $x=-3$ 为 $(-\infty,0]$ 上的唯一驻点，且可判别当 $x=-3$ 时，$f(x)$ 取得极小值 $f(-3)=-\dfrac{1}{8}$.

(10) 解 $\displaystyle\int_0^{2x}\left|1-\frac{t}{x}\right|\sin t\,\mathrm{d}t \xlongequal{\frac{t}{x}=u} x\int_0^2|1-u|\sin(xu)\,\mathrm{d}u.$

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{x\int_0^2|1-u|\sin(xu)\mathrm{d}u}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left[\int_0^1(1-u)\sin(xu)\mathrm{d}u+\int_1^2(u-1)\sin(xu)\mathrm{d}u\right].$$

再利用分部积分法,可得

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1-\cos 2x}{x}+\frac{\sin 2x-2\sin x}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos 2x}{x^2}+\frac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\cdot(2x)^2}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{2(\cos x-1)\sin x}{x^3}=2-1=1.$$

(11) 解 在已知等式两端同时对 x 求导,得

$$g[f(x)]f'(x)=2x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x-f(x),$$

故 $xf'(x)=2x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x-f(x)$,即 $f'(x)+\frac{1}{x}f(x)=(2+x)\mathrm{e}^x$,解一阶线性微分方程,得

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int(2+x)\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\frac{1}{x}(x^2\mathrm{e}^x+C).$$

又由 $f(2)=1$,知$\frac{1}{2}(4\mathrm{e}^2+C)=1$,解得 $C=2-4\mathrm{e}^2$,故

$$f(x)=x\mathrm{e}^x+\frac{2-4\mathrm{e}^2}{x}\ (x>0).$$

(12) 证 $\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t\xlongequal{2x-t=u}\int_{2x}^x(2x-u)f(u)\mathrm{d}(-u)$

$$=\int_x^{2x}(2x-u)f(u)\mathrm{d}u=2x\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u-\int_x^{2x}uf(u)\mathrm{d}u,$$

故 $2x\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u-\int_x^{2x}uf(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\arctan x^2$,等式两端同时对 x 求导,得

$$2\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u+2x[f(2x)\cdot2-f(x)]-[2xf(2x)\cdot2-xf(x)]=\frac{x}{1+x^4},$$

即 $2\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u-xf(x)=\frac{x}{1+x^4}$. 令 $x=1$,得

$$2\int_1^2f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}+f(1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

故$\int_1^2f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}$.

由推广的积分中值定理,有$\int_1^2f(u)\mathrm{d}u=f(\xi_1)(2-1)=\frac{1}{2}$,即 $f(\xi_1)=\frac{1}{2}(1<\xi_1<2)$.

又 $f(1)=\frac{1}{2}$,由罗尔定理,知至少存在一点 $\xi\in(1,\xi_1)\subset(1,2)$,使得 $f'(\xi)=0$.

(13) 解 $$\int_0^x f(t-x)\mathrm{d}t\xlongequal{t-x=u}\int_{-x}^0f(u)\mathrm{d}u.$$

由已知,有 $\mathrm{e}^{-x}-\frac{x^2}{2}=1+\int_{-x}^0f(u)\mathrm{d}u$,等式两边同时对 x 求导,得 $-\mathrm{e}^{-x}-x=f(-x)$,故

$$f(x)=x-\mathrm{e}^x,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

由 $f'(x)=1-\mathrm{e}^x=0$,解得 $x=0$. 当 $x>0$ 时,$f'(x)<0$;当 $x<0$ 时,$f'(x)>0$,$f(0)=-1$ 为

极大值. 又因为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty,$$

所以在$(-\infty,+\infty)$内 $f(x)$ 的最大值为 $f(0)=-1$,没有最小值.

(14) 解 因为 $f(x)$ 是偶函数,所以只需求 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上的最值即可.

由 $f'(x)=2x(2-x^2)e^{-x^2}=0$,得驻点 $x_1=0,x_2=\sqrt{2}$.

当 $0<x<\sqrt{2}$ 时,$f'(x)>0$;当 $x>\sqrt{2}$ 时,$f'(x)<0$. 又

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\int_0^{+\infty}(2-t)e^{-t}dt=-2e^{-t}\Big|_0^{+\infty}+te^{-t}\Big|_0^{+\infty}+e^{-t}\Big|_0^{+\infty}=1,$$

比较 $f(0)=0,f(\sqrt{2})=1+e^{-2}$,得最小值为 0,最大值为 $1+e^{-2}$.

(15) 证 方法一:利用夹逼准则. 当 $x\in[0,1]$ 时,有 $0\leqslant\dfrac{x^n}{1+x}\leqslant x^n$.

根据定积分的性质,得 $0\leqslant\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\leqslant\int_0^1x^n dx=\frac{1}{n+1}$,故$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=0$.

方法二:利用推广的积分第一中值定理,有

$$\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=\frac{1}{1+\xi}\int_0^1x^n dx=\frac{1}{(1+\xi)(1+n)}\quad(0<\xi<1),$$

故$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\xi)(1+n)}=0$.

注 推广的积分第一中值定理:设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,$g(x)$ 在$[a,b]$上可积且不变号,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得$\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

(16) 解 令 $x_n=\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}$,则

$$\frac{n}{n+1}\left(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}}\right)\frac{1}{n}\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{n}\left(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}}\right).$$

由定积分的定义,有

$$\lim_{n\to\infty}\left(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 2^x dx=\frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1=\frac{1}{\ln 2},$$

而$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$,由夹逼准则,知$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{\ln 2}$.

(17) 解 令 $x_n=\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}$,则

$$x_n=\sqrt[n]{\frac{n}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n+(n-1)}{n}},$$

即 $\ln x_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$,故

$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\ln(1+x)dx=2\ln 2-1=\ln\frac{4}{e}.$$

综上可知,原极限 $=\dfrac{4}{e}$.

(18) 解 (Ⅰ) 由已知,$g^2(x)=-x^2+2x+3$,故

$$g(x)=\sqrt{-x^2+2x+3}.$$

其中 $-x^2+2x+3\geqslant0$,即$(x-3)(x+1)\leqslant0$,故 $g(x)$ 的定义域为$[-1,3]$.

令$(-x^2+2x+3)'=-2x+2=0$,得 $x=1$,故 $g(-1)=g(3)=0$ 为 $g(x)$ 的最小值.

$g(1)=2$ 为 $g(x)$ 的最大值,所以 $g(x)$ 的值域为$[0,2]$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知,$0\leqslant g(x)\leqslant 2$,故

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}e^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n+2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}e^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n+g(x)}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}e^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}.$$

而

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}e^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n+2}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}e^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}\\&=\int_0^1 xe^x\,dx=(xe^x-e^x)\Big|_0^1=1,\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}e^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 xe^x\,dx=1.$$

由夹逼准则,知原极限 $=1$.

(19) 证 $\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+g(x)}dx=\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{1+g(x)}dx+\int_0^a\frac{f(x)}{1+g(x)}dx.$

又$\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{1+g(x)}dx\xlongequal{x=-t}\int_a^0\frac{f(-t)}{1+g(-t)}d(-t)=\int_0^a\frac{f(-x)}{1+g(-x)}dx.$

由 $g(x)\cdot g(-x)=1,f(-x)=f(x)$,有

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+g(x)}dx&=\int_0^a\left[\frac{f(-x)}{1+g(-x)}+\frac{f(x)}{1+g(x)}\right]dx\\&=\int_0^a\frac{f(x)[1+g(x)]+f(x)[1+g(-x)]}{[1+g(-x)][1+g(x)]}dx\\&=\int_0^a\frac{f(x)[2+g(x)+g(-x)]}{2+g(x)+g(-x)}dx\\&=\int_0^a f(x)dx.\end{aligned}$$

解 取 $g(x)=e^x,f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$,则

$$g(x)\cdot g(-x)=e^x\cdot e^{-x}=1,\ f(-x)=f(x),$$

故

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{(1+e^x)\cos^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1.$$

(20) 解 由于$\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛,记$\int_0^{+\infty}f(x)=A$(A 为常数).

对已知等式两边分别积分,得

$$A=\int_0^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx-A\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{1+e^x}dx,$$

其中$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$. 又

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{1+e^x}dx&=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{e^x(1+e^x)}=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{e^x}-\frac{1}{e^x+1}\right)dx\\&=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=1+\ln(1+e^{-x})\Big|_0^{+\infty}=1-\ln 2,\end{aligned}$$

故 $A=\frac{\pi}{2}-(1-\ln 2)A$,解得 $A=\int_0^{+\infty}f(x)dx=\frac{\pi}{2(2-\ln 2)}$.

(21) 证 令 $\tan x=t$，则 $x=\arctan t$，故

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}dt<\int_0^1\frac{t^n}{2t}dt=\frac{t^n}{2n}\Big|_0^1=\frac{1}{2n}<\frac{1}{2n-2}\ (n\geqslant 2).$$

又
$$a_n=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}dt>\int_0^1\frac{t^n}{1+1^2}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{2(n+1)},$$

故 $\frac{1}{2(n+1)}<a_n<\frac{1}{2n-2}$，证毕.

(22) 解 (Ⅰ) $a_n=\int_0^{\pi}x\sin^n x\,dx=-\int_0^{\pi}x\sin^{n-1}x\,d(\cos x)$

$$\begin{aligned}&=\left(-x\sin^{n-1}x\cos x\right)\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}[\sin^{n-1}x+x(n-1)\sin^{n-2}x\cos x]\cos x\,dx\\&=\int_0^{\pi}\sin^{n-1}x\,d(\sin x)+(n-1)\int_0^{\pi}x\sin^{n-2}x(1-\sin^2x)dx\\&=\frac{1}{n}\sin^n x\Big|_0^{\pi}+(n-1)\int_0^{\pi}x\sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int_0^{\pi}x\sin^n x\,dx\\&=(n-1)a_{n-2}-(n-1)a_n,\end{aligned}$$

移项得 $a_n=\frac{n-1}{n}a_{n-2}$.

(Ⅱ) 先证明数列 $\{a_n\}$ 单调递减：

$$a_{n+1}-a_n=\int_0^{\pi}x\sin^n x(\sin x-1)dx<0,$$

因在 $(0,\pi)$ 内，$x\sin^n x>0$，$\sin x-1<0$，故 $\{a_n\}$ 单调递减，从而 $a_n<a_{n-1}<a_{n-2}$. 又由 a_n 表达式知 $a_n>0$，故有

$$\frac{n-1}{n}=\frac{a_n}{a_{n-2}}<\frac{a_n}{a_{n-1}}<\frac{a_n}{a_n}=1,$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1$，由夹逼准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1$.

(23) 解 利用分部积分法，得

$$\begin{aligned}I_n&=\frac{1}{2}\int_0^1\ln^n x\,d(x^2)=\frac{1}{2}x^2\ln^n x\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 n\ln^{n-1}x\cdot\frac{1}{x}\cdot x^2dx\\&=-\frac{n}{2}\int_0^1 x\ln^{n-1}x\,dx=-\frac{n}{2}I_{n-1}\ \text{（这里利用了}\lim_{x\to0^+}x^2\ln^n x=0\text{）}.\end{aligned}$$

由递推公式有

$$\begin{aligned}I_n&=-\frac{n}{2}\left(-\frac{n-1}{2}\right)I_{n-2}=\left(-\frac{n}{2}\right)\left(-\frac{n-1}{2}\right)\left(-\frac{n-2}{2}\right)I_{n-3}=\cdots\\&=\left(-\frac{n}{2}\right)\left(-\frac{n-1}{2}\right)\left(-\frac{n-2}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}\right)I_0,\end{aligned}$$

而 $I_0=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$，故 $I_n=\frac{(-1)^n}{2^n}n!\cdot\frac{1}{2}=\frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}$.

(24) 解 (Ⅰ) 当 $n\geqslant 1$ 时，

$$\begin{aligned}I_n&=\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\int\frac{2nx^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx\\&=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx\end{aligned}$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1},$$

故 $$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left[(2n-1)I_n + \frac{x}{(x^2+a^2)^n}\right],$$

其中 $I_1 = \int \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$

$$\begin{aligned}(\text{Ⅱ})I &= \int \frac{3x+4}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+2x+2} + \int \frac{1}{[(x+1)^2+1]^2}\mathrm{d}(x+1) \\ &= -\frac{3}{2}\frac{1}{(x+1)^2+1} + \int \left\{\frac{1}{(x+1)^2+1} - \frac{(x+1)^2}{[(x+1)^2+1]^2}\right\}\mathrm{d}(x+1) \\ &= -\frac{3}{2}\frac{1}{(x+1)^2+1} + \int \frac{1}{1+(x+1)^2}\mathrm{d}(x+1) + \frac{1}{2}\int (x+1)\mathrm{d}\left[\frac{1}{(x+1)^2+1}\right] \\ &= -\frac{3}{2}\frac{1}{(x+1)^2+1} + \arctan(x+1) + \frac{x+1}{2[(x+1)^2+1]} - \frac{1}{2}\arctan(x+1) + C \\ &= \frac{x-2}{2(x^2+2x+2)} + \frac{1}{2}\arctan(x+1) + C.\end{aligned}$$

(25) **证** 由 $f'(x) = (x-x^2)\sin^{2n}x = 0$,得驻点 $x_1 = 1, x_2 = k\pi(k = 1,2,\cdots)$.

在 $x = k\pi$ 两侧,$f'(x) > 0$,可知 $x = k\pi$ 不是极值点;

在 $x = 1$ 两侧,$f'(x)$ 由正变为负,故 $x = 1$ 是唯一极大值点,从而有 $f(x)$ 在$(0,1]$上单调增加,在$[1,+\infty)$上单调减少,即在 $x = 1$ 处取得最大值,即 $f(1) = \int_0^1 (t-t^2)\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$内的最大值. 又

$$\begin{aligned}f(1) &= \int_0^1 (t-t^2)\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 (t-t^2)t^{2n}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)},\end{aligned}$$

即 $f(1) \leqslant \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$,故不等式成立.

(26) **证**
$$\begin{aligned}\int_a^b f''(x)(x-a)^2\mathrm{d}x &= \int_a^b (x-a)^2\mathrm{d}[f'(x)] \\ &= (x-a)^2 f'(x)\Big|_a^b - \int_a^b 2(x-a)f'(x)\mathrm{d}x \\ &= -2\int_a^b (x-a)\mathrm{d}[f(x)] \\ &= -2\left[(x-a)f(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right] \\ &= 2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)^2\mathrm{d}x.$

注 此题也可以有如下证明:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}(x-a) = (x-a)f(x)\Big|_a^b - \int_a^b (x-a)f'(x)\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_a^b (x-a)f'(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_a^b f'(x)\mathrm{d}[(x-a)^2] \\
&= -\frac{1}{2}\left[(x-a)^2 f'(x)\Big|_a^b - \int_a^b (x-a)^2 f''(x)\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)^2 f''(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

这里将$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 写成$\int_a^b f(x)\mathrm{d}(x-a)$ 的技巧值得注意. 又如下例:

设 $f(x)$ 在$[0,1]$上有连续导数,且 $f(0)=f(1)=0$,证明:

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M}{4},\ M=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\{|f'(x)|\}.$$

证 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right) = f(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x$

$$= 0 - \int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x,$$

故
$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right||f'(x)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\cdot M\mathrm{d}x = M\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x \\
&= M\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\right] = \frac{M}{4}.
\end{aligned}
$$

(27) 证 由已知,得 $y=f(x)$ 的图形如图 3-13 所示.

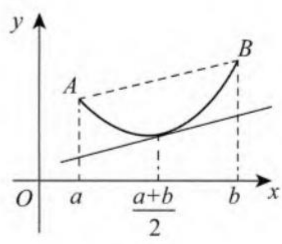


图 3-13

在点$\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$处的切线方程为

$$y = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right),$$

曲线的切线在曲线的下方,故

$$f(x) \geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right),$$

对上式两边分别积分,得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+0,$$

即 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

又 AB 直线段在曲线 $y=f(x)$ 上方,故

$$f(x) \leqslant f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a),$$

对上式两边分别积分,得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\int_a^b (x-a)\mathrm{d}x = \frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a),$$

即$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

综上所述,所证不等式成立.

(28) 证 (Ⅰ) 令 $F(t) = \int_a^t f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^t g^2(x)\mathrm{d}x - \left[\int_a^t f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2, t\in[a,b]$,则 $F(a)=0$,且

$$F'(t) = f^2(t)\int_a^t g^2(x)\mathrm{d}x + g^2(t)\int_a^t f^2(x)\mathrm{d}x - 2f(t)g(t)\int_a^t f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^t[f^2(t)g^2(x)+g^2(t)f^2(x)-2f(t)g(t)f(x)g(x)]\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^t[f(t)g(x)-f(x)g(t)]^2\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

故 $F(t)$ 在 $[a,b]$ 上单调不减,从而 $F(b)\geqslant F(a)=0$. 即

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

(Ⅱ) 由 $f(x)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$(因 $f(a)=0$),以及(Ⅰ)中不等式,知

$$f^2(x)=\left[\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right]^2\leqslant\int_a^x 1^2\mathrm{d}t\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t=(x-a)\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$$
$$\leqslant(x-a)\int_a^{\frac{a+b}{2}}f'(t)\mathrm{d}t\quad\left(若\,a\leqslant x\leqslant\frac{a+b}{2}\right).$$
$$f^2(x)=\left[\int_x^b f'(t)\mathrm{d}t\right]^2\leqslant\int_x^b 1^2\mathrm{d}t\int_x^b f'^2(t)\mathrm{d}t=(b-x)\int_x^b f'^2(t)\mathrm{d}t$$
$$\leqslant(b-x)\int_{\frac{a+b}{2}}^b f'^2(t)\mathrm{d}t\quad\left(若\frac{a+b}{2}\leqslant x\leqslant b\right),$$

故

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}f^2(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f^2(x)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)\mathrm{d}x\int_a^{\frac{a+b}{2}}f'^2(t)\mathrm{d}t+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-x)\mathrm{d}x\int_{\frac{a+b}{2}}^b f'^2(t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{(b-a)^2}{8}\int_a^{\frac{a+b}{2}}f'^2(t)\mathrm{d}t+\frac{(b-a)^2}{8}\int_{\frac{a+b}{2}}^b f'^2(t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{(b-a)^2}{8}\int_a^b f'^2(t)\mathrm{d}t=\frac{(b-a)^2}{8}\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x.$$

注 (Ⅰ)不等式称为柯西积分不等式,也可以采用如下证法:

当 $g(x)\equiv 0$ 时,不等式的等号成立.

当 $g(x)\not\equiv 0$ 时,对任意实数 λ,有

$$\int_a^b[f(x)+\lambda g(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

即 $\lambda^2\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x+2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$. 而 $\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x>0$,则关于 λ 的二次三项式的判别式有

$$\Delta=4\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2-4\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

故 $\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$

(29) **证** 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,则 $F(a)=0,F(b)=0$. 又

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\int_a^b x\,\mathrm{d}[F(x)]=xF(x)\Big|_a^b-\int_a^b F(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b F(x)\mathrm{d}x=0,$$

由推广的积分中值定理,得 $-\int_a^b F(x)\mathrm{d}x=-F(\xi)(b-a)=0(a<\xi<b)$,故 $F(\xi)=0$.

$F(x)$ 在 $[a,\xi]$,$[\xi,b]$ 上应用罗尔定理,有

$$F'(\xi_1)=0,F'(\xi_2)=0\ (a<\xi_1<\xi,\xi<\xi_2<b),$$

即 $f(\xi_1)=0,f(\xi_2)=0$.

注 此题也可采用反证法证明.

由已知条件存在 $\xi_1\in(a,b)$,使得 $f(\xi_1)=0$,否则对 $\forall x\in(a,b)$,$f(x)\neq 0$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$

上恒正或恒负，与$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$矛盾.

又存在$\xi_2\in(a,b),\xi_2\neq\xi_1$，使得$f(\xi_2)=0$，否则$(x-\xi_1)f(x)$在$[a,\xi_1]$和$[\xi_1,b]$上恒正或恒负，则$\int_a^b(x-\xi_1)f(x)\mathrm{d}x\neq0$与$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x-\xi_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$矛盾，故存在不同的$\xi_1,\xi_2\in(a,b)$，使得$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

(30) 证 由$\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=0$及

$$f(a)-g(a)>0,\ f(b)-g(b)>0,$$

可知至少存在一点$\eta\in(a,b)$，使得$f(\eta)-g(\eta)<0$(若对任意$x\in(a,b)$，都有$f(x)-g(x)\geqslant0$. 则$\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x>0$，与已知矛盾).

由零点定理，知存在点$\xi_1\in(0,\eta),\xi_2\in(\eta,b)$，使得

$$f(\xi_1)-g(\xi_1)=0,\ f(\xi_2)-g(\xi_2)=0.$$

在$[a,\xi_1]$与$[\xi_2,b]$上对$f(x)-g(x)$分别应用拉格朗日中值定理，则存在$\eta_1\in(a,\xi_1),\eta_2\in(\xi_2,b)$，使得

$$f'(\eta_1)-g'(\eta_1)=\frac{f(\xi_1)-g(\xi_1)-[f(a)-g(a)]}{\xi_1-a}<0,$$

$$f'(\eta_2)-g'(\eta_2)=\frac{f(b)-g(b)-[f(\xi_2)-g(\xi_2)]}{b-\xi_2}>0.$$

在$[\eta_1,\eta_2]$上，再用拉格朗日中值定理，则存在$\xi\in(\eta_1,\eta_2)$，使得

$$f''(\xi)-g''(\xi)=\frac{f'(\eta_2)-g'(\eta_2)-[f'(\eta_1)-g'(\eta_1)]}{\eta_2-\eta_1}>0,$$

即$f''(\xi)>g''(\xi)$.

(31) 证 (Ⅰ)令$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t$，则$F(x)$在$[0,x]$上可导，应用拉格朗日中值定理，并注意到$F(0)=0$，存在$\theta\in(0,1)$，使得$F(x)-F(0)=F'(0+\theta x)x$，即

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)].$$

(Ⅱ)将(Ⅰ)中式子变形为$\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\dfrac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{x}$，等式两边分别取极限，有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{x},$$

则　左边$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(-x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{f(x)-f(0)}{x}+\dfrac{f(-x)-f(0)}{-x}\right]=f'(0)=A$，

右边$=\lim\limits_{x\to0^+}\theta\left[\dfrac{f(\theta x)-f(0)}{\theta x}+\dfrac{f(-\theta x)-f(0)}{-\theta x}\right]=2\lim\limits_{x\to0^+}\theta f'(0)=2A\lim\limits_{x\to0^+}\theta$，

故$A=2A\lim\limits_{x\to0^+}\theta$，由$A\neq0$，可得$\lim\limits_{x\to0^+}\theta=\dfrac{1}{2}$.

(32) 证 (Ⅰ)依题设，需证存在$x_0\in(0,1)$，使得$x_0f(x_0)=\int_{x_0}^1 f(t)\mathrm{d}t$.

注意到$\left[x\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t\right]'=\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t-xf(x)$，令辅助函数$F(x)=x\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$，则$F(0)=F(1)=0$.

由罗尔定理，知存在一点$x_0\in(0,1)$，使$F'(x_0)=0$，即$x_0f(x_0)=\int_{x_0}^1 f(t)\mathrm{d}t$.

(Ⅱ)令$\varphi(x)=\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t-xf(x),\ x\in(0,1)$，则

$$\varphi'(x)=-f(x)-f(x)-xf'(x)=-2f(x)-xf'(x).$$

由已知条件 $f'(x)>-\dfrac{2f(x)}{x}$,知 $\varphi'(x)<0$,即 $f(x)$ 在$(0,1)$内严格单调减少,故(Ⅰ)中的 x_0 是 $\varphi(x)$ 的唯一零点.

(33) **解** (Ⅰ)由已知 $f'(1)=0$,即$(a^2x^2-4ax+3)\Big|_{x=1}=a^2-4a+3=0$,解得 $a=3,a=1$. 又

$$f''(x)=2a^2x-4a,\ f''(1)=2a^2-4a,$$

当 $a=3$ 时,$f''(1)=6>0$;当 $a=1$ 时,$f''(1)=-2<0$.

由已知 $f(1)=0$ 为极小值,故 $a=3$,所以 $f'(x)=9x^2-12x+3$,于是

$$f(x)=f(1)+\int_1^x f'(t)\mathrm{d}t=0+\int_1^x(9t^2-12t+3)\mathrm{d}t=3x^3-6x^2+3x.$$

令 $f'(x)=0$,得 $f(x)$ 的另一个驻点为 $x=\dfrac{1}{3}$,且 $f''\left(\dfrac{1}{3}\right)=-6<0$,所以 $f(x)$ 的极大值为 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{9}$.

证 (Ⅱ)利用换元法证明.

$$\int_0^1\sqrt{f(ut)}\,\mathrm{d}t\xlongequal{ut=x}\int_0^u\sqrt{f(x)}\cdot\frac{1}{u}\mathrm{d}x=\frac{1}{u}\int_0^u\sqrt{f(x)}\,\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\frac{1}{u}\int_0^1\sqrt{f(x)}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{u}\int_0^1\sqrt{\frac{4}{9}}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3u},\ u\in(0,1),$$

显然有$\int_0^1\sqrt{f(ut)}\,\mathrm{d}t\geqslant 0$,故原不等式成立.

(34) **证** (Ⅰ)利用换元法证明.

$$\int_0^{nT}xf(x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=nT-t}nT\int_0^{nT}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{nT}tf(t)\mathrm{d}t,$$

移项得$\int_0^{nT}xf(x)\mathrm{d}x=\dfrac{nT}{2}\int_0^{nT}f(x)\mathrm{d}x$.

又 $f(x+T)=f(x)$,故$\int_0^{nT}f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$,所以

$$\int_0^{nT}xf(x)\mathrm{d}x=\frac{n^2T}{2}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

解 (Ⅱ)$|\cos x|$ 是以 π 为周期的偶函数,由(Ⅰ)知

$$I=\int_0^{n\pi}x|\cos x|\mathrm{d}x=\frac{n^2\pi}{2}\int_0^{\pi}|\cos x|\mathrm{d}x$$
$$=\frac{n^2\pi}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)\mathrm{d}x\right]=n^2\pi.$$

注 结论:设 $f(x+T)=f(x)$,则$\int_0^{nT}f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$. 证明见《2026 考研数学高等数学辅导讲义》.

(35) **证** 由积分中值定理,有

$$\lim_{a\to0^+}\frac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]\mathrm{d}t=\lim_{a\to0^+}\frac{1}{2a}[f(\xi+a)-f(\xi-a)],\ -a\leqslant\xi\leqslant a.$$

$f(x)$ 在$[\xi-a,\xi+a]$上使用拉格朗日中值定理,

$$f(\xi+a)-f(\xi-a)=2af'(\eta),\ \xi-a<\eta<\xi+a.$$

而 $f'(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,故原式 $=\lim\limits_{a\to0^+}f'(\eta)=\lim\limits_{a\to0^+}f'(\xi)=f'(0)$.

注 此题也可利用积分换元法及洛必达法则证明,证明如下:

$$\int_{-a}^{a}f(t+a)\mathrm{d}t\xlongequal{t+a=u}\int_0^{2a}f(u)\mathrm{d}u,\int_{-a}^{a}f(t-a)\mathrm{d}t\xlongequal{t-a=u}-\int_0^{-2a}f(u)\mathrm{d}u,$$

$$\text{故原式}=\lim_{a\to 0^+}\frac{\int_0^{2a}f(u)\mathrm{d}u+\int_0^{-2a}f(u)\mathrm{d}u}{4a^2}=\lim_{a\to 0^+}\frac{2f(2a)-2f(-2a)}{8a}$$
$$=\lim_{a\to 0^+}\frac{2f'(2a)+2f'(-2a)}{4}=f'(0).$$

(36) 解 （Ⅰ）$y=a\sqrt{x}$，$y=\ln\sqrt{x}$ 的导数分别为

$$y'=\frac{a}{2\sqrt{x}},\ y'=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2x}.$$

如图 3-14 所示，由于两曲线在(x_0,y_0)处有公切线，则

$$\begin{cases}a\sqrt{x_0}=\ln\sqrt{x_0},\\ \dfrac{a}{2\sqrt{x_0}}=\dfrac{1}{2x_0},\end{cases}$$

解得 $x_0=\mathrm{e}^2$，$a=\mathrm{e}^{-1}$，切点为$(\mathrm{e}^2,1)$.

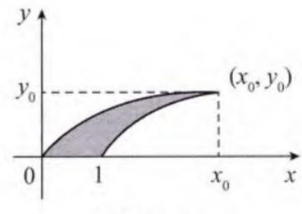


图 3-14

（Ⅱ）
$$V=\int_0^{\mathrm{e}^2}\pi\left(\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}}\right)^2\mathrm{d}x-\int_1^{\mathrm{e}^2}\pi(\ln\sqrt{x})^2\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\pi}{\mathrm{e}^2}\int_0^{\mathrm{e}^2}x\,\mathrm{d}x-\frac{\pi}{4}\int_1^{\mathrm{e}^2}(\ln x)^2\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^2-\frac{\pi}{4}\left[x(\ln x)^2-2x\ln x+2x\right]\Big|_1^{\mathrm{e}^2}$$
$$=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^2-\frac{\pi}{2}(\mathrm{e}^2-1)=\frac{\pi}{2}.$$

(37) 证 如图 3-15 所示，依题设，需证明存在唯一的 ξ，使得

$$S_1(\xi)-kS_2(\xi)=0.$$

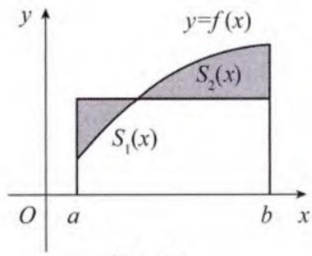


图 3-15

设 $F(x)=S_1(x)-kS_2(x)$，即证明存在唯一的 ξ，使$F(\xi)=0$. 又

$$S_1(x)=(x-a)f(x)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$
$$S_2(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t-(b-x)f(x),$$

所以 $S_1(a)=0$，$S_2(b)=0$. 于是

$$F(a)=-kS_2(a)=-k\left[\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-(b-a)f(a)\right]$$
$$=-k\int_a^b[f(t)-f(a)]\mathrm{d}t,$$
$$F(b)=f(b)(b-a)-\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b[f(b)-f(t)]\mathrm{d}t.$$

又由 $f'(x)>0$，知 $f(a)<f(x)<f(b)$. 又由 $k>0$，知 $F(a)<0$，$F(b)>0$. 由连续函数的零点定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F(\xi)=0$，即$\dfrac{S_1(\xi)}{S_2(\xi)}=k$.

再证 ξ 的唯一性. 由

$$F'(x)=S_1'(x)-kS_2'(x)$$
$$=f'(x)(x-a)+f(x)-f(x)-k[-f(x)-f'(x)(b-x)+f(x)]$$
$$=f'(x)(x-a)+kf'(x)(b-x)>0,$$

可知 $F(x)$ 在(a,b)内严格单调增加，故 ξ 是唯一的.

(38) 解
$$\int_0^2 x\sqrt{12-x^2u^2}\,\mathrm{d}u\xlongequal{xu=t}\int_0^{2x}\sqrt{12-t^2}\,\mathrm{d}t,$$

故 $4y=\int_0^{2x}\sqrt{12-t^2}\,\mathrm{d}t$. 两边同时对 x 求导，得

$$y'=\frac{1}{4}\sqrt{12-4x^2}\cdot 2=\sqrt{3-x^2}.$$

曲线的全长为

$$s=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=2\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=2\times\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(39) **解** 如图 3-16 所示,D 的边界方程分别为

$$x=1-\sqrt{1-y^2},\ x=y\quad(0\leqslant y\leqslant 1).$$

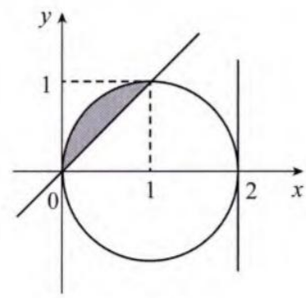


图 3-16

任取$[y,y+\mathrm{d}y]\subset[0,1]$,则

$$\mathrm{d}V=\{\pi[2-(1-\sqrt{1-y^2})]^2-\pi(2-y)^2\}\mathrm{d}y$$
$$=2\pi[\sqrt{1-y^2}-(1-y)^2]\mathrm{d}y,$$

故

$$V=\int_0^1 2\pi[\sqrt{1-y^2}-(1-y)^2]\mathrm{d}y$$
$$=2\pi\left[\frac{y}{2}\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{2}\arcsin y+\frac{1}{3}(1-y)^3\right]\Big|_0^1$$
$$=2\pi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right).$$

注 此题也可以如下计算:

$$V=2\pi\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y+2\pi\int_0^1(1-y)^2\mathrm{d}(1-y)=2\pi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right).$$

(40) **解** 先求 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\sqrt{\sin x}\ (x\geqslant 0)$ 的定义域.

由 $\sin x\geqslant 0$,知 $x\in[2k\pi,(2k+1)\pi](k=0,1,2,\cdots)$,如图 3-17 所示.

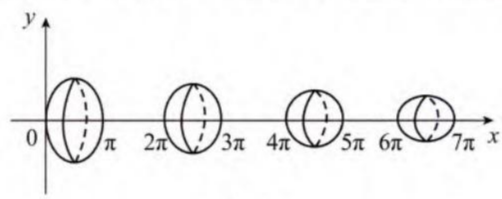


图 3-17

则所求体积为

$$V=\sum_{k=0}^{\infty}\pi\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\mathrm{e}^{-2x}\sin x\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=t+2k\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\pi\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-2(2k\pi+t)}\sin t\,\mathrm{d}t$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\pi\mathrm{e}^{-4k\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-2t}\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi(1+\mathrm{e}^{-2\pi})}{5}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-4k\pi}\quad\text{(等比级数求和)}$$
$$=\frac{\pi(1+\mathrm{e}^{-2\pi})}{5}\cdot\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-4\pi}}=\frac{\pi}{5(1-\mathrm{e}^{-2\pi})}.$$

(41) **解** (Ⅰ) 如图 3-18 所示,

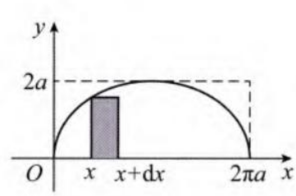


图 3-18

$$V_x=\pi\int_0^{2\pi a}y^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\cdot a(1-\cos t)\mathrm{d}t$$
$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\mathrm{d}t=8\pi a^3\int_0^{2\pi}\sin^6\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$
$$=32\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 u\,\mathrm{d}u=5\pi^2a^3,$$

$$V_y=2\pi\int_0^{2\pi a}xy\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^{2\pi}a^3(t-\sin t)(1-\cos t)^2\mathrm{d}t$$

$$= 2\pi a^3\int_0^{2\pi}(t-2t\cos t+t\cos^2 t-\sin t+2\sin t\cos t-\sin t\cos^2 t)\mathrm{d}t = 6\pi^3 a^3.$$

(Ⅱ) $V_{y=2a} = \pi(2a)^2\cdot 2\pi a-\int_0^{2\pi a}\pi(2a-y)^2\mathrm{d}x = 8\pi^2a^3-\pi\int_0^{2\pi}[2a-a(1-\cos t)]^2\cdot a(1-\cos t)\mathrm{d}t$

$$= 8\pi^2a^3-\pi a^3\int_0^{2\pi}(1+\cos t)^2(1-\cos t)\mathrm{d}t$$

$$= 8\pi^2a^3-\pi a^3\int_0^{2\pi}\sin^2 t(1+\cos t)\mathrm{d}t = 7\pi^2a^3.$$

(42) 解 $(x-2)^2+y^2=1$ 的参数方程为

$$\begin{cases}x=2+\cos t,\\ y=\sin t,\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi,$$

所求表面积为

$$S = 2\pi\int_0^{2\pi}x(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi}(2+\cos t)\sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi}(2+\cos t)\mathrm{d}t = 8\pi^2.$$

注 此题不宜用直角坐标下的公式求解. 公式如下：

$$S_{侧} = \int_c^d 2\pi\varphi(y)\sqrt{1+\varphi'^2(y)}\,\mathrm{d}y.$$

(43) 解 双纽线如图 3-19 所示，由对称性，考虑 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则

$$S_{侧} = 2\times 2\pi\times\int_0^{\frac{\pi}{4}}r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta.$$

由 $r^2=a^2\cos 2\theta$，得 $2r\cdot r'=-2a^2\sin 2\theta$，故

$$r' = -\frac{a^2\sin 2\theta}{r},$$

$$r^2+r'^2 = \frac{r^2\cdot a^2\cos 2\theta}{r^2}+\frac{a^4\sin^2 2\theta}{r^2}$$

$$= \frac{a^4\cos^2 2\theta}{r^2}+\frac{a^4\sin^2 2\theta}{r^2} = \frac{a^4}{r^2},$$

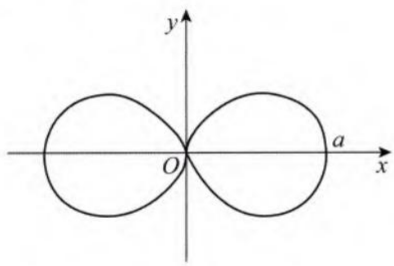


图 3-19

故

$$S_{侧} = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}r\sin\theta\cdot\frac{a^2}{r}\mathrm{d}\theta$$

$$= 4\pi a^2(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 4\pi a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 2\pi a^2(2-\sqrt{2}).$$

注 $S_{侧} = 2\pi\int_a^b y\cdot\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x.$

(44) 解 平面区域 D 如图 3-20 所示.

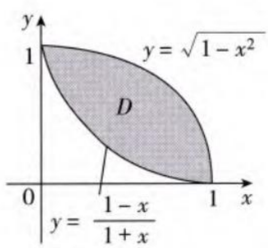


图 3-20

$$V = 2\pi\int_0^1 x\left(\sqrt{1-x^2}-\frac{1-x}{1+x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi\left(\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{x-x^2}{1+x}\mathrm{d}x\right)$$

$$=2\pi\left[-\frac{1}{2}\int_0^1(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2)-\int_0^1\left(-x+\frac{2x}{1+x}\right)\mathrm{d}x\right]$$

$$=2\pi\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1+\int_0^1 x\,\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{2x}{1+x}\mathrm{d}x\right]$$

$$=2\pi\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2(1-\ln 2)\right]$$

$$=2\pi\left(2\ln 2-\frac{7}{6}\right).$$

(45) 解 由已知得

$$V_n=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^{\frac{n}{2}}x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x,$$

$$\pi S_n=\pi\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sin t}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cdot\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,\mathrm{d}t-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}t\,\mathrm{d}t=V_n-V_{n+2}.$$

而

$$V_{n+2}=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}t\,\mathrm{d}t=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}t\,\mathrm{d}(\cos t)$$

$$=-\pi\left[\cos t\cdot\sin^{n+1}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot(n+1)\sin^n t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t\right]$$

$$=\pi(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cdot(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t=(n+1)V_n-(n+1)V_{n+2},$$

整理得 $V_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}V_n$,所以

$$\pi S_n=V_n-V_{n+2}=V_n-\frac{n+1}{n+2}V_n=\frac{1}{n+2}V_n,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi S_n}{V_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+2}=0.$

(46) 解 (Ⅰ) 当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x}{1+x^2-\mathrm{e}^{tx}}=0.$

当 $x<0$ 时,$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x}{1+x^2-\mathrm{e}^{tx}}=\dfrac{x}{1+x^2}$,即

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{x}{1+x^2}, & x<0.\end{cases}$$

可求得 $y=f(x)$ 与 $y=\dfrac{1}{2}x$ 的交点为 $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$,$(0,0)$.

如图 3-21 所示,则 D 的面积为

$$A=\int_{-1}^0\left(\frac{1}{2}x-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1$$

$$=\frac{1}{4}+\left[\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]\Big|_{-1}^0=\frac{1}{2}\ln 2.$$

(Ⅱ) 图中 $x\geqslant 0$ 部分绕 x 轴旋转为圆锥体,其体积为

$$V_1=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 1=\frac{\pi}{12}.$$

图中 $x\leqslant 0$ 部分绕 x 轴旋转所得体积为

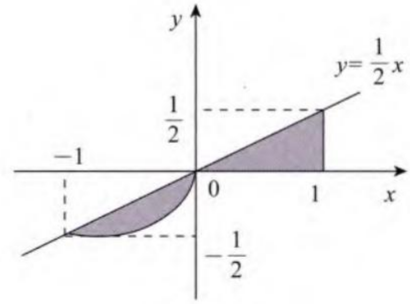


图 3-21

$$V_2=\int_{-1}^{0}\pi y^2\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 1=\pi\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x-\frac{\pi}{12}.$$

故所求体积为

$$\begin{aligned}V=V_1+V_2&=\frac{\pi}{12}+\pi\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x-\frac{\pi}{12}=\pi\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x\\&=\pi\left[\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int_{-1}^{0}\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x\right]\\&=\pi\left[\arctan x\Big|_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x\right]\\&=\pi\left[0-\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\int_{-1}^{0}\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x\right].\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}&\xlongequal{x=\tan u}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\sec^2u}{(1+\tan^2u)^2}\mathrm{d}u=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{1}{\sec^2u}\mathrm{d}u\\&=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\cos^2u\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(1+\cos 2u)\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{2}\sin 2u\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right),\end{aligned}$$

故 $V=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}$.

(47) 解（Ⅰ）

$$\begin{aligned}a_n&=2\pi\int_{0}^{n\pi}x\mid\sin x\mid\mathrm{d}x\\&\xlongequal{x=n\pi-t}2\pi\int_{0}^{n\pi}(n\pi-t)\mid\sin(n\pi-t)\mid\mathrm{d}t\\&=2n\pi^2\int_{0}^{n\pi}\mid\sin t\mid\mathrm{d}t-a_n,\end{aligned}$$

移项可得

$$a_n=n\pi^2\int_{0}^{n\pi}\mid\sin t\mid\mathrm{d}t=n^2\pi^2\int_{0}^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t=2n^2\pi^2.$$

（Ⅱ）由（Ⅰ）知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k\pi^2}{a_n}\sin\frac{k\pi}{2n}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\frac{k\pi}{2n}\\&=\frac{4}{\pi^2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k\left(\frac{\pi}{2}-0\right)}{n}\sin\frac{k\left(\frac{\pi}{2}-0\right)}{n}\right]\cdot\frac{\frac{\pi}{2}-0}{n}\\&=\frac{4}{\pi^2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{4}{\pi^2}\left(x\cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x\right)=\frac{4}{\pi^2}.\end{aligned}$$

(48) 解 建立如图 3-22 所示的坐标系，圆的方程为

$$x^2+(y-R)^2=R^2.$$

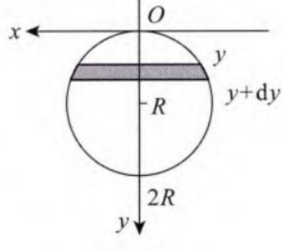


图 3-22

用微元法.

任取$[y,y+\mathrm{d}y]\subset[0,2R]$，将球从水中取出恰好离开水面时，薄片$[y,y+\mathrm{d}y]$行程为 $2R$，其中在水中移动的距离为 y，由于球与水的密度相等，所以重力与浮力的合力为零，故球在水中移动所做功为零；在水面以上移动的距离为 $2R-y$，故克服重力做功的微元为

$$\mathrm{d}W=\rho g(2R-y)\pi x^2\mathrm{d}y=\rho g\pi(2R-y)[R^2-(y-R)^2]\mathrm{d}y,$$

则 $W=\int_0^{2R}\mathrm{d}W=\int_0^{2R}\rho g\pi(2R-y)[R^2-(y-R)^2]\mathrm{d}y=\frac{4}{3}\pi\rho g R^4$.

(49) **解** 如图 3-23(a) 所示,直线 AC 的方程为 $y=\frac{b(h-x)}{h}$.

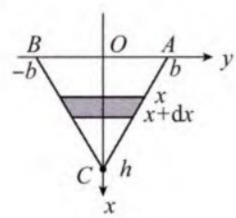
用微元法. 任取$[x,x+\mathrm{d}x]\subset[0,h]$,则 $\mathrm{d}P_1=2\rho gxy\mathrm{d}x=\frac{2\rho gb}{h}(h-x)x\mathrm{d}x$,故

$$P_1=\int_0^h\mathrm{d}P_1=\int_0^h\frac{2\rho gb}{h}(h-x)x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\rho gbh^2.$$

如图 3-23(b) 所示,直线 OA 方程为 $y=\frac{bx}{h}$, 则 $\mathrm{d}P_2=2\rho gxy\mathrm{d}x=\frac{2\rho gb}{h}x^2\mathrm{d}x$,故

$$P_2=\int_0^h\mathrm{d}P_2=\int_0^h\rho g\,\frac{2b}{h}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\rho gbh^2.$$

所以$\frac{P_2}{P_1}=2$,即 $P_2=2P_1$.



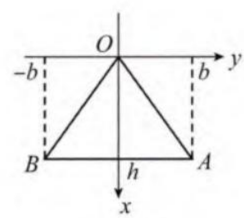


图 3-23

(50) **解** (Ⅰ) 曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases}x=r\cos\theta=(1+\cos\theta)\cos\theta,\\ y=r\sin\theta=(1+\cos\theta)\sin\theta,\end{cases}$$

则
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}=\frac{\cos\theta+\cos 2\theta}{-\sin\theta-\sin 2\theta},\ \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=1-\sqrt{2}.$$

当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时,有 $x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$,$y=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$,故切线 T 的方程为

$$y-\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})=(1-\sqrt{2})\left[x-\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\right],$$

即 $y=(1-\sqrt{2})x+1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(Ⅱ) 所围图形为如图 3-24 所示的阴影部分. 曲边三角形 AOP 的面积为

$$\begin{aligned}A_1&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=\frac{3}{16}\pi+\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

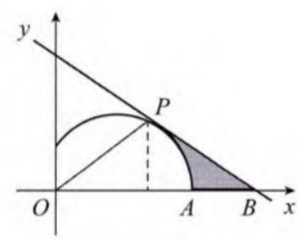


图 3-24

由(Ⅰ)知,切线的方程为 $y=(1-\sqrt{2})x+1+\frac{\sqrt{2}}{2}$. 令 $y=0$,得 x 轴上截距为$x=2+\frac{3}{2}\sqrt{2}$,故所求面积为

$$S=\frac{1}{2}\times\left(2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\times\frac{1+\sqrt{2}}{2}-\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{9}{8}-\frac{3\pi}{16}+\frac{3\sqrt{2}}{8}.$$

(51) 解 曲线的图形如图 3-25 所示.

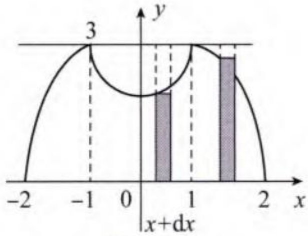


图 3-25

由已知及对称性，只需考虑 $x\in[0,2]$ 的情况，

$$y=3-|x^2-1|=\begin{cases}x^2+2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 4-x^2, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

用微元法.

任取 $[x,x+\mathrm{d}x]\subset[0,1]$，$[0,1]$ 上体积记为 V_1，$[1,2]$ 上体积记为 V_2，则 $\mathrm{d}V_1=\pi\{3^2-[3-(x^2+2)]^2\}\mathrm{d}x$.

同理 $\mathrm{d}V_2=\pi\{3^2-[3-(4-x^2)]^2\}\mathrm{d}x$，故

$$V=2(V_1+V_2)=2\pi\int_0^1(8+2x^2-x^4)\mathrm{d}x+2\pi\int_1^2(8+2x^2-x^4)\mathrm{d}x=\frac{448\pi}{15}.$$

(52) 解 心形线 $r=4(1+\cos\theta)$ 的参数方程为

$$\begin{cases}x=4(1+\cos\theta)\cos\theta,\\ y=4(1+\cos\theta)\sin\theta.\end{cases}$$

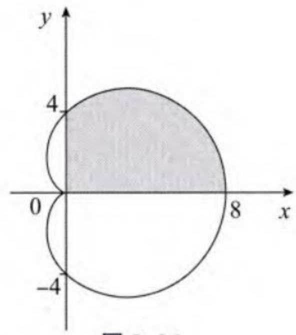


图 3-26

心形线的图形如图 3-26 所示，则

$$\begin{aligned}V&=\int_0^8\pi y^2\mathrm{d}x\\&=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\pi\cdot 16(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta\cdot 4(-\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta)\mathrm{d}\theta\\&=64\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta)^2\sin^3\theta(1+2\cos\theta)\mathrm{d}\theta=160\pi.\end{aligned}$$

注 极坐标下计算旋转体体积：先将极坐标方程化为参数方程，再用直角坐标下公式计算.

(53) 解 (Ⅰ) 依题设，有

$$\begin{aligned}S(\alpha)&=\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^{\alpha+1}}=\int_2^{+\infty}(\ln x)^{-\alpha-1}\mathrm{d}(\ln x)\\&=-\frac{1}{\alpha}(\ln x)^{-\alpha}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{\alpha(\ln 2)^{\alpha}}.\end{aligned}$$

(Ⅱ) 令 $f(\alpha)=\alpha(\ln 2)^{\alpha}$，则由

$$f'(\alpha)=(\ln 2)^{\alpha}+\alpha\cdot(\ln 2)^{\alpha}\cdot\ln(\ln 2)=(\ln 2)^{\alpha}[1+\alpha\ln(\ln 2)]=0,$$

得 $\alpha_0=-\dfrac{1}{\ln(\ln 2)}$ 是唯一驻点.

当 $\alpha<-\dfrac{1}{\ln(\ln 2)}$ 时，$f'(\alpha)>0$；当 $\alpha>-\dfrac{1}{\ln(\ln 2)}$ 时，$f'(\alpha)<0$. 故

$$f(\alpha_0)=-\frac{1}{\ln(\ln 2)}(\ln 2)^{-\frac{1}{\ln(\ln 2)}}=-\frac{1}{\ln(\ln 2)}\cdot\frac{1}{(\ln 2)^{\frac{1}{\ln(\ln 2)}}}$$

为最大值，所以 $S(\alpha)$ 的最小值为 $\dfrac{1}{f(\alpha_0)}=-\ln(\ln 2)\cdot(\ln 2)^{\frac{1}{\ln(\ln 2)}}$.

(54) 证

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\left[f(k)-\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\right]+\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x. \qquad ①$$

由于 $f(x)$ 单调减少，所以

$$f(k+1)=\int_k^{k+1}f(k+1)\mathrm{d}x\leqslant\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_k^{k+1}f(k)\mathrm{d}x=f(k),$$

故 $a_{n+1}-a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}f(k)-\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x+\int_1^{n}f(x)\mathrm{d}x=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant 0$，

所以$\{a_n\}$单调减少. 又由 ① 式,知

$$f(k)-\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0,\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

故$\{a_n\}$有下界 0. 再由单调有界准则,知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.

(55) 解

$$b_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^n x\,\mathrm{d}x=2^{-n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n 2x\,\mathrm{d}(2x)=2^{-n-1}\int_0^{\pi}\sin^n x\,\mathrm{d}x$$

$$=2^{-n-1}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=2^{-n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x.$$

记$c_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$,则$b_n=2^{-n}c_n$,

$$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cdot\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}t\,\mathrm{d}t=c_n-c_{n+2}.$$

又

$$c_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}t\,\mathrm{d}t=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}t\,\mathrm{d}(\cos t)$$

$$=-\left[\cos t\cdot\sin^{n+1}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot(n+1)\sin^n t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t\right]$$

$$=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t=(n+1)c_n-(n+1)c_{n+2},$$

移项得$c_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}c_n$,故

$$a_n=c_n-c_{n+2}=\frac{1}{n+2}c_n=\frac{1}{n+2}\cdot 2^n b_n,$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{2^n}=0.$

(56) 证 依题意,如图 3-27 所示,即证明存在唯一的$\xi\in(a,b)$,使得

$$\int_a^{\xi}[f(\xi)-f(x)]\mathrm{d}x=3\int_{\xi}^{b}[f(x)-f(\xi)]\mathrm{d}x.$$

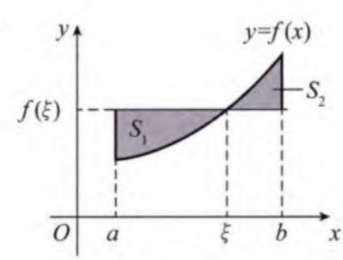


图 3-27

考虑应用零点定理. 令

$$F(x)=\int_a^x[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t-3\int_x^b[f(t)-f(x)]\mathrm{d}t,$$

注意到$f'(x)>0$,由推广的积分中值定理,得

$$F(a)=-3\int_a^b[f(t)-f(a)]\mathrm{d}t$$

$$=-3(b-a)[f(\xi_1)-f(a)]<0\ (a<\xi_1<b),$$

$$F(b)=\int_a^b[f(b)-f(t)]\mathrm{d}t$$

$$=(b-a)[f(b)-f(\xi_2)]>0\ (a<\xi_2<b).$$

由零点定理,知存在一点$\xi\in(a,b)$,使得$F(\xi)=0$,即$S_1=3S_2$. 又

$$F'(x)=f'(x)[(x-a)+3(b-x)]>0,$$

故$F(x)$严格单调增加,即ξ是唯一的.

(57) 解 由$r=3\cos\theta$,知$r^2=3r\cos\theta$,其在直角坐标下为

$$x^2+y^2=3x,$$

此图形为一个圆周,如图 3-28 所示.

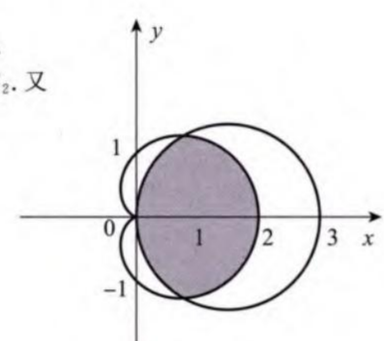


图 3-28

解方程组$\begin{cases} r=1+\cos\theta, \\ r=3\cos\theta, \end{cases}$得$\theta=\dfrac{\pi}{3}$,故所围公共部分图形的面积为

$$\begin{aligned}
A &= 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}9\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\right] \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}9\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta+\frac{9}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \left(\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{9}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{5}{4}\pi.
\end{aligned}$$

(58) 解（Ⅰ）依题意,如图 3-29 所示.

由 $y=kx^2$ 与 $y=\sin x$ 交于唯一点$(t,\sin t)$,知 k 与 t 的关系为 $k=\dfrac{\sin t}{t^2}$. 又 k 在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调减少,于是存在反函数 $t=t(k)$,使得 $\dfrac{4}{\pi^2}\leqslant k<+\infty$ 与 $0<t\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 一一对应,故

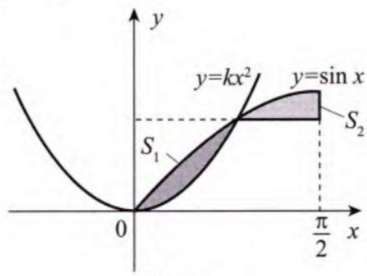


图 3-29

$$\begin{aligned}
f(t) &\xlongequal{\text{记}} S_1(t)+S_2(t)=\int_0^t\left(\sin x-\frac{\sin t}{t^2}x^2\right)\mathrm{d}x+\int_t^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\sin t)\mathrm{d}x \\
&= 1-\frac{1}{3}t\sin t-\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin t \\
&= 1+\frac{2}{3}t\sin t-\frac{\pi}{2}\sin t,\ t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right].
\end{aligned}$$

证（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f'(t)=\dfrac{2}{3}\sin t+\dfrac{2}{3}t\cos t-\dfrac{\pi}{2}\cos t$,

$$f'_+(0)=-\frac{\pi}{2}<0,\ f'_-\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{3}>0.$$

对 $f'(t)$ 应用零点定理,知存在一点 $t_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,使得 $f'(t_0)=0$. 又由于

$$f''(t)=\frac{4}{3}\cos t+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}t\right)\sin t>0\ \left(0<t\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

故 $f(t)$ 在 $0<t\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 上有唯一极小值点 t_0,且在该点处 S_1+S_2 有最小值.

(59) 解（Ⅰ）曲线 L 如图 3-30 所示. 由 $y=\tan x^2\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$,得

$$x=\sqrt{\arctan y},\ 0\leqslant y\leqslant 1,$$

故

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^1 x^2(y)\mathrm{d}y=\pi\int_0^1\arctan y\,\mathrm{d}y \\
&= \pi y\arctan y\Big|_0^1-\pi\int_0^1\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y \\
&= \frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}\ln(1+y^2)\Big|_0^1 \\
&= \frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}\ln 2.
\end{aligned}$$

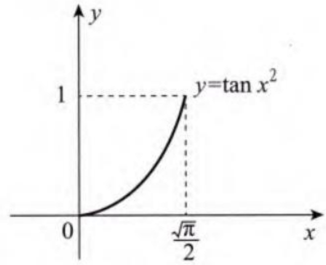


图 3-30

证（Ⅱ）由于

$$W=\rho g\pi\int_0^1(1-y)\arctan y\,\mathrm{d}y=\pi\rho g\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}-\int_0^1 y\arctan y\,\mathrm{d}y\right),$$

且
$$\int_0^1 y\arctan y\mathrm{d}y=\frac{y^2}{2}\arctan y\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{y^2}{1+y^2}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+y^2}\right)\mathrm{d}y$$
$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}(y-\arctan y)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2},$$

故 $W=\frac{\pi\rho g}{2}(1-\ln 2)$.

(60) 解 (Ⅰ) 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}[xf(x)+x]$,则有 $F(0)=0$.

只要证明 $F(x)\geqslant 0(x\in[0,1])$ 即可. 利用单调性证明. 当 $x\in(0,1)$ 时,有
$$F'(x)=f(x)-\frac{1}{2}\left[f(x)+xf'(x)+1\right]$$
$$=\frac{1}{2}[f(x)-1]-\frac{1}{2}xf'(x)$$
$$=\frac{1}{2}[f(x)-f(0)]-\frac{1}{2}xf'(x)$$
$$=\frac{1}{2}xf'(\xi)-\frac{1}{2}xf'(x)$$
$$=\frac{1}{2}x\left[f'(\xi)-f'(x)\right]\ (0<\xi<x).$$

由 $f''(x)<0$,知 $f'(x)$ 单调递减,故 $f'(\xi)>f'(x)$,从而 $F'(x)>0$,所以 $F(x)$ 单调递增. 又 $F(0)=0$,故 $F(x)\geqslant F(0)=0$,所以不等式成立.

(Ⅱ) 所证不等式 $\int_0^1\left(\frac{2}{3}-x\right)f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{6}$ 变形为
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{3}{2}\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{4},$$

应用分部积分法,有
$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\,\mathrm{d}\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]$$
$$=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\Big|_0^1-\int_0^1\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x,$$

即
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x.$$

由(Ⅰ)知
$$\int_0^1\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\frac{1}{2}\left[xf(x)+x\right]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{4},$$

故
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{4},$$

即
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{3}{2}\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{4},$$

所以
$$\int_0^1\left(\frac{2}{3}-x\right)f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{6}.$$

拓展题

解答题

(1) 解 用微元法求 $V(t)$.

任取$[x,x+\mathrm{d}x]\subset[0,t]$,如图 3-31 所示,则 $\mathrm{d}V=2\pi(t-x)f(x)\mathrm{d}x$.

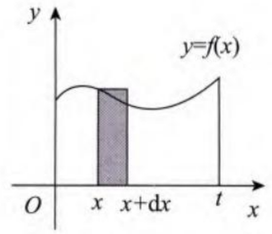


图 3-31

由于
$$V(t)=\int_0^t 2\pi(t-x)f(x)\mathrm{d}x,$$
$$\begin{aligned}V'(t)&=2\pi\left[t\int_0^t f(x)\mathrm{d}x-\int_0^t xf(x)\mathrm{d}x\right]'\\&=2\pi\left[\int_0^t f(x)\mathrm{d}x+tf(t)-tf(t)\right]\\&=2\pi\int_0^t f(x)\mathrm{d}x=2\pi S(t)=2\pi t\mathrm{e}^t,\end{aligned}$$
故 $V(t)=2\pi\int t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=2\pi(t-1)\mathrm{e}^t+C$.

又由 $V(0)=0$,得 $C=2\pi$,由此可知 $V(t)=2\pi(t-1)\mathrm{e}^t+2\pi$.

(2) 解 (Ⅰ) $V=4\cdot 2\int_{-1}^y 2\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y \xlongequal{y=\sin t} 16\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin y}\cos^2 t\,\mathrm{d}t$
$$=8\arcsin y+8y\sqrt{1-y^2}+4\pi(\mathrm{m}^3).$$

(Ⅱ) 由于$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=16\sqrt{1-y^2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$,故
$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{y=0}=\frac{1}{16\sqrt{1-y^2}}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{y=0}=\frac{1}{16}\times 0.16=0.01(\mathrm{m/min}).$$

(Ⅲ) $W=4\rho g\int_{-1}^1 4\sqrt{1-y^2}\cdot(1-y)\mathrm{d}y=4\rho g\left(\int_{-1}^1 4\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y-\int_{-1}^1 4\sqrt{1-y^2}\cdot y\,\mathrm{d}y\right)$
$$=4\rho g\int_{-1}^1 4\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y-0=8\rho g\pi(\mathrm{J}).$$

(3) 证 先证 $f(x)>0$. 由 $f(a)=f(b)=0$ 及罗尔定理,知存在 $x_0\in(a,b)$,使得 $f'(x_0)=0$,由 $f''(x)<0$,知 $f'(x)$ 单调递减,则当 $x\in(a,x_0)$ 时,$f'(x)>f'(x_0)=0$,从而 $f(x)$ 单调递增,故 $f(x)>f(a)=0$;当 $x\in(x_0,b)$ 时,$f'(x)<f'(x_0)=0$,知 $f(x)$ 单调递减,故 $f(x)>f(b)=0$. 综上所述,当 $x\in(a,b)$ 时,$f(x)>0$.

再证 $f(x)<\dfrac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

应用泰勒公式,将 $f(x)$ 在 $x=t\in(a,b)$ 处展开,有
$$f(x)=f(t)+f'(t)(x-t)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-t)^2,$$
其中 ξ 介于 x 与 t 之间.

由 $f''(x)<0$,知 $f''(\xi)<0$,故 $f(x)<f(t)+f'(t)(x-t)$. 在$[a,b]$上,上式两边同时对 t 积分,得
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}t<\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+\int_a^b f'(t)(x-t)\mathrm{d}t,$$
即
$$(b-a)f(x)<\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+(x-t)f(t)\Big|_a^b+\int_a^b f(t)\mathrm{d}t,=2\int_a^b f(t)\mathrm{d}t,$$
故 $f(x)<\dfrac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 所证不等式成立.

(4) 证 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导及 $f(a)f(b)<0$，根据零点定理，知至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=0$. 令 $F(x)=\int_{x_0}^{x}f(t)\mathrm{d}t$，则

$$F(x_0)=0,\ F'(x_0)=f(x_0)=0,$$
$$F'(x)=f(x),\ F''(x)=f'(x).$$

$F(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒展开式为

$$F(x)=F(x_0)+F'(x_0)(x-x_0)+\frac{F''(\eta)}{2!}(x-x_0)^2=\frac{f'(\eta)}{2}(x-x_0)^2,$$

其中 η 介于 x_0 与 x 之间.

将 $x=b,x=a$ 分别代入上式，有

$$F(b)=\frac{f'(\eta_1)}{2}(b-x_0)^2,\ F(a)=\frac{f'(\eta_2)}{2}(a-x_0)^2,$$

其中 η_1 介于 x_0 与 b 之间，η_2 介于 x_0 与 a 之间.

又
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^{x_0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_0}^{b}f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{x_0}^{b}f(x)\mathrm{d}x-\int_{x_0}^{a}f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)\\&=\frac{f'(\eta_1)}{2}(b-x_0)^2-\frac{f'(\eta_2)}{2}(a-x_0)^2\\&\leqslant\frac{|f'(\eta_1)|}{2}(b-x_0)^2+\frac{|f'(\eta_2)|}{2}(a-x_0)^2,\end{aligned}$$

取 $|f'(\xi)|=\max\{|f'(\eta_1)|,|f'(\eta_2)|\}$，则有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&\leqslant\frac{|f'(\xi)|}{2}[(b-x_0)^2+(x_0-a)^2]\\&<\frac{|f'(\xi)|}{2}[(b-x_0)+(x_0-a)]^2=\frac{1}{2}|f'(\xi)|(b-a)^2,\end{aligned}$$

故 $\frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<|f'(\xi)|$.

(5) 证 (Ⅰ)
$$\begin{aligned}\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)\mathrm{d}x&=\int_a^b(x-a)(x-b)\mathrm{d}f'(x)\\&=(x-a)(x-b)f'(x)\Big|_a^b-\int_a^b(2x-a-b)f'(x)\mathrm{d}x\\&=\int_a^b(a+b-2x)f'(x)\mathrm{d}x=\int_a^b(a+b-2x)\mathrm{d}f(x)\\&=(a+b-2x)f(x)\Big|_a^b+2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\\&=(a-b)[f(a)+f(b)]+2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

故 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]+\frac{1}{2}\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)\mathrm{d}x$.

(Ⅱ) 方法一：由(Ⅰ)有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]\right|&=\left|\frac{1}{2}\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\frac{1}{2}\int_a^b|x-a||x-b||f''(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{M}{2}\int_a^b(x-a)(b-x)\mathrm{d}x=\frac{M}{4}\int_a^b(b-x)\mathrm{d}(x-a)^2\end{aligned}$$

$$=\frac{M}{4}\left[(b-x)(x-a)^2\Big|_a^b+\int_a^b(x-a)^2\mathrm{d}x\right]$$
$$=\frac{M}{4}\cdot\frac{1}{3}(x-a)^3\Big|_a^b=\frac{M}{4}\cdot\frac{1}{3}(b-a)^3=\frac{(b-a)^3}{12}M.$$

方法二：应用泰勒公式证明.

将 $f(u)$ 在 $x\in(a,b)$ 处展开，再代入端点 $u=a$ 和 $u=b$，有

$$f(a)=f(x)+f'(x)(a-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(a-x)^2, \tag{①}$$
$$f(b)=f(x)+f'(x)(b-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(b-x)^2, \tag{②}$$

其中 $\xi_1\in(a,x)$，$\xi_2\in(x,b)$. 由 ① + ②，得

$$f(a)+f(b)=2f(x)+f'(x)(a+b-2x)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-x)^2+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(b-x)^2.$$

上式两边从 a 到 b 积分，得

$$\int_a^b[f(a)+f(b)]\mathrm{d}x=2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b(a+b-2x)f'(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_a^b[f''(\xi_1)(a-x)^2+f''(\xi_2)(b-x)^2]\mathrm{d}x \tag{③}$$

而
$$\int_a^b[f(a)+f(b)]\mathrm{d}x=(b-a)[f(a)+f(b)],$$
$$\int_a^b(a+b-2x)f'(x)\mathrm{d}x=\int_a^b(a+b-2x)\mathrm{d}f(x)$$
$$=(a+b-2x)f(x)\Big|_a^b+2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
$$=(a-b)[f(a)+f(b)]+2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

将其代入 ③ 式，整理可得

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]\right|=\frac{1}{8}\left|\int_a^b[f''(\xi_1)(a-x)^2+f''(\xi_2)(b-x)^2]\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{8}\left[\int_a^b|f''(\xi_1)|(a-x)^2\mathrm{d}x+\int_a^b|f''(\xi_2)|(b-x)^2\mathrm{d}x\right]$$
$$\leqslant\frac{M}{8}\left[\int_a^b(a-x)^2\mathrm{d}x+\int_a^b(b-x)^2\mathrm{d}x\right]$$
$$=\frac{M}{8}\cdot\frac{2}{3}(b-a)^3=\frac{(b-a)^3}{12}M.$$

注 若 $f(x)\geqslant 0$，则 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]\right|\leqslant\frac{(b-a)^3}{12}M$，可看作用梯形的面积 $\frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]$ 作为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的近似值，其绝对误差不超过 $\frac{(b-a)^3}{12}M$.

(6) 证 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则

$$F'(x)=f(x),\ F''(x)=f'(x),\ F'''(x)=f''(x),$$

且 $F(a)=0$. $F(x)$ 在 $x=a,x=b$ 处的泰勒展开式分别为

$$F(x)=F(a)+F'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}F''(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}F'''(\xi_1)(x-a)^3,$$

即

$$F(x)=f(a)(x-a)+\frac{1}{2}f'(a)(x-a)^2+\frac{1}{6}f''(\xi_1)(x-a)^3. \tag{①}$$

$$F(x)=F(b)+F'(b)(x-b)+\frac{1}{2!}F''(b)(x-b)^2+\frac{1}{3!}F'''(\xi_2)(x-b)^3,$$

即

$$F(x)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+f(b)(x-b)+\frac{1}{2}f'(b)(x-b)^2+\frac{1}{6}f''(\xi_2)(x-b)^3. \quad ②$$

其中 ξ_1 介于 a 与 x 之间,ξ_2 介于 b 与 x 之间.

① 式与 ② 式中,令 $x=\dfrac{a+b}{2}$,则有

$$F\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)\left(\frac{a+b}{2}-a\right)+\frac{1}{2}f'(a)\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2+\frac{1}{6}f''(\eta_1)\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^3, \quad ③$$

$$F\left(\frac{a+b}{2}\right)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+f(b)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)+\frac{1}{2}f'(b)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2+\frac{1}{6}f''(\eta_2)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^3. \quad ④$$

其中η_1 介于 a 与$\dfrac{a+b}{2}$ 之间,η_2 介于 b 与$\dfrac{a+b}{2}$ 之间.

④ − ③,并利用 $f'(a)=f'(b)$,得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]+\frac{1}{24}(b-a)^3\cdot\frac{1}{2}[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)].$$

当 $f''(\eta_1)=f''(\eta_2)$ 时,取 $\xi=\eta_1$ 或 $\xi=\eta_2$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi).$$

当 $f''(\eta_1)\neq f''(\eta_2)$ 时,由 $f''(x)$ 在$[a,b]$ 上连续,知 $f''(x)$ 在$[a,b]$ 上有最大值 M 与最小值 m,则

$$m<\frac{1}{2}[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)]<M.$$

由介值定理,知存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f''(\xi)=\frac{1}{2}[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)],$$

故$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi)$.

(7) 解 (Ⅰ) 对 $\forall x\in[0,1]$,$f(u)$ 在点 x 处的泰勒展开式为

$$f(u)=f(x)+f'(x)(u-x)+\frac{f''(\xi)}{2!}(u-x)^2.$$

其中 ξ 介于 x 与 u 之间. 代入端点 $u=1,u=0$,有

$$1=f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(1-x)^2, \quad ①$$

$$1=f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(0-x)^2. \quad ②$$

其中 ξ_1 介于 x 与 1 之间,ξ_2 介于 0 与 x 之间.

① − ②,得

$$f'(x)=-\frac{1}{2}\left[f''(\xi_1)(1-x)^2-f''(\xi_2)x^2\right].$$

当 $x=0$ 或 $x=1$ 时,有

$$|f'(0)|=\frac{1}{2}|f''(\xi_1)|\leqslant\frac{1}{2}M,\ |f'(1)|=\frac{1}{2}|f''(\xi_2)|\leqslant\frac{1}{2}M.$$

当 $x\in(0,1)$ 时,有

$$|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}\left[|f''(\xi_1)|(1-x)^2+|f''(\xi_2)|x^2\right].$$

令 $|f''(\xi)|=\max\left\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\right\}$，$\xi\in(0,1)$，则

$$|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}|f''(\xi)|\left[(1-x)^2+x^2\right]\leqslant\frac{1}{2}|f''(\xi)|\leqslant\frac{1}{2}M.$$

综上所述，当 $x\in[0,1]$ 时，所证不等式成立.

（Ⅱ）$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 与 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，有

$$f(x)=f(0)+f'(\xi_1)x=1+xf'(\xi_1),\ 0<\xi_1<x\leqslant\frac{1}{2};$$

$$f(x)=f(1)+(x-1)f'(\xi_2)=1+(x-1)f'(\xi_2),\ \frac{1}{2}\leqslant x<\xi_2<1.$$

由（Ⅰ）知，$|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}M$，故

$$|f(x)|=|1+xf'(\xi_1)|\leqslant1+\frac{1}{2}Mx,\ x\in\left[0,\frac{1}{2}\right];$$

$$|f(x)|=|1+(x-1)f'(\xi_2)|\leqslant1+\frac{1}{2}M(1-x),\ x\in\left[\frac{1}{2},1\right].$$

则

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1f(x)\mathrm{d}x\right|&\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1|f(x)|\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}Mx\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1\left[1+\frac{1}{2}M(1-x)\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}M\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}M\cdot\frac{1}{2}(x-1)^2\Big|_{\frac{1}{2}}^1\\&=1+\frac{1}{8}M.\end{aligned}$$

(8) 解（Ⅰ）$f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处的泰勒展开式为

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2,\qquad①$$

其中 ξ 介于 $\frac{1}{2}$ 与 x 之间. ① 式两边积分，有

$$\begin{aligned}\int_0^1f(x)\mathrm{d}x&=\int_0^1f\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_0^1f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{f''(\xi)}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x\\&=f\left(\frac{1}{2}\right)+0+\int_0^1\frac{f''(\xi)}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中

$$\int_0^1f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\Big|_0^1=0.$$

故

$$\left|\int_0^1f(x)\mathrm{d}x-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\left|\int_0^1\frac{f''(\xi)}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{2}\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{24}.$$

（Ⅱ）由 $f(x)=f(x+1)$，知 $f'(x)=f'(x+1)$.

当 $x=0$ 时，有 $f(0)=f(1)$，$f'(0)=f'(1)$，且 $\int_0^nf(x)\mathrm{d}x=n\int_0^1f(x)\mathrm{d}x$.

利用泰勒公式，将 $f(x)$ 在 $x=0$ 与 $x=1$ 处分别展开，得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi_1)}{2!}x^2,\ \xi_1\text{ 介于 }0\text{ 与 }x\text{ 之间};$$

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-1)^2,\ \xi_2\text{ 介于 }1\text{ 与 }x\text{ 之间}.$$

上两式积分,得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=f(0)+\frac{1}{2}f'(0)+\frac{1}{2}\int_0^1 f''(\xi_1)x^2\mathrm{d}x, \quad ①$$

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=f(1)-\frac{1}{2}f'(1)+\frac{1}{2}\int_0^1 f''(\xi_2)(x-1)^2\mathrm{d}x. \quad ②$$

①+②,得

$$2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=f(0)+f(1)+\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f''(\xi_1)x^2\mathrm{d}x+\int_0^1 f''(\xi_2)(x-1)^2\mathrm{d}x\right],$$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|&\leqslant\frac{1}{2}(|f(0)|+|f(1)|)+\frac{1}{4}\left[\int_0^1|f''(\xi_1)|x^2\mathrm{d}x+\int_0^1|f''(\xi_2)|(x-1)^2\mathrm{d}x\right]\\&\leqslant|f(0)|+\frac{1}{4}\left[\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_0^1(x-1)^2\mathrm{d}x\right]\\&=|f(0)|+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+\frac{1}{3}(x-1)^3\Big|_0^1\right]\\&=|f(0)|+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=|f(0)|+\frac{1}{6},\end{aligned}$$

所以$\left|\int_0^n f(x)\mathrm{d}x\right|=n\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant n\left[\frac{1}{6}+|f(0)|\right]$.

(9) **证** 令$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则$F(x)$在$[0,1]$上有连续的二阶导数.将$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$写成和的形式,有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^n\left[F\left(\frac{k}{n}\right)-F\left(\frac{k-1}{n}\right)\right].$$

在每个小区间$\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$上,$F(x)$在点$x=\frac{k}{n}$处利用泰勒公式并将$x=\frac{k-1}{n}$代入,可得

$$F\left(\frac{k-1}{n}\right)=F\left(\frac{k}{n}\right)+F'\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\left(\frac{k-1}{n}-\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{2!}F''(\xi_k)\left(\frac{k-1}{n}-\frac{k}{n}\right)^2.$$

其中$\xi_k\in\left(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right)$,即

$$F\left(\frac{k-1}{n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)=-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{2n^2}f'(\xi_k).$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right]&=\lim_{n\to\infty}n\left\{\sum_{k=1}^n\left[\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2n^2}f'(\xi_k)\right]-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\\&=-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f'(\xi_k)\frac{1}{n}=-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}[f(1)-f(0)]=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

注 根据定积分的定义,当$\xi_k\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$时,$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f'(\xi_k)\frac{1}{n}=\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x$.

(10) **证** (Ⅰ)$f(x)$在$[0,x_0]$与$[x_0,1]$上分别应用拉格朗日中值定理,有

$$f(x_0)-f(0)=f'(\xi_1)x_0,\ f(1)-f(x_0)=f'(\xi_2)(1-x_0),$$

其中$0<\xi_1<x_0,x_0<\xi_2<1$,即

$$f(x_0)=f'(\xi_1)x_0,\ f(x_0)=f'(\xi_2)(x_0-1),$$

故$f'(\xi_2)-f'(\xi_1)=\frac{1}{x_0}f'(\xi_2)$.

（Ⅱ）由$[\xi_1,\xi_2]\subset[0,1]$，且$|f''(x)|$非负，故有

$$\begin{aligned}\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x&\geqslant\int_{\xi_1}^{\xi_2}|f''(x)|\mathrm{d}x\geqslant\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2}f''(x)\mathrm{d}x\right|\\&=|f'(\xi_2)-f'(\xi_1)|=\left|\frac{f(x_0)}{x_0-1}-\frac{f(x_0)}{x_0}\right|\\&=|f(x_0)|\left|\frac{1}{x_0(x_0-1)}\right|\\&=|f(x_0)|\frac{1}{x_0(1-x_0)}\quad(\xi_1<x_0<\xi_2).\end{aligned}$$

令$g(x)=x(1-x)$，由$g'(x)=1-2x=0$，得$x=\dfrac{1}{2}$.

可判别$g(x)$在$x=\dfrac{1}{2}$处取得最大值$\dfrac{1}{4}$，则$\dfrac{1}{g(x)}(0<x<1)$在$x=\dfrac{1}{2}$处取得最小值4，从而$\dfrac{1}{x_0(1-x_0)}\geqslant 4$，故

$$\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x\geqslant 4|f(x_0)|.$$

(11) **证**（Ⅰ）$f(x)$在$[\xi,\eta]$上满足拉格朗日中值定理，有

$$f(\xi)-f(\eta)=f'(\theta)(\xi-\eta),\ \theta\in(\xi,\eta),$$

故$|f(\xi)-f(\eta)|=|f'(\theta)||\eta-\xi|>\dfrac{1}{2}|f'(\theta)|$.

对于$x\in[0,1]$，有

$$\begin{aligned}|f'(x)|-2|f(\xi)-f(\eta)|&<|f'(x)|-|f'(\theta)|\\&\leqslant|f'(x)-f'(\theta)|=\left|\int_\theta^x f''(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

即$|f'(x)|<2|f(\xi)-f(\eta)|+\displaystyle\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x$.

（Ⅱ）若$\displaystyle\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x$发散，则显然有$\displaystyle\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geqslant 4$.

若$\displaystyle\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x$收敛. 由$f(x)$在$[0,1]$上连续，知$|f(x)|$在$[0,1]$上连续，所以存在$x_0\in[0,1]$，使得$|f(x_0)|=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$. 由于$f(x)\neq 0,x\in(0,1)$，且$f(0)=f(1)=0$，所以$x_0\in(0,1)$，且$|f(x_0)|>0$.

$f(x)$在$[0,x_0]$和$[x_0,1]$上应用拉格朗日中值定理，有

$$f(x_0)-f(0)=f'(\xi_1)(x_0-0),\ \text{即}\ f(x_0)=f'(\xi_1)x_0.$$
$$f(1)-f(x_0)=f'(\xi_2)(1-x_0),\ \text{即}\ -f(x_0)=f'(\xi_2)(1-x_0).$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x&\geqslant\frac{1}{|f(x_0)|}\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{|f(x_0)|}\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2}f''(x)\mathrm{d}x\right|\\&=\frac{1}{|f(x_0)|}|f'(\xi_2)-f'(\xi_1)|=\frac{1}{|f(x_0)|}\left|-\frac{f(x_0)}{1-x_0}-\frac{f(x_0)}{x_0}\right|\\&=\frac{1}{1-x_0}+\frac{1}{x_0}=\frac{1}{x_0(1-x_0)}\geqslant\frac{1}{x_0(1-x_0)}\bigg|_{x_0=\frac{1}{2}}=4.\end{aligned}$$

(12) **证**（Ⅰ）$f(x)$在$x=\dfrac{a+b}{2}$处的一阶泰勒展开式为

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\eta)}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\qquad①$$

其中 η 介于 x 与 $\dfrac{a+b}{2}$ 之间. ① 式两边从 a 到 b 积分,得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_a^b f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_a^b \frac{f''(\eta)}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x \\ &= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_a^b \frac{f''(\eta)}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

而

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}x^2-\frac{a+b}{2}x\right)\Big|_a^b = 0,$$

故

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| &= \left|\int_a^b \frac{f''(\eta)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_a^b |f''(\eta)|\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{M}{2}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x \\ &= \frac{M}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\Big|_a^b = \frac{(b-a)^3}{24}M.\end{aligned}$$

(Ⅱ) 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,则

$$F'(x)=f(x), F''(x)=f'(x), F'''(x)=f''(x);$$

且 $F(a)=0$,$F(x)$ 在 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 处的二阶泰勒展开式为

$$F(x)=F\left(\frac{a+b}{2}\right)+F'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2!}F''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}F'''(\xi_1)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3,$$

即

$$F(x)=F\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{1}{6}f''(\xi_1)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3. \qquad ②$$

其中 ξ_1 介于 x 与 $\dfrac{a+b}{2}$ 之间.

② 式中令 $x=a$ 与 $x=b$,则有

$$0=F\left(\frac{a+b}{2}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\frac{1}{6}f''(\xi_2)\left(\frac{b-a}{2}\right)^3, \qquad ③$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+\frac{1}{6}f''(\xi_3)\left(\frac{b-a}{2}\right)^3. \qquad ④$$

其中 ξ_2 介于 a 与 $\dfrac{a+b}{2}$ 之间,ξ_3 介于 $\dfrac{a+b}{2}$ 与 b 之间.

④ − ③,得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}\cdot\frac{1}{2}[f''(\xi_2)+f''(\xi_3)].$$

若 $f''(\xi_2)=f''(\xi_3)$,则取 $\xi=\xi_2$ 或者 $\xi=\xi_3$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi).$$

若 $f''(\xi_2)\neq f''(\xi_3)$,由 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,知 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 M 与最小值 m,且

$$m<\frac{1}{2}[f''(\xi_2)+f''(\xi_3)]<M.$$

由介值定理,知存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f''(\xi)=\frac{1}{2}[f''(\xi_2)+f''(\xi_3)],$$

故$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi)$.

注 ①（Ⅰ）中若写成$\int_a^b \frac{f''(\eta)}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{f''(\eta)}{2!}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x$，是错误的.

原因是：η 介于 x 与$\frac{a+b}{2}$之间，η 与 x 有关.

② 由（Ⅱ）知（Ⅰ）显然成立.

③（Ⅱ）中$\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi)$，$(b-a)^3$ 是$(b-a)$ 的 3 次幂，$f''(\xi)$ 是二阶导数. 故考虑对 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 应用泰勒公式.

(13) 解（Ⅰ）令 $F(x)=xf(x)$，则

$$F'(x)=f(x)+xf'(x),\ F''(x)=2f'(x)+xf''(x),$$

且
$$F(0)=0,\ F'(0)=f(0).$$

$F(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式为

$F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{F''(c)}{2!}x^2=f(0)x+\frac{F''(c)}{2}x^2$（$c$ 介于 0 与 x 之间），

上式两边积分，有

$$\int_{-1}^1 F(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 f(0)x\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{-1}^1F''(c)x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^1F''(c)x^2\mathrm{d}x.$$

记 $m=\min\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}F''(x)$，$M=\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}F''(x)$，则

$$m\int_{-1}^1x^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{-1}^1F''(c)x^2\mathrm{d}x\leqslant M\int_{-1}^1x^2\mathrm{d}x,$$

即$\frac{2m}{3}\leqslant\int_{-1}^1F''(c)x^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{2M}{3}$，故 $m\leqslant 3\int_{-1}^1F(x)\mathrm{d}x\leqslant M$.

对 $F''(x)$ 利用介值定理，存在一点 $\xi\in[-1,1]$，使得 $3\int_{-1}^1F(x)\mathrm{d}x=F''(\xi)$，即

$$\int_{-1}^1 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}[2f'(\xi)+\xi f''(\xi)].$$

（Ⅱ）由 $f(x)$ 在$(-1,1)$ 内取得极值，知存在一点$x_0\in(-1,1)$，使得 $f'(x_0)=0$，故

$$F'(x_0)=f(x_0)+x_0f'(x_0)=f(x_0),$$

其中，$F(x)=xf(x)$.

$F(x)$ 在x_0 处的泰勒展开式为

$$\begin{aligned}F(x)&=F(x_0)+F'(x_0)(x-x_0)+\frac{F''(u)}{2}(x-x_0)^2\\&=x_0f(x_0)+f(x_0)(x-x_0)+\frac{F''(u)}{2}(x-x_0)^2\\&=f(x_0)x+\frac{F''(u)}{2}(x-x_0)^2,\end{aligned}$$

其中 u 介于x_0 与 x 之间. 故

$$F(1)=f(x_0)+\frac{F''(\eta_1)}{2}(1-x_0)^2, \qquad ①$$

$$F(-1)=-f(x_0)+\frac{F''(\eta_2)}{2}(-1-x_0)^2, \qquad ②$$

其中η_1 介于x_0 与 1 之间，η_2 介于 -1 与x_0 之间.

①+②,有

$$F(1)+F(-1)=f(1)-f(-1)=\frac{F''(\eta_1)}{2}(1-x_0)^2+\frac{F''(\eta_2)}{2}(1+x_0)^2.$$

记 $M=\max\{|F''(\eta_1)|,|F''(\eta_2)|\}$,则由上式可得

$$\begin{aligned}|f(1)-f(-1)|&\leqslant\frac{M}{2}[(1-x_0)^2+(1+x_0)^2]\\&=\frac{M}{2}(2+2x_0^2)\leqslant\frac{M}{2}(2+2)=2M.\end{aligned}$$

因此

$$M\geqslant\frac{1}{2}|f(1)-f(-1)|.$$

取 $\eta=\eta_1$ 或 $\eta=\eta_2$,使得 $|F''(\eta)|=M$,则存在一点 $\eta\in(-1,1)$ 满足

$$|F''(\eta)|=|2f'(\eta)+\eta f''(\eta)|\geqslant\frac{1}{2}|f(1)-f(-1)|.$$

扫描二维码，获取更多免费资料

第四章　多元函数微分学及其应用

基础题

一、选择题

(1)B.

解 $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$,不存在.

$f'_y(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\arcsin y^2}{y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{y^2}{y}=0$,存在.

故选项 B 正确.

(2)C.

解 $f(x,y)$ 在某点偏导数存在不一定在该点连续(排除选项 B),也不能推得 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)$ 存在,例如:设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

可知 $f'_x(0,0),f'_y(0,0)$ 都存在,但$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在,故排除选项 A.

由 $f'_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$ 存在,只能推得当固定 $y=y_0$ 时,$f(x,y)$ 在 x_0 的邻域内有定义. 而 $\mathring{U}(x_0,y_0)=\{(x,y)\mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$ 是圆域,故选项 D 不正确.

由 $f'_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$ 存在,知 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)=f(x_0,y_0)$,故选项 C 正确.

(3)B.

解 依题设,有 $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{0-0}{x}=0$.

同理,$f'_y(0,0)=0$.

当 $x^2+y^2\neq0$ 时,有

$$f'_x(x,y)=\frac{2x(y^4-y^2)}{(x^2+y^4)^2}\sin(xy^2)+\frac{(x^2+y^2)y^2}{x^2+y^4}\cos(xy^2).$$

故 $f''_{xy}(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{1}{y}$ 不存在.

当 $x^2+y^2\neq0$ 时,有

$$f'_y(x,y)=\frac{2y(x^2+y^4)-(x^2+y^2)4y^3}{(x^2+y^4)^2}\sin(xy^2)+\frac{(x^2+y^2)2xy}{x^2+y^4}\cos(xy^2).$$

故 $f''_{yx}(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{0}{x}=0$. 选项 B 正确.

(4)D.

解 当 $y\neq0$ 时,$f'_x(0,y)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(0+\Delta x,y)-f(0,y)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\sqrt{|y\cdot\Delta x|}}{\Delta x}$ 不存在. 故选项 D 正确.

由已知,有

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x|y|}, & (x,y)\in D_1=\{(x,y)\mid x>0,y\in\mathbf{R}\},\\ \sqrt{-x|y|}, & (x,y)\in D_2=\{(x,y)\mid x<0,y\in\mathbf{R}\},\\ 0, & (x,y)\in D_3=\{(x,y)\mid x=0,y\in\mathbf{R}\}.\end{cases}$$

当$(x,y)\in D_1$,即 $x>0,y\in\mathbf{R}$时,

$$f'_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x|y|})=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{y}{x}\right|};$$

同理,当 $x<0,y\in\mathbf{R}$ 时,

$$f'_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{-x|y|})=-\frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{y}{x}\right|}.$$

可排除选项 A,B.

(5)C.

解 令 $F(x,y,z)=xy-z\ln y+e^{xz}-1$,则 $F(0,1,1)=0$.

$F(x,y,z)$ 对 x,y,z 分别求偏导,得

$$F'_x=y+e^{xz}\cdot z,\ F'_y=x-\frac{z}{y},\ F'_z=-\ln y+e^{xz}\cdot x,$$

故 $$F'_x(0,1,1)=2\neq 0,\ F'_y(0,1,1)=-1\neq 0,\ F'_z(0,1,1)=0.$$

根据隐函数存在定理,知 $F(x,y,z)=0$ 在点$(0,1,1)$的某个邻域内能确定隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$,故选项 C 正确.

(6)C.

解 由已知,$f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处取得极大值,由极值的必要条件,知

$$f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0,$$

故选项 C 正确.

(7)A.

解 由
$$\begin{cases}f'_x=e^{2x}(2x+2y^2+4y+1)=0,\\ f'_y=e^{2x}(2y+2)=0,\end{cases}$$

得驻点 $P\left(\frac{1}{2},-1\right)$,由于 $A=f''_{xx}(P)=2e$, $B=f''_{xy}(P)=0$, $C=f''_{yy}(P)=2e$,故

$$AC-B^2=2e\cdot 2e-0>0,\ A=2e>0,$$

所以 $f\left(\frac{1}{2},-1\right)=-\frac{e}{2}$ 为极小值,选项 A 正确.

(8)D.

解 $f'_x=\dfrac{e^x(x-y)-e^x}{(x-y)^2}$, $f'_y=\dfrac{e^x}{(x-y)^2}$,故 $f'_x+f'_y=\dfrac{e^x}{x-y}=f$,选项 D 正确.

二、填空题

(1) $\frac{2}{3}\ln 2$.

解 由于函数在点$(3,0)$处连续,故极限存在,且

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\ln(3+e^0)}{\sqrt{3^2+0^2}}=\frac{2}{3}\ln 2.$$

(2)0.

解 利用不等式 $x^2+y^2\geqslant 2|xy|$ 求解.

由于当 $x\to\infty,y\to\infty$ 时,有

$$0 \leqslant \left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| \leqslant \frac{|x|+|y|}{|xy|}=\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|} \to 0,$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|=0$，从而原极限 $=0$.

(3) $e^{-\frac{1}{2}}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 0}}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 0}}\left[\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{-2x}\right]^{\frac{x}{x+y}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=e^{-\frac{1}{2}}$.

(4) $dx+(1+2\ln 2)dy$.

解 依题设，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y(1+xy)^{y-1}\cdot y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(1+xy)^y\cdot\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right],$$

故 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=1$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=1+2\ln 2$，于是 $\left.dz\right|_{(1,1)}=dx+(1+2\ln 2)dy$.

(5) 47.

解 $F'(x)=f'_1+f'_2(f'_1+2f'_2)$. 由

$$f[1,f(1,2)]=f(1,2),\ f'_1(1,2)=f'_x(1,2)=3,\ f'_2(1,2)=f'_y(1,2)=4,$$

可知 $F'(1)=f'_1(1,2)+f'_2(1,2)[f'_1(1,2)+2f'_2(1,2)]=3+4\times(3+8)=47$.

(6) $\frac{1}{2e}dx-\frac{1}{2}dy$.

解 由 $x=e, y=0$，知 $z=1$. 令 $F(x,y,z)=ze^{y+z}-x$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{-1}{e^{y+z}(1+z)}=\frac{1}{e^{y+z}(1+z)}=\frac{z}{x(1+z)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{ze^{y+z}}{e^{y+z}(1+z)}=-\frac{z}{1+z},$$

故 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(e,0)}=\frac{1}{2e}$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(e,0)}=-\frac{1}{2}$，所以 $\left.dz\right|_{(e,0)}=\frac{1}{2e}dx-\frac{1}{2}dy$.

(7) $\frac{f'_xF'_t-f'_tF'_x}{F'_t+f'_tF'_y}$.

解 由已知方程组确定 $y=y(x), t=t(x)$，方程两边同时对 x 求导，得

$$\frac{dy}{dx}=f'_x+f'_t\frac{dt}{dx},\ F'_x+F'_y\cdot\frac{dy}{dx}+F'_t\frac{dt}{dx}=0,$$

两式消去 $\frac{dt}{dx}$，得 $\frac{dy}{dx}=\frac{f'_xF'_t-f'_tF'_x}{F'_t+f'_tF'_y}$.

(8) $\frac{G'_tf'_x-G'_xf'_t}{G'_yf'_t+G'_t}$.

解 令 $F(x,y,t)=f(x,t)-y=0$，则 $\begin{cases}F(x,y,t)=0,\\G(x,y,t)=0\end{cases}$ 确定 $y=y(x), t=t(x)$.

方程组两边同时对 x 求导，得

$$\begin{cases}F'_x+F'_y\frac{dy}{dx}+F'_t\frac{dt}{dx}=f'_x+f'_t\frac{dt}{dx}-\frac{dy}{dx}=0,\\[2mm] G'_x+G'_y\frac{dy}{dx}+G'_t\frac{dt}{dx}=0,\end{cases}$$

解方程组,得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{G'_t f'_x-G'_x f'_t}{G'_y f'_t+G'_t}$.

(9) $-\dfrac{1}{x^2}f'-\dfrac{y}{x^3}f''+\mathrm{e}^x g''_{12}\cos y$.

解 依题设,有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f'+\mathrm{e}^x g'_1,$$

故$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{1}{x^2}f'-\dfrac{y}{x^3}f''+\mathrm{e}^x g''_{12}\cos y$.

(10) $f''_{11}(1,1)+f'_1(1,1)-f'_2(1,1)$.

解 依题设,有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'_1\mathrm{e}^x-f'_2\sin x,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=(f''_{11}\mathrm{e}^x-f''_{12}\sin x)\mathrm{e}^x+f'_1\mathrm{e}^x-(f''_{21}\mathrm{e}^x-f''_{22}\sin x)\sin x-f'_2\cos x,$$

故$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=f''_{11}(1,1)+f'_1(1,1)-f'_2(1,1)$.

(11) $-\dfrac{1}{2}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$.

解 等式两边同时对x,y求偏导,得

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{2yz}\cdot 2y\dfrac{\partial z}{\partial x}+1+\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\\ \mathrm{e}^{2yz}\left(2z+2y\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)+2y+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0.\end{cases}$$

当$x=y=\dfrac{1}{2}$时,$z=0$,代入方程组,解得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\frac{1}{2},\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\frac{1}{2},$$

故$\left.\mathrm{d}z\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\dfrac{1}{2}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$.

(12) 4.

解 依题设,有

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y\sin xy}{1+(xy)^2},$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,2)}=\left.\left(\frac{2\sin 2x}{1+4x^2}\right)'\right|_{x=0}=\left.\frac{4(1+4x^2)\cos 2x-16x\sin 2x}{(1+4x^2)^2}\right|_{x=0}=4.$$

注 这里先将$y=2$代入再对x求导.

(13) $\dfrac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2-\dfrac{1}{3}y^3+C$($C$为任意常数).

解 由已知可得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=x^2+2xy-y^2$,$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2-2xy-y^2$,故

$$z=\int(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+\varphi(y)=\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2+\varphi(y).$$

又$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2-2xy+\varphi'(y)=x^2-2xy-y^2$,得$\varphi'(y)=-y^2$,积分得

$$\varphi(y)=-\frac{1}{3}y^3+C\ (C\text{为任意常数}),$$

故 $z(x,y)=\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3+C.$

(14) $\frac{-ze^{-(x^2+y^2)}}{(1+z)^3}$.

解 已知方程两边同时对 x,y 求偏导数,得

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}-e^{-x^2}=0,\ \frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}+e^{-y^2}=0.$$

由以上两式解得$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{ze^{-x^2}}{1+z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-ze^{-y^2}}{1+z}$,故

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{e^{-x^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot(1+z)-ze^{-x^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}{(1+z)^2}\\&=\frac{e^{-x^2}}{(1+z)^2}\cdot\left(\frac{-ze^{-y^2}}{1+z}\right)=\frac{-ze^{-(x^2+y^2)}}{(1+z)^3}.\end{aligned}$$

(15) $f'_1-\frac{1}{y^2}f'_2+xyf''_{11}-\frac{x}{y^3}f''_{22}-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''$.

解 依题设,有

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=yf'_1+\frac{1}{y}f'_2-\frac{y}{x^2}g',\\\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=f'_1+y\left(xf''_{11}-\frac{x}{y^2}f''_{12}\right)-\frac{1}{y^2}f'_2+\frac{1}{y}\left(xf''_{21}-\frac{x}{y^2}f''_{22}\right)-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''\\&=f'_1-\frac{1}{y^2}f'_2+xyf''_{11}-\frac{x}{y^3}f''_{22}-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''.\end{aligned}$$

注 此题 g' 不能写成 g'_x.

(16) 2.

解 令 $P=\frac{x+ky}{(x+y)^2}$,$Q=\frac{y}{(x+y)^2}$,依题意有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P,\ \frac{\partial u}{\partial y}=Q,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

故$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$,则有

$$\frac{0-y\cdot 2(x+y)}{(x+y)^4}=\frac{k(x+y)^2-(x+ky)\cdot 2(x+y)}{(x+y)^4},$$

比较两边分子,得 $-2y=(k-2)x-ky$,解得 $k=2$.

三、解答题

(1) **解** 依题设,有

$$\frac{du}{dx}=f'_1+f'_2\frac{dy}{dx}+f'_3\frac{dz}{dx}. \quad ①$$

方程 $e^{xy}-y=0$ 两边同时对 x 求导,得 $e^{xy}\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)-\frac{dy}{dx}=0$,解得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{1-xy}. \quad ②$$

方程 $e^z-xz=0$ 两边同时对 x 求导,得 $e^z\frac{dz}{dx}-z-x\frac{dz}{dx}=0$,解得

$$\frac{dz}{dx}=\frac{z}{xz-x}. \quad ③$$

将②、③式代入①式,得$\dfrac{du}{dx}=f'_1+\dfrac{y^2}{1-xy}f'_2+\dfrac{z}{xz-x}f'_3$.

(2) 解 方程组两边同时对 x 求导,得

$$\begin{cases}2x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=3,\\ 2-3\dfrac{dy}{dx}+5\dfrac{dz}{dx}=0,\end{cases}$$

解方程组,得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\begin{vmatrix}3-2x & 2z\\ -2 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2y & 2z\\ -3 & 5\end{vmatrix}}=-\frac{10x-4z-15}{2(5y+3z)},$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\begin{vmatrix}2y & 3-2x\\ -3 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2y & 2z\\ -3 & 5\end{vmatrix}}=-\frac{6x+4y-9}{2(5y+3z)}.$$

(3) 解 $|x^2-y^2|e^{-x^2-y^2}\leqslant k$ 等价于 $-k\leqslant(x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}\leqslant k$.

令 $f(x,y)=(x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}$,求 $f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y)\mid x\geqslant0,y\geqslant0\}$ 上的最大值与最小值.

由$\begin{cases}f'_x=-2e^{-x^2-y^2}(x^2-y^2-1)x=0,\\ f'_y=-2e^{-x^2-y^2}(x^2-y^2+1)y=0,\end{cases}$得

$$x=0,\ y=0;\ x=0,\ y=\pm1;\ x=\pm1,\ y=0.$$

故在 D 内(即 $x>0,y>0$ 范围内)$f(x,y)$ 没有驻点.

当 $x=0$ 时,$f(0,y)=-y^2e^{-y^2}$,由 $f'_y(0,y)=-2e^{-y^2}(y-y^3)=0$,得 $y=0,y=\pm1$.

由 $y\geqslant0$,取$(0,0),(0,1)$.

当 $y=0$ 时,$f(x,0)=x^2e^{-x^2}$,由 $f'_x(x,0)=2e^{-x^2}(x-x^3)=0$,得 $x=0,x=\pm1$.

由 $x\geqslant0$,取$(0,0),(1,0)$.

比较大小:$f(0,0)=0,f(0,1)=-e^{-1},f(1,0)=e^{-1}$.

故 $f(x,y)$ 在 $x\geqslant0,y\geqslant0$ 上的最大值为 e^{-1},最小值为 $-e^{-1}$,所以 k 的最小值为 e^{-1}.

(4) 解 由下式

$$\begin{cases}f'_x=-(1+e^y)\sin x=0,\\ f'_y=e^y(\cos x-1-y)=0,\end{cases}$$

可得驻点:$(x,y)=(2n\pi,0),(x,y)=((2n+1)\pi,-2)\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,且

$$f''_{xx}=-(1+e^y)\cos x,f''_{xy}=-e^y\sin x,f''_{yy}=e^y(\cos x-2-y).$$

在点$(2n\pi,0)$处,

$$A=f''_{xx}=-2,\ B=f''_{xy}=0,\ C=f''_{yy}=-1,$$
$$AC-B^2=(-2)\times(-1)-0=2>0,\text{且}A=-2<0,$$

故$(2n\pi,0)$为 $f(x,y)$ 的极大值点,极大值为 $f(2n\pi,0)=2$.

在点$((2n+1)\pi,-2)$处,

$$A=f''_{xx}=1+e^{-2},\ B=f''_{xy}=0,\ C=f''_{yy}=-e^{-2},$$
$$AC-B^2=(1+e^{-2})(-e^{-2})-0=-\frac{e^2+1}{e^4}<0.$$

故$((2n+1)\pi,-2)$不是极值点,$f(x,y)$ 没有极小值.

(5) 解 设 S 上任一点为(x,y,z),则$(0,0,0)$到(x,y,z)的距离的平方为 $d^2=x^2+y^2+z^2$.

令 $L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda[(x-y)^2 - z^2 - 1]$，则

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda(x-y) = 0, & ① \\ L'_y = 2y - 2\lambda(x-y) = 0, & ② \\ L'_z = 2z - 2\lambda z = 0, & ③ \\ L'_\lambda = (x-y)^2 - z^2 - 1 = 0. & ④ \end{cases}$$

由 ①、② 式得 $x = -y$，由 ③ 式得 $z = 0$ 或 $\lambda = 1$.

若 $\lambda = 1$，由 ①、② 式知 $x = y = 0$，与 ④ 式矛盾，舍去，故 $z = 0$. 由 ④ 式可得 $x^2 = \frac{1}{4}$，解得驻点 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$，$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$，故所求最短距离为

$$d = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(6) **解** 在 $xy = 4$ 上任取一点 $P(x, y)$，则点 P 到直线 $2x + y = 1$ 的距离为

$$d = \frac{|2x + y - 1|}{\sqrt{5}},$$

只需求 $d^2 = \frac{(2x + y - 1)^2}{5}$ 的最小值.

利用拉格朗日乘数法，令 $L = \frac{1}{5}(2x + y - 1)^2 + \lambda(xy - 4)$，则

$$\begin{cases} L'_x = \frac{4}{5}(2x + y - 1) + \lambda y = 0, \\ L'_y = \frac{2}{5}(2x + y - 1) + \lambda x = 0, \\ L'_\lambda = xy - 4 = 0. \end{cases}$$

解方程组，得驻点 $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$，$(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$. 比较

$$d(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(4\sqrt{2} - 1),\ d(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1 + 4\sqrt{2}),$$

得最短距离为 $\frac{1}{\sqrt{5}}(4\sqrt{2} - 1)$.

(7) **解** (1) 在 $D: x^2 + y^2 < 16$ 内. 由

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 - 6x = 0, \\ z'_y = -6y = 0, \end{cases}$$

得驻点 $(0,0)$，$(2,0)$.

(2) 在 $D: x^2 + y^2 = 16$ 上. 利用拉格朗日乘数法，令 $L = x^3 - 3x^2 - 3y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 16)$，则

$$\begin{cases} L'_x = 3x^2 - 6x + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = -6y + 2\lambda y = 0, \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 16 = 0, \end{cases}$$

解得 $(0, \pm 4)$，$(\pm 4, 0)$.

(3) 比较大小.

$$z(0,0) = 0,\ z(2,0) = -4,\ z(0,4) = -48,$$
$$z(0,-4) = -48,\ z(4,0) = 16,\ z(-4,0) = -112,$$

得最大值为 $z(4,0) = 16$.

注 ① 在 $D: x^2 + y^2 = 16$ 上，考虑到 $z = x^3 - 3x^2 - 3y^2$ 中含 $x^2 + y^2$，可以化为一元函数极值问题.

将 $y^2=16-x^2$ 代入 $z=x^3-3x^2-3y^2$,得 $z=x^3-48(-4\leqslant x\leqslant 4)$.

又由 $\dfrac{dz}{dx}=3x^2=0$,解得 $x=0$,则可得 $y=\pm 4$. 又因为当 $x=\pm 4$ 时,$y=0$,所以在 D 边界上可能的最值点有 $(0,4),(0,-4),(4,0),(-4,0)$.

比较大小:$z(0,0)=0,\ z(2,0)=-4,\ z(0,4)=-48, z(0,-4)=-48,\ z(4,0)=16, z(-4,0)=-112$,得最大值为 $z(4,0)=16$.

② 求一元函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最值时,若可导函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有唯一极值点 P,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上,在点 P 处取得最值,但对二元函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上,此结论不一定成立.

此例,在 D 内有两个驻点 $(0,0),(2,0)$,则有 $z''_{xx}=6x-6, z''_{xy}=0, z''_{yy}=-6$.

对点 $(0,0)$,有 $A=-6,B=0,C=-6$,则 $AC-B^2=36>0, A=-6<0$,故 $(0,0)$ 是 $z=f(x,y)$ 的极大值点;

对点 $(2,0)$,有 $A=12,B=0,C=-6$,则 $AC-B^2=12\times(-6)-0<0$,故 $(2,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

综上可知,点 $(0,0)$ 是 $z=x^3-3x^2-3y^2$ 在 $x^2+y^2<16$ 内的唯一极大值点,但不是 $D:x^2+y^2\leqslant 16$ 上的最大值点,最大值 $z(4,0)=16$ 在边界 $x^2+y^2=16$ 上取得.

(8) 解 求 $u=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最值,利用拉格朗日乘数法.

令 $L=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(z-x^2-y^2)+\lambda_2(x+y+z-4)$,则

$$\begin{cases} L'_x=2x-2\lambda_1 x+\lambda_2=0, & ①\\ L'_y=2y-2\lambda_1 y+\lambda_2=0, & ②\\ L'_z=2z+\lambda_1+\lambda_2=0, & ③\\ L'_{\lambda_1}=z-x^2-y^2=0, & ④\\ L'_{\lambda_2}=x+y+z-4=0. & ⑤\end{cases}$$

显然方程组有 $x=y$ 解,将 $x=y$ 代入④、⑤式可得到点 $(-2,-2,8)$ 和点 $(1,1,2)$. 这两个点是函数 u 在已知条件下的极值点,故最大值为 $(-2)^2+(-2)^2+8^2=72$,最小值为 $1^2+1^2+2^2=6$.

(9) 解 设第一象限内,曲线上任一点为 $P(x,y)$. 方程 $3x^2+2xy+3y^2=a$ 两边同时对 x 求导,解得

$$y'=-\frac{3x+y}{x+3y},$$

则过点 P 的切线方程为

$$Y-y=-\frac{3x+y}{x+3y}(X-x).$$

切线与两个坐标轴的截距分别为 $x+\dfrac{x+3y}{3x+y}y$ 和 $y+\dfrac{3x+y}{x+3y}x$.

三角形的面积为

$$\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}\left(x+\frac{x+3y}{3x+y}y\right)\left(y+\frac{3x+y}{x+3y}x\right)\\ &=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{a+8xy}\quad(\text{这里利用了 } 3x^2+2xy+3y^2=a). \end{aligned}$$

由已知 $a>0$,只需求 xy 在条件 $3x^2+2xy+3y^2=a$ 下的最大值.

令 $L=xy+\lambda(3x^2+2xy+3y^2-a)$,则

$$\begin{cases} L'_x=y+6\lambda x+2\lambda y=0,\\ L'_y=x+2\lambda x+6\lambda y=0,\\ L'_\lambda=3x^2+2xy+3y^2-a=0. \end{cases}$$

解上方程组,得 $x=y=\dfrac{\sqrt{2a}}{4}$,故

$$S_{\min}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^{2}}{a+8\cdot\frac{\sqrt{2a}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2a}}{4}}=\frac{1}{4},$$

解得 $a=1$.

(10) 解 视 ξ、η 为中间变量，x、y 为自变量. 由已知，得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\cdot 1+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\cdot 1,\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\cdot a+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\cdot b,\end{cases}$$

这里$\frac{\partial u}{\partial \xi}$、$\frac{\partial u}{\partial \eta}$是以 ξ、η 为中间变量，x、y 为自变量的二元函数，故

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\\ &\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2ab\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(a+b)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+b\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\end{aligned}$$

代入已知方程，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(1+4a+3a^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+[2+4(a+b)+6ab]\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+(1+4b+3b^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

又由已知，得

$$\begin{cases}1+4a+3a^2=0, & ①\\ 1+4b+3b^2=0, & ②\\ 2+4(a+b)+6ab\neq 0, & ③\end{cases}$$

联立 ①、② 式解得$\begin{cases}a=-1,\\ b=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$或$\begin{cases}a=-\dfrac{1}{3},\\ b=-1,\end{cases}$且都满足 ③ 式，故为所求.

(11) 解 由 $z=\frac{u}{y}+\mathrm{e}^{-ux}+f(u)$，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{e}^{-ux}\left(u+x\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\\ &=-u\mathrm{e}^{-ux}+\left[\frac{1}{y}-x\mathrm{e}^{-ux}+f'(u)\right]\frac{\partial u}{\partial x}\\ &=-u\mathrm{e}^{-ux},\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=-\frac{u}{y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}-\mathrm{e}^{-ux}x\frac{\partial u}{\partial y}+f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}\\ &=-\frac{u}{y^2}+\left[\frac{1}{y}-x\mathrm{e}^{-ux}+f'(u)\right]\frac{\partial u}{\partial y}\\ &=-\frac{u}{y^2}.\end{aligned}$$

由$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}$，即 $u\mathrm{e}^{-ux}=\frac{u}{y^2}$，解得 $u(x,y)=\frac{\ln y^2}{x}$.

(12) 解 令 $\mathrm{e}^x\sin y=u$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\mathrm{e}^x\sin y,\ \frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\mathrm{e}^x\cos y,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f'(u)\mathrm{e}^x\sin y+f''(u)\mathrm{e}^{2x}\sin^2 y,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-f'(u)\mathrm{e}^x\sin y+f''(u)\mathrm{e}^{2x}\cos^2 y,$$

代入原方程,得 $f''(u)-f(u)=0$,此为二阶线性齐次微分方程,解得

$$f(u)=C_1\mathrm{e}^u+C_2\mathrm{e}^{-u}\quad(C_1,C_2\text{ 为任意常数}).$$

综合题

一、选择题

(1)A.

解 利用保号性和极值的定义.

由 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{\mathrm{e}^{x^2+y^2}-1}=1$,知 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$. 又由保号性,知在点 $(0,0)$ 的去心邻域内有 $f(x,y)>0=f(0,0)$. 由极值的定义可知,$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值,故选项 A 正确.

(2)B.

解 在点 $(0,0)$ 的去心邻域内有 $|x|+y^4>0$,则由保号性可知 $f(x,y)-f(0,0)<0$,再由极值的定义可知,$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极大值,故选项 B 正确.

(3)C.

解 由 $\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 有界,知

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}y\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0),$$

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{0}{x}=0,$$
$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\arctan\frac{1}{|y|}=\frac{\pi}{2},$$
$$\frac{\Delta f-\mathrm{d}f}{\rho}=\frac{f(x,y)-f(0,0)-[f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y]}{\rho}=\frac{y\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\left(0\cdot x+\dfrac{\pi}{2}\cdot y\right)}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

由于 $\left|\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant1$,故

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\Delta f-\mathrm{d}f}{\rho}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微,故选项 C 正确.

(4)C.

解 由 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{|x|}{y}}$,知 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}f(x,y)=0=f(0,1)$.

$$\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{f(0+\Delta x,1)-f(0,1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{0+\Delta x+(1-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{\Delta x}{1}}-0}{\Delta x}=1,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x,1)-f(0,1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{0+\Delta x+(1-1)\arcsin\sqrt{\frac{-\Delta x}{1}}-0}{\Delta x}=1,$$

故 $f'_x(0,1)=1$.

$$f'_y(0,1)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0+(1+\Delta y-1)\arcsin\sqrt{\frac{0}{1+\Delta y}}-0}{\Delta y}=0,$$

由于

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(0+\Delta x,1+\Delta y)-f(0,1)-[f'_x(0,1)\Delta x+f'_y(0,1)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\\&=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x+(1+\Delta y-1)\arcsin\sqrt{\frac{|\Delta x|}{1+\Delta y}}-(1\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\\&=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\left(\arcsin\sqrt{\frac{|\Delta x|}{1+\Delta y}}\right)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0\ \left(因为\left|\frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|\leqslant 1,\arcsin\sqrt{\frac{|\Delta x|}{1+\Delta y}}\to 0\right),\end{aligned}$$

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,1)$ 处可微，且 $\mathrm{d}f\big|_{(0,1)}=1\cdot\mathrm{d}x+0\cdot\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$. 选项 C 正确.

(5) A.

解 由 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$，知 $f(x,y)$ 关于 x 单调增加；由 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$，知 $f(x,y)$ 关于 y 单调减少. 故当 $x_1<x_2,y_1>y_2$ 时，有 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_1)$，$f(x_2,y_1)<f(x_2,y_2)$，即

$$f(x_1,y_1)<f(x_2,y_1)<f(x_2,y_2).$$

故选项 A 正确.

(6) A.

解 由 $F'_x(x_0,y_0)=0$，得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}=-\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}=0$，故 $x=x_0$ 是 $y=y(x)$ 的驻点.

方程 $F(x,y)=0$ 两边同时对 x 求导，得 $F'_x(x,y)+F'_y(x,y)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，再对 x 求导，得

$$F''_{xx}(x,y)+F''_{xy}(x,y)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left[F''_{yx}(x,y)+F''_{yy}(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F'_y(x,y)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0.$$

将 (x_0,y_0) 代入上式，解得 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=x_0}=-\frac{F''_{xx}(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}>0$，故 $y=y(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极小值，故选项 A 正确.

(7) C.

解 依题设，知

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\left[1-x-y+o\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)\right]=0,$$

故 $f(1,0)=0$.

由
$$\begin{aligned}f(x,y)-f(1,0)&=1-x-y+o\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)\\&=-(x-1)+(-1)y+o\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right),\end{aligned}$$

知
$$f'_x(1,0)=-1,\ f'_y(1,0)=-1.$$

又由
$$\begin{aligned}g'_x(x,y)&=f'_1(x+y,xy)\cdot 1+f'_2(x+y,xy)\cdot y,\\g'_y(x,y)&=f'_1(x+y,xy)\cdot 1+f'_2(x+y,xy)\cdot x,\end{aligned}$$

知 $$g'_x(1,0)=f'_1(1,0)=-1,\ g'_y(1,0)=f'_1(1,0)+f'_2(1,0)=-2.$$

故 $dg|_{(1,0)}=-dx-2dy$. 选项C正确.

二、填空题

(1) y^2+xy+1.

解 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$,两边同时对 y 积分,得$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\int 2dy+\varphi(x)=2y+\varphi(x)$.

由 $z'_y(x,0)=x$,得 $\varphi(x)=x$,故$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y+x$,再两边同时对 y 积分,得

$$z=\int(2y+x)dy+\varphi_1(x)=y^2+xy+\varphi_1(x).$$

又由 $z(x,0)=1$,得 $\varphi_1(x)=1$,于是 $z(x,y)=y^2+xy+1$.

(2) $\dfrac{1}{2}x^2y+\dfrac{1}{2}xy^2+x+y^2$.

解 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=x+y$,两边同时对 x 积分,得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\int(x+y)dx+\varphi(y)=\frac{1}{2}x^2+xy+\varphi(y),$$

由 $z(0,y)=y^2$,有$\dfrac{d(y^2)}{dy}=\varphi(y)$,故 $\varphi(y)=2y$.

又由$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2}x^2+xy+2y$,两端同时对 y 积分,得

$$z=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+y^2+\varphi_1(x),$$

由于 $z(x,0)=x$,故 $\varphi_1(x)=x$,所以 $z(x,y)=\dfrac{1}{2}x^2y+\dfrac{1}{2}xy^2+x+y^2$.

(3) $n!\left[1+\dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right]$.

解 $z=\dfrac{2x}{x^2-y^2}=\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{1}{y-x}$,利用$\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{x^{n+1}}$,有

$$\frac{\partial^n z}{\partial y^n}=(-1)^n\frac{n!}{(x+y)^{n+1}}-(-1)^n\frac{n!}{(y-x)^{n+1}},$$

故$\left.\dfrac{\partial^n z}{\partial y^n}\right|_{(2,1)}=(-1)^n\dfrac{n!}{3^{n+1}}-(-1)^n\dfrac{n!}{(-1)^{n+1}}=n!\left[1+\dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right]$.

(4) 4.

解 依题设,有

$$f(1+2h,1)=e^{(1+2h)+1-2}+o(2|h|)=e^{2h}+o(2|h|),$$
$$f(1,1-2h)=e^{1+(1-2h)-2}+o(2|h|)=e^{-2h}+o(2|h|),$$

故
$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h,1)-f(1,1-2h)}{h}\\=&\lim_{h\to0}\frac{e^{2h}+o(2|h|)-e^{-2h}-o(2|h|)}{h}\\=&\lim_{h\to0}\frac{e^{2h}-e^{-2h}}{h}=\lim_{h\to0}(2e^{2h}+2e^{-2h})=2+2=4.\end{aligned}$$

三、解答题

(1) 解 此题是隐函数与复合函数求导的综合题.

由 $xe^x=\tan t$,可知 x 是t 的函数,同理 $y=\cos t$,y 也是t 的函数,再由 $x+y-z=e^z$,可知 z 是 t 的一元函数.

方程 $x+y-z=\mathrm{e}^z$ 两边同时对 t 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^z\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t},$$

故 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{1+\mathrm{e}^z}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$. 再求导，得

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=\mathrm{e}^z\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2+\mathrm{e}^z\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}&=\frac{1}{1+\mathrm{e}^z}\left[\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\mathrm{e}^z\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\\&=\frac{1}{1+\mathrm{e}^z}\left[\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\mathrm{e}^z\cdot\frac{1}{(1+\mathrm{e}^z)^2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2\right].\end{aligned}\qquad ①$$

而 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\sin t$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-\cos t$，又由 $x\mathrm{e}^x=\tan t$，得 $\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sec^2 t$. 再对 t 求导，得

$$\mathrm{e}^x\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\mathrm{e}^x\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+x\mathrm{e}^x\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+x\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=2\sec^2 t\cdot\tan t,$$

故

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\sec^2 t}{(1+x)\mathrm{e}^x},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\sec^2 t[2\mathrm{e}^x(1+x)^2\tan t-(2+x)\sec^2 t]}{(1+x)^3\mathrm{e}^{2x}}.$$

当 $t=0$ 时，由 $x\mathrm{e}^x=0$，得 $x=0$，而 $y=\cos 0=1$. 将 $x=0,y=1$ 代入 $x+y-z=\mathrm{e}^z$，得 $z=0$，故

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=1,\ \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0,\ \left.\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0}=-2,\ \left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0}=-1,$$

代入 ① 式，可知 $\left.\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0}=-\frac{13}{8}$.

(2) 证 （必要性）设 $z=f\left(\frac{x}{y}\right)$. 令 $\frac{x}{y}=u$，则

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\cdot\frac{1}{y}, & ①\\ \frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right), & ②\end{cases}$$

令 ①$\times x+$②$\times y$，可得 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

（充分性）设 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$. 令 $u=\frac{x}{y}$，$v=y$，则 $z=z(x,y)$ 为

$$z=z(yu,v)=f(u,v).$$

根据复合函数微分法，有 $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=f'_u\cdot\frac{1}{y}+f'_v\cdot 0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=f'_u\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+f'_v\cdot 1.\end{cases}$ 由条件

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}f'_u-\frac{x}{y}f'_u+yf'_v=0,$$

知 $f'_v=0$，故 f 只是 u 的函数，即 $z=f(u)=f\left(\frac{x}{y}\right)$.

(3) 解 方法一：方程 $F\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z}$，两边分别对 x,y 求导，得

$$\begin{cases}F'\cdot\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=-\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}, & ①\\ F'\cdot\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=-\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}, & ②\end{cases}$$

解得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z^2F'}{(F'+1)x^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{z^2F'}{(F'+1)y^2}$,故$x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

方法二:用公式求. 令$G=F\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}\right)-\dfrac{1}{z}$,则

$$G'_x=F'\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right),\ G'_y=F'\cdot\frac{1}{y^2},\ G'_z=F'\cdot\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^2},$$

故$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{G'_x}{G'_z}=\dfrac{z^2F'}{x^2(F'+1)}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{G'_y}{G'_z}=-\dfrac{z^2F'}{y^2(F'+1)}$,从而$x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

(4) 解 将$z=z(x,y)$代入$y=g(x,z)$,得

$$y=g[x,z(x,y)]. \tag{①}$$

在方程 ① 两边同时对x求导,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g_1'\cdot 1+g_2'\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right). \tag{②}$$

在方程$f(x-z,xy)=0$两边分别对x,y求偏导,视z是关于x,y的函数,得

$$\begin{cases}f_1'\cdot\left(1-\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)+f_2'\cdot y=0,\\ f_1'\cdot\left(0-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)+f_2'\cdot x=0,\end{cases}$$

解得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{f_1'+f_2'\cdot y}{f_1'}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{f_2'\cdot x}{f_1'}$,将其代入 ② 式,解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f_1'g_1'+g_2'(f_1'+f_2'\cdot y)}{f_1'-xf_2'g_2'}.$$

(5) 解 利用拉格朗日乘数法.

令$L(x,y,\lambda)=(1+y)^2+(1+x)^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3)$,则

$$\begin{cases}L'_x=2(1+x)+\lambda(2x+y)=0, & ①\\ L'_y=2(1+y)+\lambda(2y+x)=0, & ②\\ L'_\lambda=x^2+y^2+xy-3=0. & ③\end{cases}$$

消去 ①、② 式中的λ,可得$(x-y)(x+y-1)=0$,故$x=y$或$x+y-1=0$.

当$x=y$时,代入 ③ 式,解得$x=y=\pm1$;

当$x+y=1$时,代入 ③ 式,解得$x=2,y=-1$或$x=-1,y=2$.

比较大小:

$$f(1,1)=8,\ f(-1,-1)=0,\ f(2,-1)=f(-1,2)=9,$$

故$f(x,y)$的最大值为 9.

注 若$L(x,y,\lambda)$关于x,y具有轮换性(即x,y互换位置,$L(x,y,\lambda)$不变),一般地,方程组$\begin{cases}L'_x=0,\\ L'_y=0,\\ L'_\lambda=0\end{cases}$有解$x=y$.

但应注意,方程组的全部解不一定都满足$x=y$. 此题最大值不是在满足$x=y$的点取得,应引起重视,否则容易漏解.

(6) 解 先求$f(x,y)$的驻点,由

$$\begin{cases}f'_x=3x^2-2ax=0,\\ f'_y=3y^2-2by=0,\end{cases}$$

得$(0,0)$，$\left(0,\dfrac{2}{3}b\right)$，$\left(\dfrac{2}{3}a,0\right)$，$\left(\dfrac{2}{3}a,\dfrac{2}{3}b\right)$,且

$$f''_{xx}=6x-2a,\ f''_{xy}=0,\ f''_{yy}=6y-2b.$$

对于点$(0,0)$,由$A=-2a<0$, $B=0$, $C=-2b$,可知$AC-B^2=4ab>0$,故$f(0,0)=0$为极大值.

对于点$\left(0,\dfrac{2}{3}b\right)$,由$A=-2a$, $B=0$, $C=2b$,知$AC-B^2=-4ab<0$,故$f(x,y)$不取得极值.

同理,在点$\left(\dfrac{2}{3}a,0\right)$处,$f(x,y)$也不取得极值.

对于点$\left(\dfrac{2}{3}a,\dfrac{2}{3}b\right)$,由$A=2a>0$, $B=0$, $C=2b$,知$AC-B^2=4ab>0$,取得极小值,由已知,有

$$f\left(\frac{2}{3}a,\ \frac{2}{3}b\right)=-\frac{4}{27}(a^3+b^3)=-8,\ 即\ a^3+b^3=54.$$

显然,当$a=b$时,$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$所围面积最大,故$2a^3=54$,即$a^3=27$,解得$a=b=3$.

注 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$所围面积为$\pi ab$,相当于求$ab$在条件$a^3+b^3=54$下的最大值. 令$L=ab+\lambda(a^3+b^3-54)$,则

$$\begin{cases}L'_a=b+3a^2\lambda=0, & ①\\ L'_b=a+3b^2\lambda=0, & ②\\ L'_\lambda=a^3+b^3-54=0. & ③\end{cases}$$

由①式得$\lambda=-\dfrac{b}{3a^2}$,代入②式得$a=b$,代入③式得$2a^3=54$,即$a^3=27$,故$a=b=3$.

(7) **解** 依题意,有

$$\begin{cases}f'_x(-1,y_0)=e^{-x}(-ax-b+y^2+a)\Big|_{(-1,y_0)}=e(2a-b+y_0^2)=0, & ①\\ f'_y(-1,y_0)=-2ye^{-x}\Big|_{(-1,y_0)}=0. & ②\end{cases}$$

此处由②式知$y_0=0$,故$f(x,y)$在点$(-1,0)$处取得极大值. 解①式得$b=2a$. 又

$$A=f''_{xx}(-1,0)=e^{-x}(ax+b-y^2-2a)\Big|_{(-1,0)}=e(-3a+b),$$

$$B=f''_{xy}(-1,0)=2ye^{-x}\Big|_{(-1,0)}=0,$$

$$C=f''_{yy}(-1,0)=-2e^{-x}\Big|_{(-1,0)}=-2e,$$

由已知,$AC-B^2=-2e^2(-3a+b)>0$, $A<0$,故$a>0$, $b=2a$.

当$a=0,b=0$时,$AC-B^2=0$,此时

$$f(x,y)=-y^2e^{-x}\leqslant f(-1,0)=0,$$

不满足极值的定义,故$f(-1,0)$不是极大值.

综上所述,a,b满足的条件为$a>0,b=2a$.

(8) **解** 令$L=x^2+2kxy+y^2+\lambda(1-x^2-y^2)$,则由

$$\begin{cases}L'_x=2x+2ky-2\lambda x=0,\\ L'_y=2kx+2y-2\lambda y=0,\\ L'_\lambda=1-x^2-y^2=0\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}(1-\lambda)x+ky=0, & ①\\ kx+(1-\lambda)y=0, & ②\\ x^2+y^2=1. & ③\end{cases}$$

因 ① 式和 ② 式构成的方程组的零解不满足 ③ 式,故 ① 式和 ② 式构成的方程组有非零解,则

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & k \\ k & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-k^2=0,$$

即$\lambda^2-2\lambda+1-k^2=0$,解得 $\lambda=1+k,\lambda=1-k$.

当 $\lambda=1+k$ 时,由 ① 式,知 $x=y$,再联立 ③ 式,可得

$$x^2+y^2+2kxy=1+2kx^2=1+k.$$

当 $\lambda=1-k$ 时,由 ① 式,知 $x=-y$,再联立 ③ 式,可得

$$x^2+y^2+2kxy=1-2kx^2=1-k.$$

综上所述,最大值为$\lambda_1=1+k$,最小值为$\lambda_2=1-k$.故$\lambda_1+\lambda_2=2$.

(9) 解 由$\begin{cases} f'_x=(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0, \\ f'_y=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0, \end{cases}$ 解得驻点为$(1,0),(-1,0)$.又由

$$A=f''_{xx}=x(x^2-3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

$$B=f''_{xy}=y(x^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

$$C=f''_{yy}=x(y^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

可知在点$(1,0)$ 处,有 $AC-B^2=2e^{-1}>0$, $A=-2e^{-\frac{1}{2}}<0$,故 $f(1,0)=e^{-\frac{1}{2}}$ 为极大值.

在点$(-1,0)$ 处,有 $AC-B^2=2e^{-1}>0$, $A=2e^{-\frac{1}{2}}>0$,故 $f(-1,0)=-e^{-\frac{1}{2}}$ 为极小值.

综上所述,$f(x,y)$ 在点$(-1,0)$ 处取得极小值$-e^{-\frac{1}{2}}$,在点$(1,0)$ 处取得极大值 $e^{-\frac{1}{2}}$.

(10) 解 原方程两边取对数:

$$\ln f(x,y)=-2\ln|y|-\frac{1}{2y^2}\left[(x-a)^2+(y-1)^2\right].$$

由

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln f}{\partial x}=-\dfrac{1}{y^2}(x-a)=0, \\ \dfrac{\partial \ln f}{\partial y}=-\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{y^3}\left[(x-a)^2+(y-1)^2\right]-\dfrac{1}{y^2}(y-1)=0 \end{cases}$$

解得驻点为$\left(a,\frac{1}{2}\right),(a,-1)$.

$$\frac{\partial^2 \ln f}{\partial x^2}=-\frac{1}{y^2},$$

$$\frac{\partial^2 \ln f}{\partial x\partial y}=\frac{2}{y^3}(x-a),$$

$$\left.\frac{\partial^2 \ln f}{\partial y^2}\right|_{x=a}=\frac{1}{y^4}\left[y^2-3(y-1)^2+4y(y-1)\right].$$

对于点$\left(a,\frac{1}{2}\right)$,$A=\left.\dfrac{\partial^2 \ln f}{\partial x^2}\right|_{(a,\frac{1}{2})}=-4<0$,$B=\left.\dfrac{\partial^2 \ln f}{\partial x\partial y}\right|_{(a,\frac{1}{2})}=0$,$C=\left.\dfrac{\partial^2 \ln f}{\partial y^2}\right|_{(a,\frac{1}{2})}=-24$,$AC-B^2=96>0$,故 $f\left(a,\frac{1}{2}\right)=4e^{-\frac{1}{2}}$ 为极大值.

对于点$(a,-1)$,$A=\left.\dfrac{\partial^2 \ln f}{\partial x^2}\right|_{(a,-1)}=-1<0$,$B=\left.\dfrac{\partial^2 \ln f}{\partial x\partial y}\right|_{(a,-1)}=0$,$C=\left.\dfrac{\partial^2 \ln f}{\partial y^2}\right|_{(a,-1)}=-3$,$AC-B^2=(-1)\times(-3)-0=3>0$,故 $f(a,-1)=e^{-2}$ 为极大值,$f(x,y)$ 无极小值.

(11) 解 用拉格朗日乘数法.令 $L=xy+2xz+2yz+\lambda(xyz-1)$,则

$$\begin{cases} L'_x = y + 2z + \lambda yz = 0, & ① \\ L'_y = x + 2z + \lambda xz = 0, & ② \\ L'_z = 2x + 2y + \lambda xy = 0, & ③ \\ L'_\lambda = xyz - 1 = 0, & ④ \end{cases}$$

由 ①$\times x$,②$\times y$,③$\times z$,得

$$\begin{cases} xy + 2xz = -\lambda xyz, & ⑤ \\ xy + 2yz = -\lambda xyz, & ⑥ \\ 2xz + 2yz = -\lambda xyz. & ⑦ \end{cases}$$

由 ⑤、⑥ 式得 $xz = yz$,又 $z \neq 0$,故 $x = y$.

由 ⑥、⑦ 式得 $xy = 2xz$,又 $x \neq 0$,故 $y = 2z$.

将 $x = y, y = 2z$ 代入式 ④,解得 $x = y = \sqrt[3]{2}$, $z = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$,故 u 在条件 $xyz = 1$ 下的最小值与极小值相等,其值为

$$u = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} + 2 \times \sqrt[3]{2} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{2} + 2 \times \sqrt[3]{2} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{2} = 3\sqrt[3]{4}.$$

(12) **解** 在已知方程两边同时对 x, y 求偏导数,得

$$\begin{cases} 2x - 6y - 2y\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2z\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, & ① \\ -6x + 20y - 2z - 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} - 2z\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0. & ② \end{cases}$$

令 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$,得 $\begin{cases} x - 3y = 0, \\ -3x + 10y - z = 0, \end{cases}$ 解得 $x = 3y, z = y$,代入原方程解得

$$x = 9,\ y = 3,\ z = 3 \text{ 或 } x = -9,\ y = -3,\ z = -3.$$

①、② 式两边同时对 x, y 求偏导数,得

$$\begin{cases} 2 - 2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - 2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \\ -6 - 2\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2\dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} - 2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \\ 20 - 2\dfrac{\partial z}{\partial y} - 2\dfrac{\partial z}{\partial y} - 2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \end{cases}$$

将 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0, x = 9, y = 3, z = 3$ 代入上方程组,得

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(9,3,3)} = \frac{1}{6},\ B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(9,3,3)} = -\frac{1}{2},\ C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(9,3,3)} = \frac{5}{3},$$

故 $AC - B^2 = \dfrac{1}{36} > 0, A = \dfrac{1}{6} > 0$,所以 $z(9,3) = 3$ 为极小值.

同理,得

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-9,-3,-3)} = -\frac{1}{6}, B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(-9,-3,-3)} = \frac{1}{2},\ C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-9,-3,-3)} = -\frac{5}{3},$$

故 $AC - B^2 = \dfrac{1}{36} > 0$, $A = -\dfrac{1}{6} < 0$,所以 $z(-9, -3) = -3$ 为极大值.

(13) **证** 由 $z = f(x)\ln f(y)$,得 $z'_x = f'(x)\ln f(y)$, $z'_y = f(x) \cdot \dfrac{f'(y)}{f(y)}$.

由已知,$f'(0) = 0$,故 $z'_x(0,0) = f'(0)\ln f(0) = 0$, $z'_y(0,0) = f(0) \cdot \dfrac{f'(0)}{f(0)} = 0$. 又

$$z''_{xx}(x,y)=f''(x)\ln f(y),$$
$$z''_{xy}(x,y)=f'(x)\frac{f'(y)}{f(y)},$$
$$z''_{yy}(x,y)=f(x)\frac{f''(y)f(y)-[f'(y)]^2}{f^2(y)},$$

所以

$$A=z''_{xx}(0,0)=f''(0)\ln f(0),\ B=z''_{xy}(0,0)=0,\ C=z''_{yy}(0,0)=f''(0).$$

又因 $f''(0)>0, f(0)>1$,故

$$AC-B^2=f''(0)\ln f(0)\cdot f''(0)-0^2=[f''(0)]^2\ln f(0)>0,$$
$$A=f''(0)\ln f(0)>0.$$

所以 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点$(0,0)$处取得极小值.

(14) 解 依题意,有$\frac{\partial z}{\partial x}=y-x^2$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x-1$,故

$$z=\int\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x=\int(y-x^2)\mathrm{d}x+\varphi(y)=xy-\frac{1}{3}x^3+\varphi(y).$$

又$\frac{\partial z}{\partial y}=x+\varphi'(y)=x-1$,得 $\varphi'(y)=-1$,积分得 $\varphi(y)=-y+C$,所以

$$z=xy-\frac{1}{3}x^3-y+C.$$

由 $f(1,1)=-\frac{1}{3}$,得 $C=0$,于是 $z=f(x,y)=xy-\frac{1}{3}x^3-y$.

(1) 在 D 内,如图 4-1 所示,由

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y-x^2=0,\ \frac{\partial z}{\partial y}=x-1=0$$

解得唯一驻点$(1,1)$.

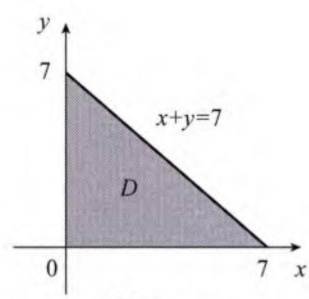


图 4-1

(2) 在 D 的边界上,

$$y=0(0\leqslant x\leqslant 7),\ f(x,0)=-\frac{1}{3}x^3,$$

显然在$[0,7]$上最大值为 0;

$$x=0(0\leqslant y\leqslant 7),\ f(0,y)=-y,$$

最大值为 0.

$$x+y=7,\ f(x,7-x)=-\frac{x^3}{3}-x^2+8x-7\ (0\leqslant x\leqslant 7),$$

由$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x,7-x)]=-x^2-2x+8=0$,得 $x=2, x=-4$(舍).

比较大小:

$$f(1,1)=-\frac{1}{3},\ f(0,0)=0, f(2,5)=\frac{7}{3},\ f(0,7)=-7,\ f(7,0)=-\frac{7^3}{3},$$

故 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为 $f(2,5)=\frac{7}{3}$.

注 此题已知全微分,求 $f(x,y)$ 也可利用凑微分法:

$$\mathrm{d}z=(y-x^2)\mathrm{d}x+(x-1)\mathrm{d}y=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y-x^2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$$
$$=\mathrm{d}(xy)-\mathrm{d}\left(\frac{x^3}{3}\right)-\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(xy-\frac{x^3}{3}-y\right),$$

故 $z=xy-\frac{x^3}{3}-y+C$.

(15) 解（Ⅰ）由已知，有 $f'_x = 2ax + by, f'_y = 2by + ax$，则

$$f''_{xy} = b = f''_{yx} = a, \text{ 即 } a = b.$$

由 $f'_x(1,1) = 3$，得 $2a + b = 3$，故 $a = b = 1$. 从而

$$\begin{aligned}df(x,y) &= (2x + y)dx + (2y + x)dy \\ &= 2x\,dx + y\,dx + 2y\,dy + x\,dy \\ &= d(x^2 + y^2) + d(xy) \\ &= d(x^2 + y^2 + xy + c),\end{aligned}$$

故 $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + c$. 由 $f(0,0) = -3$，得 $c = -3$，即

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 3.$$

（Ⅱ）设 $f(x,y) = 0$ 上任一点为 (x,y)，则点 $(-1,-1)$ 到点 (x,y) 的距离

$$d = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2},$$

下求 $(x+1)^2 + (y+1)^2$ 在条件 $x^2 + y^2 + xy - 3 = 0$ 下的最大值. 用拉格朗日乘数法.

令 $L = (1+x)^2 + (1+y)^2 + \lambda(x^2 + y^2 + xy - 3)$，则

$$\begin{cases}L'_x = 2(1+x) + \lambda(2x + y) = 0, & ① \\ L'_y = 2(1+y) + \lambda(2y + x) = 0, & ② \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 + xy - 3 = 0. & ③\end{cases}$$

由 ①、② 式消去 λ，得 $(x - y)(x + y - 1) = 0$，从而 $x = y$ 或者 $x + y = 1$.

当 $x = y$ 时，代入 ③ 式，解得 $x = y = \pm 1$；

当 $x + y = 1$ 时，代入 ③ 式，解得 $x = 2, y = -1$ 或者 $x = -1, y = 2$.

比较大小：$d^2(1,1) = 8, d^2(-1,-1) = 0, d^2(2,-1) = d^2(-1,2) = 9$.

故所求最大值为 $\sqrt{9} = 3$.

(16) 解（Ⅰ）　$f'_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}\cdot\varphi(x,0)$,

由 $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，及 $\varphi(0,0) = 0$，得 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x,0) = \varphi(0,0) = 0$，故 $f'_x(0,0) = 0$.

同理可求得 $f'_y(0,0) = 0$.

证（Ⅱ）由于

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\Delta f - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}\,\varphi(x,y) - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\varphi(x,y) = \varphi(0,0) = 0,\end{aligned}$$

故由可微的定义，知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，且全微分

$$df\Big|_{(0,0)} = f'_x(0,0)dx + f'_y(0,0)dy = 0.$$

(17) 解 分段函数，用偏导数的定义进行求解.

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(0+x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x} = 0.$$

同理，$f'_y(0,0) = 0$. 由于

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(0+x,0+y) - f(0,0) - [f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y]}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

其中当 $x \to 0$ 时，$\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 有界，$\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 有界，故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

$$f_x'(x,y)=y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{yx^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

取 $y=x$,则 $\lim\limits_{y=x\to0}f_x'(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\left(x\sin\frac{1}{\sqrt{2}\,|x|}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{x}{|x|}\cos\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)$ 不存在,故 $f_x'(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

同理,$f_y'(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

(18) 解 依题意,相当于求原点 $(0,0)$ 到椭圆上的点的距离 d 的最大值和最小值,如图 4-2 所示.

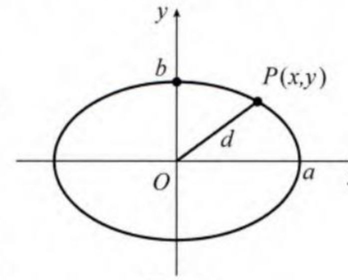


图 4-2

设 $P(x,y)$ 为椭圆上任一点,则 $d=\sqrt{x^2+y^2}$, $d^2=x^2+y^2$.

利用拉格朗日乘数法.令 $L=x^2+y^2+\lambda(x^2-4xy+5y^2-1)$,则

$$\begin{cases}L_x'=2x+2\lambda x-4\lambda y=0, & ①\\ L_y'=2y-4\lambda x+10\lambda y=0, & ②\\ L_\lambda'=x^2-4xy+5y^2-1=0. & ③\end{cases}$$

令 ①$\times\frac{x}{2}+$②$\times\frac{y}{2}$,可得

$$x^2+y^2+\lambda(x^2-4xy+5y^2)=0.$$

又 $x^2-4xy+5y^2=1$,故 $x^2+y^2=-\lambda$,于是只需求 λ,可得 $d=\sqrt{-\lambda}$.

① 式与 ② 式变形为 $\begin{cases}(1+\lambda)x-2\lambda y=0,\\ -2\lambda x+(1+5\lambda)y=0,\end{cases}$ 该方程组为关于 x,y 的二元一次齐次方程组,有非零解 x,y 的充分必要条件是 $\begin{vmatrix}1+\lambda & -2\lambda\\ -2\lambda & 1+5\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+6\lambda+1=0$,解得

$$\lambda_1=-3+2\sqrt{2},\ \lambda_2=-3-2\sqrt{2},$$

故 $-\lambda=3\pm2\sqrt{2}=(\sqrt{2}\pm1)^2$,所以 $d_1=\sqrt{2}+1$, $d_2=\sqrt{2}-1$ 分别为长半轴和短半轴.

(19) 解 方程组等号两边同时对 y 求导,得

$$\begin{cases}F_1'\cdot\left(1-\frac{dx}{dy}\right)+F_2'\cdot\left(1-\frac{dz}{dy}\right)=0,\\ G_1'\cdot\left(x+y\frac{dx}{dy}\right)+G_2'\cdot\left(-\frac{z}{y^2}+\frac{1}{y}\frac{dz}{dy}\right)=0,\end{cases}$$

整理,得

$$\begin{cases}F_1'\frac{dx}{dy}+F_2'\frac{dz}{dy}=F_1'+F_2',\\ yG_1'\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}G_2'\frac{dz}{dy}=\frac{z}{y^2}G_2'-xG_1',\end{cases}$$

解此方程组,得

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\begin{vmatrix}F_1'+F_2' & F_2'\\ \frac{z}{y^2}G_2'-xG_1' & \frac{1}{y}G_2'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_1' & F_2'\\ yG_1' & \frac{1}{y}G_2'\end{vmatrix}}=\frac{\frac{1}{y}F_1'G_2'+xF_2'G_1'+\left(\frac{1}{y}-\frac{z}{y^2}\right)F_2'G_2'}{\frac{1}{y}F_1'G_2'-yF_2'G_1'}.$$

同理,可得

$$\frac{dz}{dy}=-\frac{(x+y)F_1'G_1'+yF_2'G_1'-\frac{z}{y^2}F_1'G_2'}{\frac{1}{y}F_1'G_2'-yF_2'G_1'}.$$

(20) 解 利用拉格朗日乘数法,令 $L=\frac{1}{\alpha}x^{\alpha}+\frac{1}{\beta}y^{\beta}+\lambda(xy-1)$,则

$$\begin{cases}L'_x=x^{\alpha-1}+\lambda y=0,\\L'_y=y^{\beta-1}+\lambda x=0,\\L'_\lambda=xy-1=0,\end{cases}$$

解方程组得 $x=y=1$. 由此得到点 $(1,1)$ 是唯一的极值点,故点 $(1,1)$ 即为最小值点,最小值为 $f_{\min}=f(1,1)=1$.

(21) 解 (Ⅰ) $\frac{\partial f(x,x+y)}{\partial x}=f'_1(x,x+y)+f'_2(x,x+y)$.

由 $u=x$, $v=x+y$ 及已知等式,有

$$\frac{\partial f(x,x+y)}{\partial x}=f'_1(x,x+y)+f'_2(x,x+y)=(x+x+y)\mathrm{e}^{x-(x+y)}=(2x+y)\mathrm{e}^{-y}.$$

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知,

$$\begin{aligned}f(x,x+y)&=\int(2x+y)\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x+\varphi(y)\\&=(x^2+xy)\mathrm{e}^{-y}+\varphi(y)\\&=x(x+y)\mathrm{e}^{-y}+\varphi(y).\end{aligned}$$

故 $f(u,v)=uv\mathrm{e}^{u-v}+\varphi(v-u)$.

由 $f(0,v)=0$,知 $\varphi(v)=0$,故 $\varphi(v-u)=0$,所以 $f(u,v)=uv\mathrm{e}^{u-v}$.

下面求 $f(u,v)=uv\mathrm{e}^{u-v}$ 的极值.

由

$$\begin{cases}f'_u=v\mathrm{e}^{u-v}+uv\mathrm{e}^{u-v}=\mathrm{e}^{u-v}(v+uv)=0,\\f'_v=u\mathrm{e}^{u-v}+uv\mathrm{e}^{u-v}(-1)=\mathrm{e}^{u-v}(u-uv)=0,\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}v+uv=0,\\u-uv=0,\end{cases}$$

解得:$u=0,v=0;u=-1,v=1$.

又有

$$\begin{aligned}f''_{uu}&=\mathrm{e}^{u-v}(2v+uv),\\f''_{uv}&=\mathrm{e}^{u-v}(-v-uv+1+u),\\f''_{vv}&=\mathrm{e}^{u-v}(uv-2u),\end{aligned}$$

对于点 $(0,0)$,$A=0$, $B=1$, $C=0$, $AC-B^2=-1<0$. 故 $f(u,v)$ 不取得极值.

对于点 $(-1,1)$,$A=\mathrm{e}^{-2}>0$, $B=0$, $C=\mathrm{e}^{-2}$,$AC-B^2=\mathrm{e}^{-4}>0$,故 $f(u,v)$ 在点 $(-1,1)$ 处取得极小值,极小值为 $f(-1,1)=-\mathrm{e}^{-2}$.

(22) 解 (Ⅰ) 由 $z=xy-w$,有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y-\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=y-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=x-\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial^2 w}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\\&=-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=1-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial^2 w}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\\&=1-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\\&=-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},\end{aligned}$$

代入原方程,得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2-4\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0,$$

故$\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\dfrac{1}{2}$.

(Ⅱ)

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\int\frac{1}{2}\mathrm{d}u+\varphi_1(v)=\frac{1}{2}u+\varphi_1(v),$$

由$\dfrac{\partial w(0,v)}{\partial u}=v\mathrm{e}^{-v}$，得 $\varphi_1(v)=v\mathrm{e}^{-v}$，故

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{1}{2}u+v\mathrm{e}^{-v},\quad w=\int\left(\frac{1}{2}u+v\mathrm{e}^{-v}\right)\mathrm{d}u+\varphi_2(v)=\frac{u^2}{4}+uv\mathrm{e}^{-v}+\varphi_2(v).$$

由 $w(0,v)=\dfrac{v^2}{4}$,得 $\varphi_2(v)=\dfrac{v^2}{4}$,故

$$w=\frac{u^2}{4}+uv\mathrm{e}^{-v}+\frac{v^2}{4}.$$

从而

$$\begin{aligned}z=xy-w&=xy-\left[\frac{(x+y)^2}{4}+(x+y)(x-y)\mathrm{e}^{-(x-y)}+\frac{(x-y)^2}{4}\right]\\&=xy-\frac{1}{2}(x^2+y^2)-(x^2-y^2)\mathrm{e}^{-(x-y)}.\end{aligned}$$

(23) 解 由已知,有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial u}\right),\\&\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2},\\&\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)\\&\qquad=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right),\end{aligned}$$

故$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=12a$. 所以$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=3a$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=3a$,有

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\int 3a\,\mathrm{d}v+\varphi_1(u)=3av+\varphi_1(u).$$

由$\dfrac{\partial f(u,0)}{\partial u}=-3u^2$,知$\varphi_1(u)=-3u^2$. 故$\dfrac{\partial f}{\partial u}=3av-3u^2$.

$$f(u,v)=\int(3av-3u^2)\mathrm{d}u+\varphi_2(v)=3auv-u^3+\varphi_2(v).$$

由 $f(0,v)=-v^3$,得$\varphi_2(v)=-v^3$,则 $f(u,v)=3auv-u^3-v^3$.

由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial u}=3av-3u^2=0,\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial v}=3au-3v^2=0,\end{cases}$$

得驻点 $P_1(0,0)$，$P_2(a,a)$.

又$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}=-6u$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=3a$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=-6v$.

对于 $P_1(0,0)$，有 $A=0,B=3a,C=0$.

由 $AC-B^2=-9a^2<0$，知 $f(u,v)$ 在点 $P_1(0,0)$ 不取得极值.

对于 $P_2(a,a)$，有 $A=-6a,B=3a,C=-6a$.

由 $AC-B^2=(-6a)(-6a)-9a^2=27a^2>0$，知：

当 $a>0$ 时，$A=-6a<0$，$f(a,a)=a^3$ 为极大值；

当 $a<0$ 时，$A=-6a>0$，$f(a,a)=a^3$ 为极小值.

拓展题

一、选择题

D.

解 对于选项 D：当选项 D 中条件成立时，有

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{\Delta x}\cdot(\Delta x)^2\sin\frac{1}{(\Delta x)^2}\right]=0,$$

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\left[\frac{1}{\Delta y}\cdot(\Delta y)^2\sin\frac{1}{(\Delta y)^2}\right]=0,$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta f-\mathrm{d}f}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{\frac{1}{2}}\cdot\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=0.$$

由可微的定义，知 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 处可微，且 $\mathrm{d}f=0$，选项 D 正确.

对于选项 A：由 $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$，知偏导数存在，但不能推出 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 处可微.

对于选项 B：$\Delta f=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$，当 $\Delta y=0$ 时，$\Delta f=0$；当 $\Delta x=0$ 时，$\Delta f=0$，故

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=0,f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta y}=0,$$

由此可知

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta f-\mathrm{d}f}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

不存在，即 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 处不可微.

对于选项 C：由于 $\Delta f=\dfrac{\sin[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$，且

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)^2}{|\Delta x|\cdot\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{|\Delta x|},$$

故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta x}{|\Delta x|}=1$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta x}{|\Delta x|}=-1$，从而 $f'_x(x_0,y_0)$ 不存在. 同理 $f'_y(x_0,y_0)$ 不存在，故 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 处不可微.

二、解答题

证 令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，由已知条件及极限与无穷小的关系，有

$$\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=(1+k)+\alpha\ \ (\alpha\text{ 为无穷小}),$$

即
$$f(x,y)=(1+k)\sqrt{x^2+y^2}+o(\rho). \qquad ①$$

(Ⅰ)① 式两边同时取极限,有
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+k)\sqrt{x^2+y^2}+\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} o(\rho)=0=f(0,0),$$
故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

(Ⅱ)当 $k\neq -1$ 时,
$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+k)\sqrt{x^2}+o(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+k)\frac{|x|}{x}+\frac{o(x)}{x}\right],$$
$\lim\limits_{x\to 0}(1+k)\dfrac{|x|}{x}$ 不存在,故 $f'_x(0,0)$ 不存在,同理 $f'_y(0,0)$ 不存在,因此 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微(偏导数存在是可微的必要条件).

(Ⅲ)当 $k=-1$ 时,$f(x,y)=o(\rho)$,故
$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}=0.$$
同理,$f'_y(0,0)=0$,故 $\mathrm{d}f\Big|_{(0,0)}=0\cdot x+0\cdot y$,则
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\Delta f-\mathrm{d}f}{\rho}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-0}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$
故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

第五章　二重积分

基础题

一、选择题

(1)B.

解 D 区域如图 5-1 所示，在 D 区域上有

$$[\ln(x+y)]^9 \leqslant [\sin(x+y)]^9 \leqslant (x+y)^9,$$

故选项 B 正确.

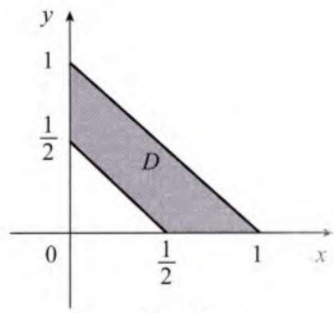


图 5-1

(2)C.

解 D 关于 y 轴对称，kx 关于 x 为奇函数，故

$$\iint_D kx\,dx\,dy = 0.$$

又在 D 内，$y<0$，故 $I<0$. 选项 C 正确.

(3)C.

解 依题意，D 如图 5-2 所示，

$$I=\iint_D (xy+\cos x\sin y)\,dx\,dy$$
$$=\iint_D xy\,dx\,dy+\iint_D \cos x\sin y\,dx\,dy = I_1+I_2.$$

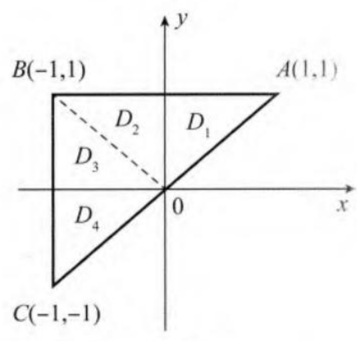


图 5-2

对于 I_1，$D_1\cup D_2$ 关于 y 轴对称，xy 关于 x 为奇函数，故

$$\iint_{D_1\cup D_2} xy\,dx\,dy = 0.$$

同理，$\iint\limits_{D_3\cup D_4} xy\,dx\,dy = 0$，于是 $I_1=0$.

对于 I_2，$D_3\cup D_4$ 关于 x 轴对称，$\cos x\sin y$ 关于 y 是奇函数，故

$$\iint_{D_3\cup D_4} \cos x\sin y\,dx\,dy = 0.$$

$D_1\cup D_2$ 关于 y 轴对称，$\cos x\sin y$ 关于 x 是偶函数，故

$$\iint_{D_1\cup D_2} \cos x\sin y\,dx\,dy = 2\iint_{D_1} \cos x\sin y\,dx\,dy.$$

故选项 C 正确.

(4)C.

解 原积分 I 的积分区域如图 5-3 所示，

$$D_1=\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2,\\ 0\leqslant y\leqslant \dfrac{x^2}{2},\end{cases}\quad D_2=\begin{cases}2\leqslant x\leqslant 2\sqrt{2},\\ 0\leqslant y\leqslant \sqrt{8-x^2},\end{cases}$$

故 $I=\int_0^2 dy\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\,dx$. 选项 C 正确.

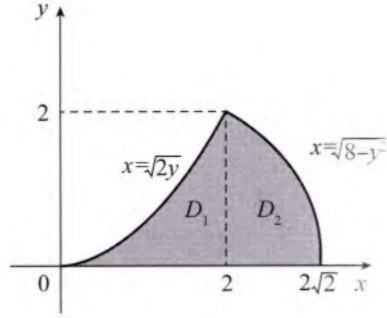


图 5-3

(5)C.

解 $x^2+y^2\leqslant x$ 化为极坐标方程为

$$0\leqslant r\leqslant \cos\theta,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},$$

故选项 C 正确.

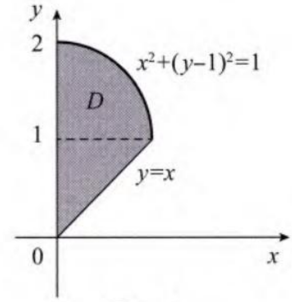


图 5-4

(6) C.

解 由 $r=2\sin\theta$,得 $r^2=2r\sin\theta$,即 $x^2+y^2=2y$,积分区域 D 如图 5-4 所示,所以选项 C 正确.

二、填空题

(1) $\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{3\mathrm{e}}$.

解 由于 e^{-y^2} 的原函数不能用初等函数表达,故交换积分顺序才能计算.

原积分区域 D 如图 5-5 所示,

$$I=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_x^1 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\int_0^y x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1 \mathrm{e}^{-y^2}\cdot y^3\mathrm{d}y\xlongequal{\text{分部积分}}\frac{1}{6}-\frac{1}{3\mathrm{e}}.$$

(2) $\dfrac{4}{\pi^3}(2+\pi)$.

解 由已知,作出积分区域 D,交换积分顺序,如图 5-6 所示,

$$\begin{aligned}I&=\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{2y}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}y\right)\mathrm{d}y\\&=-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi}{2}y\mathrm{d}y\xlongequal{\text{分部积分}}\frac{4}{\pi^3}(2+\pi).\end{aligned}$$

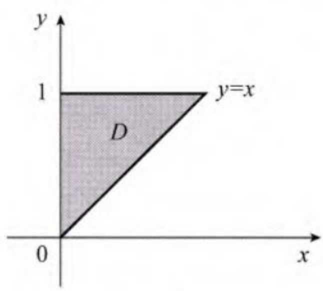


图 5-5

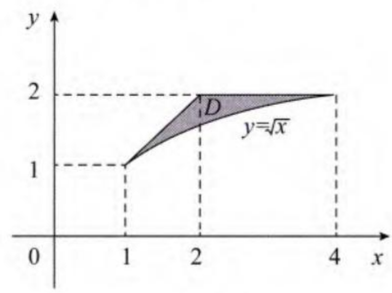


图 5-6

(3) $\dfrac{3}{2}$.

解 积分区域如图 5-7 所示,交换积分顺序.

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\csc 2y\mathrm{d}y\int_0^{\tan y}\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\csc 2y\cdot x^{\frac{1}{3}}\Big|_0^{\tan y}\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^{\frac{1}{3}}y}{\sin 2y}\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^{\frac{1}{3}}y}{2\tan y\cdot\cos^2 y}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{-\frac{2}{3}}y\mathrm{d}(\tan y)=\frac{3}{2}\tan^{\frac{1}{3}}y\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

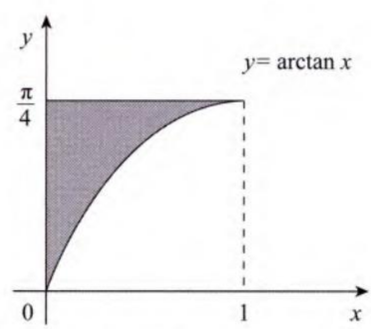


图 5-7

(4) e^{-1}.

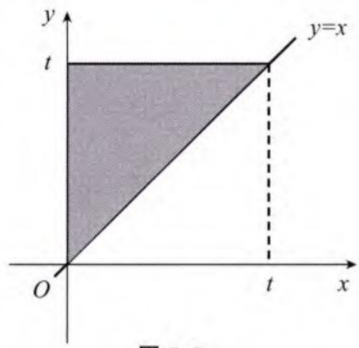


图 5-8

解 依题设$\int_0^t \mathrm{d}x\int_x^t \mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{d}y$，知积分区域如图 5-8 所示，交换积分顺序，得

$$f(t)=\int_0^t \mathrm{d}y\int_0^y \mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{d}x,$$

则

$$f'(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{-(x-t)^2}\mathrm{d}x \xlongequal{x-t=u} \int_{-t}^0 \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=-\int_0^{-t}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u,$$

$$f''(t)=-\mathrm{e}^{-(-t)^2}\cdot(-1)=\mathrm{e}^{-t^2},$$

故 $f''(1)=\mathrm{e}^{-1}$.

注 $f(t)=\int_0^t \mathrm{d}y\int_0^y \mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{d}x=\int_0^t\left[\int_0^y \mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$，记 $g(y)=\int_0^y \mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{d}x$，则 $f(t)=\int_0^t g(y)\mathrm{d}y$，故 $f'(t)=g(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{-(x-t)^2}\mathrm{d}x$.

(5) $\frac{a+b}{2}\pi$.

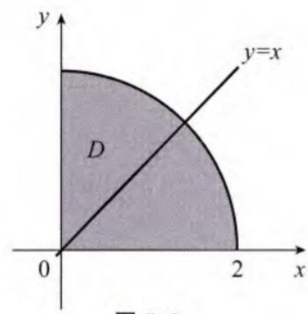


图 5-9

解 如图 5-9 所示，D 关于直线 $y=x$ 对称，故

$$I=\frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}+\frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{a+b}{2}\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{1}{4}\pi\cdot 2^2=\frac{a+b}{2}\pi.$$

(6) $\frac{A^2}{2}$.

解 令 $F(x)=\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y$，则 $F'(x)=-f(x)$，故

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}[F(x)]=-\frac{1}{2}F^2(x)\Big|_0^1=\frac{A^2}{2}.$$

注 也可利用交换积分顺序及积分与积分变量无关求解.

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y,$$

故

$$2\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y+\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\left\{f(x)\left[\int_0^x f(y)\mathrm{d}y+\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\right]\right\}$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]\left[\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y\right]=A^2,$$

故 $I=\frac{A^2}{2}$.

(7) $\frac{\pi}{4}\ln 2$.

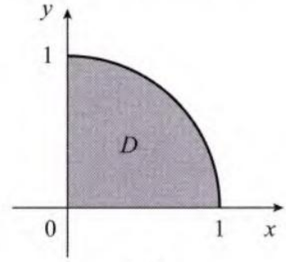


图 5-10

解 如图 5-10 所示，由于 D 关于直线 $y=x$ 对称，所以

$$I=\iint_D \frac{1+x-y}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D\left(\frac{1+x-y}{1+x^2+y^2}+\frac{1+y-x}{1+y^2+x^2}\right)dx\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D\frac{2}{1+x^2+y^2}dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}dr$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(1+r^2)}{1+r^2}=\frac{\pi}{4}\ln(1+r^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\ln 2.$$

(8) $\frac{\pi^2}{32}$.

解 D 如图 5-11 所示,用极坐标有$\frac{3\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant r\leqslant 2\sin\theta$,故

$$I=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\frac{r}{r\sqrt{4-r^2}}dr$$

$$=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\arcsin\frac{r}{2}\Big|_0^{2\sin\theta}d\theta$$

$$=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}(\pi-\theta)d\theta=\frac{\pi^2}{32}.$$

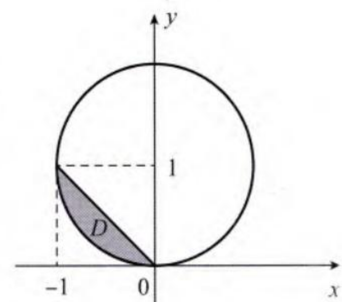


图 5-11

(9) $2\ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}$.

解 D 如图 5-12 所示,采用极坐标. $x^2+y^2=2x$ 的极坐标方程为$r=2\cos\theta$, $x=2$ 的极坐标方程为 $r=2\sec\theta$, $y=x$ 的极坐标方程为$\theta=\frac{\pi}{4}$,故

$$I=\iint_D\frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{2\cos\theta}^{2\sec\theta}\frac{1}{r}\cdot r\,dr$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec\theta-\cos\theta)d\theta$$

$$=2(\ln|\sec\theta+\tan\theta|-\sin\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=2\ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}.$$

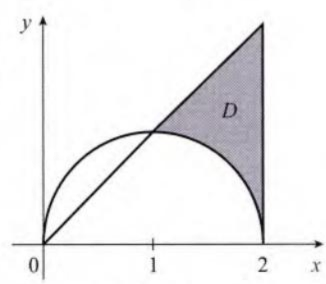


图 5-12

(10) $\frac{1}{2}(e-1)$.

解 积分区域 D 如图 5-13 所示,采用极坐标.

$$\iint_D e^{\frac{x}{x+y}}dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}e^{\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}}r\,dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}}\cdot\frac{1}{2}r^2\Big|_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}}\cdot\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}d\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}}d\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}e^{\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}(e-1).$$

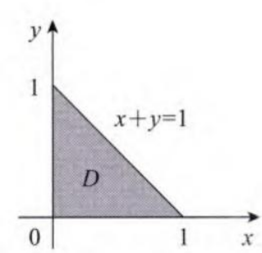


图 5-13

(11) $\frac{13\pi}{144}$.

解 D 关于直线 $y=x$ 对称,由轮换对称性,有

$$I=\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{9}\right)dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{13\pi}{144}.$$

(12) $4-\dfrac{\pi}{2}$.

解 如图 5-14 所示，设

$D_{大}=\left\{(x,y)\middle|-2\leqslant x\leqslant 0,\ 0\leqslant y\leqslant 2\right\}$,

$D_{小}=\left\{(x,y)\middle|-\sqrt{2y-y^2}\leqslant x\leqslant 0\right\}$,

则

$$I=\iint\limits_D ydxdy=\iint\limits_{D_{大}}ydxdy-\iint\limits_{D_{小}}ydxdy$$

$$=\int_{-2}^0dx\int_0^2ydy-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}r^2\sin\theta dr$$

$$=4-\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4\theta d\theta=4-\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t dt=4-\frac{\pi}{2}.$$

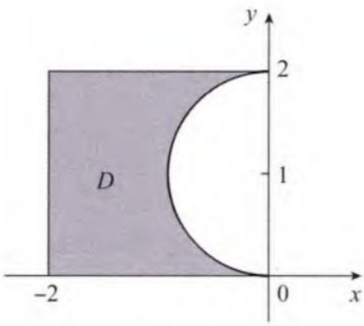


图 5-14

注 因 D 关于 $y=1$ 对称，故

$$I=\iint\limits_D ydxdy=\iint\limits_D[(y-1)+1]dxdy=\iint\limits_D(y-1)dxdy+\iint\limits_D dxdy=4-\frac{\pi}{2},$$

或利用形心纵坐标为 $\overline{y}=1$，有 $I=\iint\limits_D ydxdy=\overline{y}\cdot\left(4-\dfrac{\pi}{2}\right)=4-\dfrac{\pi}{2}$.

(13) 2π.

解 D 如图 5-15 所示，利用极坐标，

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}(2r\cos\theta+3r\sin\theta)rdr$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{16}{3}\cos^4\theta+8\cos^3\theta\cdot\sin\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta+0=\frac{32}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=2\pi.$$

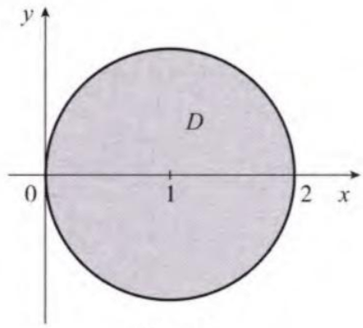


图 5-15

注 ① 考虑到被积函数关于 x,y 都是一次函数，可利用形心坐标 $(\overline{x},\overline{y})=(1,0)$. 由

$$\overline{x}=\frac{\iint\limits_D x\rho dxdy}{\iint\limits_D\rho dxdy}=\frac{\iint\limits_D xdxdy}{\iint\limits_D dxdy},$$

有 $\iint\limits_D xdxdy=\overline{x}\cdot\iint\limits_D dxdy$，其中 $\iint\limits_D dxdy$ 表示 D 的面积.

同理，$\iint\limits_D ydxdy=\overline{y}\cdot\iint\limits_D dxdy$，所以 $I=\iint\limits_D(2x+3y)dxdy=(2\overline{x}+3\overline{y})\pi\cdot 1^2=2\pi$.

② 考虑到 D 关于直线 $x=1$ 对称，则

$$I=\iint\limits_D(2x+3y)dxdy=\iint\limits_D[2(x-1)+2+3y]dxdy,$$

将 $x-1$ 视为整体，它为奇函数，故 $\iint\limits_D 2(x-1)dxdy=0$，所以 $I=2\iint\limits_D dxdy+3\iint\limits_D ydxdy$.

又 D 关于 x 轴对称,故 $3\iint\limits_D y\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$,于是 $I=2\iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\times\pi\times1^2=2\pi$.

(14)1.

解 由于 $\mathrm{e}^{(x+y)^2}\cos(x+y)^2$ 在 D 上连续,故由二重积分的中值定理,可知

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{(x+y)^2}\cos(x+y)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{(\xi+\eta)^2}(\cos(\xi+\eta)^2)\cdot t^2,$$

其中$(\xi,\eta)\in D$.当 $t\to0^+$ 时,有$(\xi,\eta)\to(0,0)$,故

$$\text{原式}=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^2}\cdot\mathrm{e}^{(\xi+\eta)^2}(\cos(\xi+\eta)^2)\cdot t^2=1.$$

三、解答题

(1) 解 (Ⅰ)D 如图 5-16 所示,先对 y 积分较简便.

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_D xy(x-y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-x}^{x}xy(x-y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\left(\frac{x^2y^2}{2}-\frac{xy^3}{3}\right)\Bigg|_{-x}^{x}\mathrm{d}x\\&=-\frac{2}{3}\int_0^1x^4\mathrm{d}x=-\frac{2}{15}.\end{aligned}$$

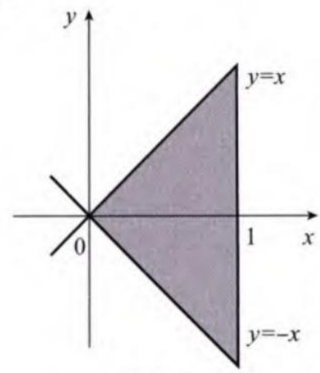


图 5-16

(Ⅱ)D 如图 5-17 所示,若先对 y 积分,则$\int\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y$ 不能表示为初等函数,故只能先对 x 积分.

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_D\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\frac{\sin y}{y}(y-y^2)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1(1-y)\sin y\mathrm{d}y=[-(1-y)\cos y-\sin y]\Big|_0^1\\&=1-\sin1.\end{aligned}$$

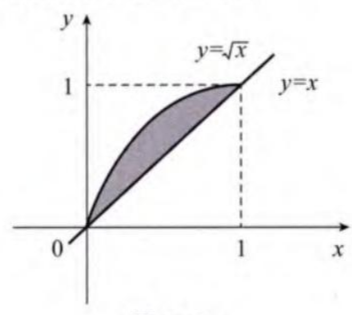


图 5-17

(Ⅲ)D 如图 5-18 所示,先对 x 积分,则

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_D\frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\frac{y}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y}}x\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{y^2}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1+y^3)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

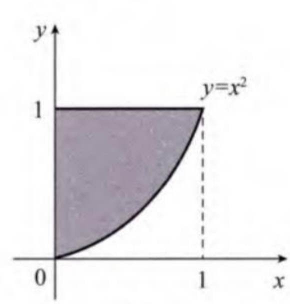


图 5-18

(Ⅳ)D 如图 5-19 所示,作辅助线 $y=-\arcsin x\,(-1\leqslant x\leqslant0)$,将 D 划分为 D_1 与 D_2,则

$$I=\iint\limits_D x(\mathrm{e}^{x^2+\cos y}\sin y-1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D x\mathrm{e}^{x^2+\cos y}\sin y\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\xlongequal{\text{记}}I_1-I_2,$$

$$I_1=\iint_D x\mathrm{e}^{x^2+\cos y}\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1} x\mathrm{e}^{x^2+\cos y}\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2} x\mathrm{e}^{x^2+\cos y}\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由 D_1 关于 y 轴对称，$x\mathrm{e}^{x^2+\cos y}\sin y$ 关于 x 是奇函数，故

$$\iint_{D_1} x\mathrm{e}^{x^2+\cos y}\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

同理，$\iint_{D_2} x\mathrm{e}^{x^2+\cos y}\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，故 $I_1=0$.

$$I_2=\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

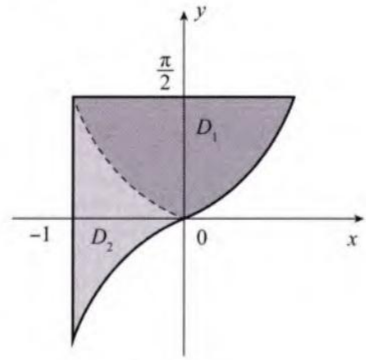


图 5-19

根据对称性，$\iint_{D_1} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 又

$$\iint_{D_2} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}y\int_{-1}^{-\sin y}x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4},$$

故 $I=0-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$.

(2) 解 由 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\x^2+y^2=2x\end{cases}$ 解得交点 $A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，积分区域 D 如图 5-20 所示，故

$$\begin{aligned}I&=\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}xy\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}yx^2\Big|_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}y\left[1-y^2-(1-\sqrt{1-y^2})^2\right]\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(y\sqrt{1-y^2}-\frac{1}{2}y\right)\mathrm{d}y\\&=\left[-\frac{1}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}y^2\right]\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{5}{48}.\end{aligned}$$

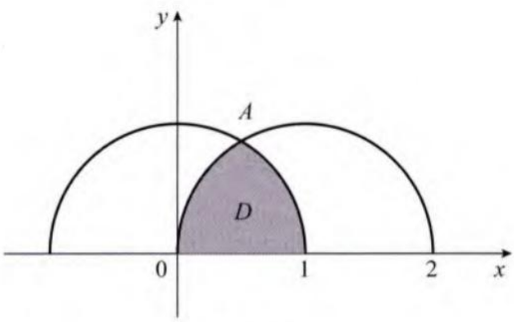


图 5-20

(3) 解 由已知，D 如图 5-21 所示，D 关于直线 $y=x$ 对称，则

$$\begin{aligned}I&=\iint_D\frac{x\mathrm{e}^{(x+y)^2}}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{x\mathrm{e}^{(x+y)^2}}{x+y}+\frac{y\mathrm{e}^{(y+x)^2}}{y+x}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\iint_D\mathrm{e}^{(x+y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}\mathrm{e}^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}\cdot r\mathrm{d}r\\&=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}\mathrm{e}^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}\Big|_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}\right]\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^4-\mathrm{e})\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}\\&=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^4-\mathrm{e})\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\tan\theta)}{(1+\tan\theta)^2}=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^4-\mathrm{e})\cdot\frac{-1}{1+\tan\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\mathrm{e}^4-\mathrm{e}}{4}.\end{aligned}$$

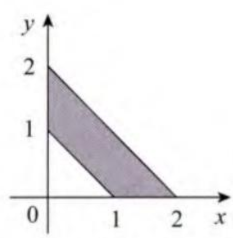


图 5-21

(4) 解 用$x^2+y^2=1$,即$r=1$将D划分为D_1与D_2,如图5-22所示,则

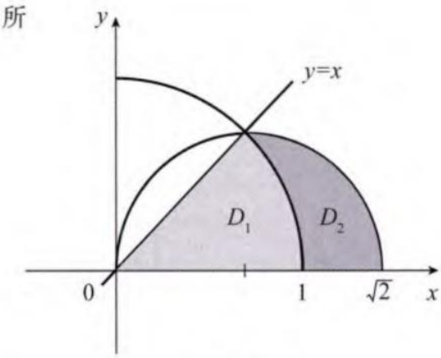


图 5-22

$$I=\iint_{D_1}(1-r)r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta+\iint_{D_2}(r-1)r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$
$$=\iint_{D_1}(1-r)r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta-\iint_{D_2}(1-r)r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$
$$=2\iint_{D_1}(1-r)r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta-\iint_{D}(1-r)r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r)r\,\mathrm{d}r-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}\cos\theta}(1-r)r\,\mathrm{d}r$$
$$=\frac{\pi}{12}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2\theta-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cos^3\theta\right)\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{\pi}{12}+\frac{5}{9}-\frac{1}{4}-\frac{\pi}{8}=\frac{11}{36}-\frac{\pi}{24}.$$

(5) 解 用 $x^2+y^2=4$ 将 D 划分为 D_1 与 D_2,如图 5-23 所示,则

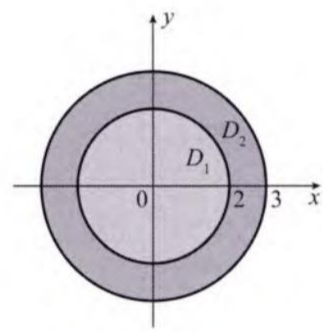


图 5-23

$$I=\iint_D|x^2+y^2-4|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=-\iint_{D_1}(x^2+y^2-4)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{D_2}(x^2+y^2-4)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=-\iint_{D_1}(x^2+y^2-4)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{D-D_1}(x^2+y^2-4)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\iint_D(x^2+y^2-4)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-2\iint_{D_1}(x^2+y^2-4)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^3(r^2-4)r\,\mathrm{d}r-2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(r^2-4)r\,\mathrm{d}r$$
$$=2\pi\left(\frac{r^4}{4}-2r^2\right)\Big|_0^3-4\pi\left(\frac{r^4}{4}-2r^2\right)\Big|_0^2$$
$$=\frac{9}{2}\pi+16\pi=\frac{41}{2}\pi.$$

(6) 解 积分区域 D 如图 5-24 中半圆区域,$x+y-2=0$ 将 D 分成D_1 与 D_2 两部分.

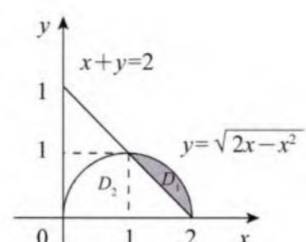


图 5-24

$$I=\iint_D|x+y-2|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{D_1}(x+y-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_2}(x+y-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=2\iint_{D_1}(x+y-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_1+D_2}(x+y-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\xlongequal{\text{记}}I_1-I_2.$$

$$I_1=2\iint_{D_1}(x+y-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad(\text{先对 }x\text{ 积分后对 }y\text{ 积分})$$
$$=2\int_0^1\mathrm{d}y\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}(x+y)\mathrm{d}x-4\iint_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=2\int_0^1\left[\frac{(1+\sqrt{1-y^2})^2-(2-y)^2}{2}+y(1+\sqrt{1-y^2}-2+y)\right]\mathrm{d}y-4\left(\frac{1}{4}\pi\times1^2-\frac{1}{2}\right)$$

$$=2\int_0^1(y\sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-y^2}+y-1)\mathrm{d}y-(\pi-2)$$

$$=2\left(\frac{1}{3}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)-(\pi-2)=\frac{5}{3}-\frac{\pi}{2},$$

$$I_2=\iint_D(x+y-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2(\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}r-2\times\frac{\pi}{2}\times1^2$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(\cos\theta+\sin\theta)r^3\Big|_0^{2\cos\theta}\right]\mathrm{d}\theta-\pi$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta+\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta-\pi$$

$$=\frac{8}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{8}{3}\times\frac{1}{4}\cos^4\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\pi$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}-\pi=\frac{2}{3}-\frac{\pi}{2},$$

故 $I=I_1-I_2=\frac{5}{3}-\frac{\pi}{2}-\left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=1.$

(7) 解 D 如图 5-25 所示，由 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\x^2+y^2=2x,\end{cases}$ 解得交点 $A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$I=\iint_D\frac{y}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_1^{2\cos\theta}\frac{\sin\theta}{1+r^2}\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta\left[\ln(1+r^2)\Big|_1^{2\cos\theta}\right]\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}[\ln(1+4\cos^2\theta)-\ln 2]\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\xlongequal{u=\cos\theta}\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1[\ln(1+4u^2)-\ln 2]\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}[u\ln(1+4u^2)-2u+\arctan 2u]\Big|_{\frac{1}{2}}^1-\frac{1}{4}\ln 2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{5}{2}-1+\arctan 2-\frac{\pi}{4}\right).$$

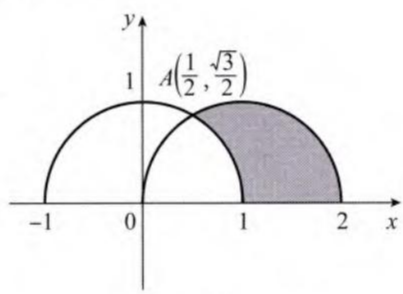


图 5-25

(8) 解 如图 5-26 所示，直线 $x+y=i(i=1,2,3,4)$ 将 D 分为 4 个区域 $D_k(k=1,2,3,4)$，则

$$[1+x+y]=k\ (k=1,2,3,4),$$

故
$$I=\iint_D[1+x+y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_1}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_3}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_4}4\mathrm{d}x\mathrm{d}y=10.$$

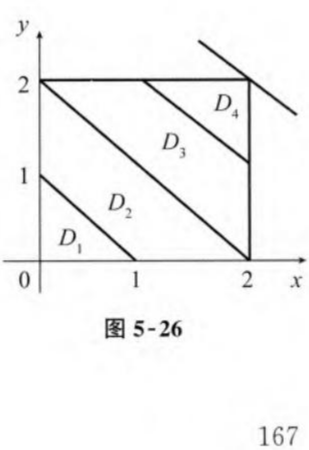


图 5-26

注 $\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示 D 的面积.

(9) **解** 当 $2x-x^2=(1-y)^2$ 时,有 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

圆周 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 将 D 分为 D_1 与 D_2 两个区域,如图 5-27 所示. 于是

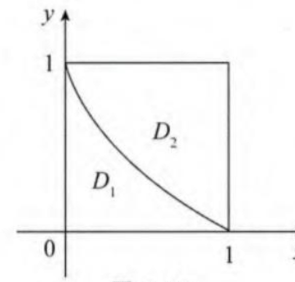


图 5-27

$$\max\{2x-x^2,(1-y)^2\}=\begin{cases}(1-y)^2, & (x,y)\in D_1,\\ 2x-x^2, & (x,y)\in D_2.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{D_1}(1-y)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(2x-x^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-\sqrt{2y-y^2}}(1-y)^2\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{2x-x^2}}^1(2x-x^2)\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1(1-y)^2(1-\sqrt{2y-y^2})\mathrm{d}y+\int_0^1(2x-x^2)[1-(1-\sqrt{2x-x^2})]\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1(1-y)^2\mathrm{d}y-\int_0^1(1-y)^2\sqrt{1-(y-1)^2}\,\mathrm{d}y+\int_0^1(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x\\
&=-\frac{1}{3}(1-y)^3\Big|_0^1-\int_0^1(y-1)^2\sqrt{1-(y-1)^2}\,\mathrm{d}(y-1)+\int_0^1[1-(x-1)^2]\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}(x-1)\\
&=\frac{1}{3}+\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}(x-1)-2\int_0^1(x-1)^2\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}(x-1),\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}(x-1)&\xlongequal{x-1=t}\int_{-1}^0\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t\xlongequal{t=-u}\int_1^0\sqrt{1-u^2}(-\mathrm{d}u)\\
&=\int_0^1\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{4}\pi\cdot1^2=\frac{\pi}{4}\ \left(\int_0^1\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u\text{ 表示 1/4 圆的面积}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1(x-1)^2\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}(x-1)&\xlongequal{x-1=\sin t}\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\sin^2t\cos t\cos t\,\mathrm{d}t\\
&\xlongequal{t=-u}\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^2u\cos^2u(-\mathrm{d}u)\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2u(1-\sin^2u)\mathrm{d}u\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2u\,\mathrm{d}u-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4u\,\mathrm{d}u\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\\
&=\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{16},\end{aligned}$$

故 $I=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{4}-2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{16}\right)=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}$.

(10) **解** 由符号函数的定义,知

$$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=\begin{cases}1, & x^2-y^2+2>0,\\ 0, & x^2-y^2+2=0,\\ -1, & x^2-y^2+2<0,\end{cases}$$

故 $x^2-y^2+2=0$，即双曲线$\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{x^2}{2}=1$将 D 划分为三个区域D_1，D_2，D_3，如图 5-28 所示，

$$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D_2,\\ -1, & (x,y)\in D_1\cup D_3,\end{cases}$$

故 $I=\iint\limits_D \operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_{D_2}1\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1}1\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_3}1\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-2\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

而$\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1\cup D_3}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-2\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，故

$$I=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-4\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi\cdot 2^2-4\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2+x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}y$$

$$=4\pi-4\left[\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{2+x^2}-\ln(x+\sqrt{2+x^2})\right]\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$=4\pi-4\left[\frac{2\pi}{3}-\ln(2+\sqrt{3})\right]=\frac{4\pi}{3}+4\ln(2+\sqrt{3}).$$

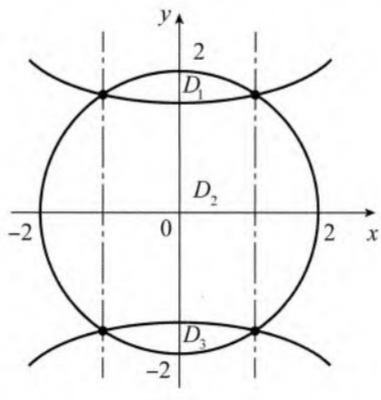


图 5-28

(11) 解 将 D 分成 $D=D_1+D_2+D_3$，如图 5-29 所示，则

$$I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_1}0\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}+\iint\limits_{D_3}0\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\sec\theta}^{3\sec\theta}\frac{r}{r^4}\mathrm{d}r=\frac{4}{9}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{2}{9}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi+6-3\sqrt{3}}{54}.$$

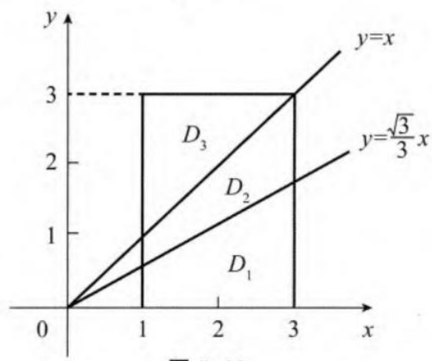


图 5-29

(12) 解（Ⅰ）双纽线$(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$如图 5-30 所示，由于 D 关于 x 轴对称，xy 关于 y 是奇函数，故 $I=\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$.

（Ⅱ）双纽线$(x^2+y^2)^2=2xy$ 如图 5-31 所示，由于 D 关于原点对称，而$xy=(-x)(-y)$，故

$$I=\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ (D_1\text{ 是 }D\text{ 在第一象限的部分})$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\sin 2\theta}}r^3\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}r=\frac{1}{6}.$$

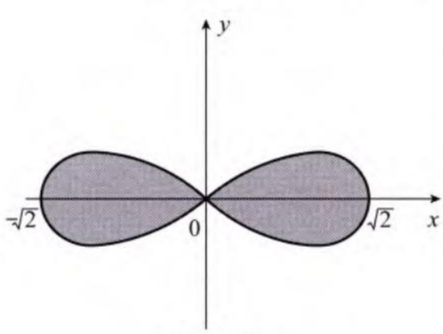


图 5-30

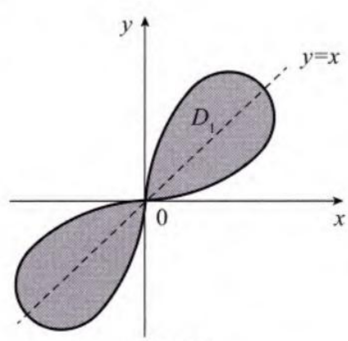


图 5-31

注 设 D 关于原点对称,则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(x,y)\text{ 关于 } x,y \text{ 是偶函数},\\ 0, & f(x,y)\text{ 关于 } x,y \text{ 是奇函数},\end{cases}$$

其中 $D_1=D\cap\{(x,y)\mid x\geqslant 0\}$.

综合题

一、选择题

(1) B.

解 在 $D:0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1$ 上有

$$\frac{\pi}{2}>1\geqslant\sqrt{x^2+y^2}\geqslant x^2+y^2\geqslant(x^2+y^2)^2\geqslant 0,$$

且 $\cos x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上为单调减少函数,故

$$0\leqslant\cos\sqrt{x^2+y^2}\leqslant\cos(x^2+y^2)\leqslant\cos(x^2+y^2)^2,$$

所以 $I_1<I_2<I_3$,选项 B 正确.

(2) C.

解 D 如图 5-32 所示,D 的第一象限部分记为D_1. 根据被积函数的奇偶性,以及D_1 关于直线 $y=x$ 对称,有

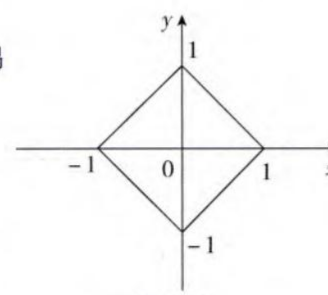


图 5-32

$$I_1=\iint\limits_D(x^2+y^2\tan x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I_2=\iint\limits_D(x^2y+\tan y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\tan y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_1}\tan y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\iint\limits_{D_1}\tan x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I_3=\iint\limits_D(xy^2+\sin y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\sin y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_1}\sin y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_1}\sin x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

当 $x\in(0,1)$ 时,由 $\sin x<x<\tan x$,知 $\sin x^2<x^2<\tan x^2$,故 $I_3<I_1<I_2$. 选项 C 正确.

(3) A.

解 利用二重积分的定义,有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}f\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$,故

$$\text{原极限}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left[1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right]}$$

$$=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\cdot\arctan y\Big|_0^1\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\frac{\pi}{4}\ln(1+x)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\ln 2.$$

故选项 A 正确.

(4) D.

解 此题是极坐标下的二次积分化为直角坐标下的二次积分,关键是正确画图,如图 5-33 所示.

由 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$,知 $0\leqslant x\leqslant 1$.

$$r=\cos\theta\Rightarrow r^2=r\cos\theta\Rightarrow x^2+y^2=x,$$

即 $y=\sqrt{x-x^2}$，故 $I=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy$. 选项 D 正确.

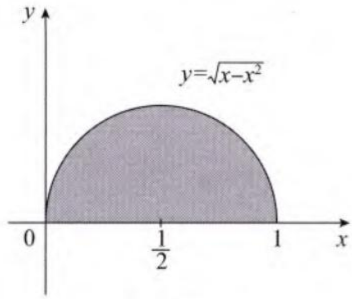


图 5-33

注 一般二次积分的极坐标与直角坐标的相互转化，利用

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{cases} \text{或} x^2+y^2=r^2,\tan\theta=\frac{y}{x}.$$

(5) C.

解 由已知，三角形区域 D 如图 5-34 所示.

记 $A=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，则 $f(x,y)=xy+A$. 等式两边同时在 D 上积分，得

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D xydxdy+\iint\limits_D Adxdy,$$

故 $A=\iint\limits_D xydxdy+2A$.

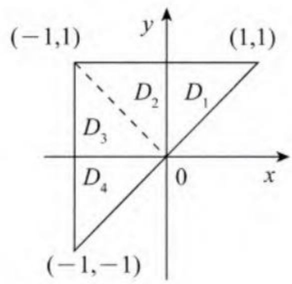


图 5-34

作辅助线 $y=-x$，将 D 分成 D_1 与 D_2，D_3 与 D_4，则

$$\iint\limits_D xydxdy=\iint\limits_{D_1\cup D_2} xydxdy+\iint\limits_{D_3\cup D_4} xydxdy.$$

$D_1\cup D_2$ 关于 y 轴对称，xy 关于 x 是奇函数，$D_3\cup D_4$ 关于 x 轴对称，xy 关于 y 是奇函数，故 $\iint\limits_D xydxdy=0$，从而 $A=0+2A$，

即 $A=0$. 故 $f(x,y)=xy=yx$. 选项 C 正确.

选项 A,B,D 中等号左端均为零，但右端不为零，排除选项 A,B,D.

二、填空题

(1) 4π.

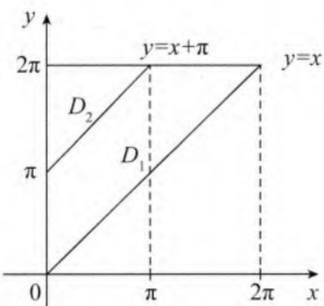


图 5-35

解 积分区域 D 如图 5-35 所示，为去掉绝对值符号，用 $y=x+\pi$，将 D 划分为 D_1 与 D_2，

$$D_1:-\pi\leqslant x-y\leqslant 0, D_2:-2\pi\leqslant x-y\leqslant -\pi,$$

故

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_D |\sin(x-y)|dxdy\\&=\iint\limits_{D_1}[-\sin(x-y)]dxdy+\iint\limits_{D_2}\sin(x-y)dxdy\\&=\int_0^\pi dy\int_0^y[-\sin(x-y)]dx+\int_\pi^{2\pi}dy\int_{y-\pi}^y[-\sin(x-y)]dx+\int_\pi^{2\pi}dy\int_0^{y-\pi}\sin(x-y)dx=4\pi.\end{aligned}$$

(2) $\frac{1}{4}$.

解 由已知，有

$$f(y)=\begin{cases}y, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$f(x+y)=\begin{cases}x+y, & 0\leqslant x+y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

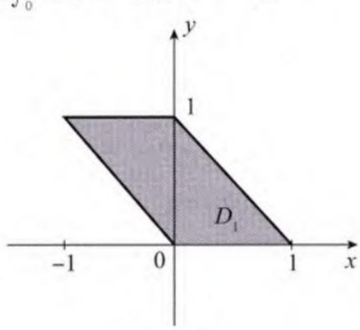


图 5-36

故 $D_1=\{(x,y)\mid -y\leqslant x\leqslant 1-y,0\leqslant y\leqslant 1\}$，如图 5-36 所示.

在 D_1 上 $f(y)=y$，$f(x+y)=x+y$，在 D_1 以外部分 $f(y)=0$ 或 $f(x+y)=0$，故

$$I=\iint_D f(y)f(x+y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_1} y(x+y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-y}^{1-y}y(x+y)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 y\cdot\frac{1}{2}(x+y)^2\Big|_{-y}^{1-y}\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{1}{2}y\,\mathrm{d}y=\frac{1}{4}.$$

(3) $\frac{1}{4}(1-\cos 1)$.

解 交换积分顺序,得

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^1 y\sin(1-x)^2\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{y^2}{2}\sin(1-x)^2\Big|_{\sqrt{x}}^1\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)\sin(1-x)^2\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\int_0^1\sin(1-x)^2\mathrm{d}[(1-x)^2]$$

$$=\frac{1}{4}\cos(1-x)^2\Big|_0^1=\frac{1}{4}(1-\cos 1).$$

(4) $\frac{4}{3}\mathrm{e}^{\pi^2}(\pi^2-1)+\frac{4}{3}$.

解 积分区域 D 如图 5-37 所示,交换极坐标顺序,则

$$I=\int_0^{\pi}\mathrm{d}r\int_0^{2r}\theta^2\mathrm{e}^{r^2}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{r^2}\cdot\frac{1}{3}\theta^3\Big|_0^{2r}\mathrm{d}r=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{r^2}\cdot\frac{8}{3}r^3\mathrm{d}r$$

$$\xlongequal{r^2=t}\frac{8}{3}\int_0^{\pi^2}\frac{1}{2}t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\frac{4}{3}\int_0^{\pi^2}t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\frac{4}{3}\mathrm{e}^t(t-1)\Big|_0^{\pi^2}$$

$$=\frac{4}{3}\mathrm{e}^{\pi^2}(\pi^2-1)+\frac{4}{3}.$$

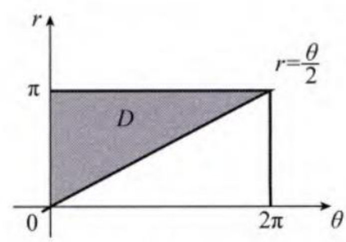


图 5-37

(5) $\int_0^a\mathrm{d}r\int_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}\theta$.

解 极坐标下交换积分顺序可视 θ 为 x 轴,r 为 y 轴,用直角坐标处理(包括画图和确定积分限).

依题意,已知积分区域如图 5-38 所示.

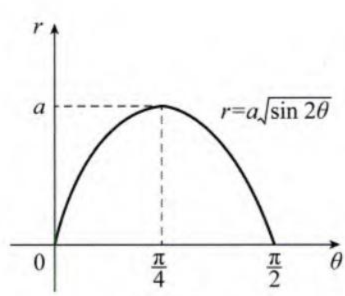


图 5-38

当 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$ 时,$r=a\sqrt{\sin 2\theta}$ 的反函数为

$$\theta=\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2};$$

当 $\frac{\pi}{4}<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时,$r=a\sqrt{\sin 2\theta}$ 的反函数为

$$\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}.$$

故 $I=\int_0^a\mathrm{d}r\int_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}\theta$.

(6) $\frac{\pi ab^3}{4}$.

解 由于 D 为椭圆形区域,故用广义极坐标进行计算.

令 $x=ar\cos\theta$,$y=br\sin\theta$,则 $D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$,变为 $D':0\leqslant r\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$,其变换雅可比行列式为

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\cos\theta & -ar\sin\theta\\ b\sin\theta & br\cos\theta\end{vmatrix}=abr,$$

故$\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}(br\sin\theta)^2\,|\,J\,|\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 b^2r^2\sin^2\theta\cdot abr\mathrm{d}r=\dfrac{\pi ab^3}{4}.$

注 广义极坐标属于了解内容.

(7) $2a^2$.

解 由 $r^2=2a^2\cos 2\theta$，知 $\cos 2\theta\geqslant 0$，故 $-\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{5\pi}{4}$. 由对称性，可知所求面积为

$$A=\iint\limits_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}}r\mathrm{d}r=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta=2a^2.$$

(8) $\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2}{3}\right)R^3$.

解 xOy 坐标面上方部分立体如图 5-39 所示，则

$$\begin{aligned}V&=4\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}\cdot r\mathrm{d}r\\&=\frac{4}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)R^3.\end{aligned}$$

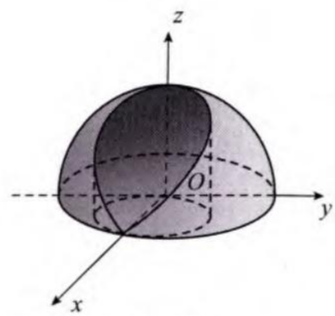


图 5-39

(9) $\left(-\dfrac{1}{2}a,\dfrac{8}{5}a\right)$.

解 由于

$$\overline{x}=\frac{\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint\limits_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}=\frac{\int_{-2a}^{a}x\,\mathrm{d}x\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}\mathrm{d}y}{\int_{-2a}^{a}\mathrm{d}x\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}\mathrm{d}y}=-\frac{1}{2}a,$$

$$\overline{y}=\frac{\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint\limits_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}=\frac{\int_{-2a}^{a}\mathrm{d}x\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}y\,\mathrm{d}y}{\int_{-2a}^{a}\mathrm{d}x\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}\mathrm{d}y}=\frac{8}{5}a,$$

故所求形心坐标为$\left(-\dfrac{1}{2}a,\dfrac{8}{5}a\right)$.

(10) $\left(\dfrac{15\pi-32}{30\pi-48},0\right)$.

解 如图 5-40 所示，由对称性，知 $\overline{y}=0$. 又由于

$$\begin{aligned}\overline{x}&=\frac{\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint\limits_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}=\frac{2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cos\theta\cdot r\mathrm{d}r+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{1+\cos\theta}r\cos\theta\cdot r\mathrm{d}r}{\frac{1}{2}\pi\times 1^2+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{1+\cos\theta}r\mathrm{d}r}\\&=\frac{2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\mathrm{d}r+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{1+\cos\theta}r^2\mathrm{d}r}{\frac{1}{2}\pi+2\cdot\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(r^2\Big|_0^{1+\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta}\end{aligned}$$

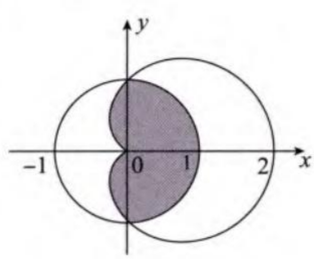


图 5-40

$$=\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{15\pi}{16}-2\right)}{\frac{5}{4}\pi-2}=\frac{15\pi-32}{30\pi-48},$$

故形心坐标为$\left(\frac{15\pi-32}{30\pi-48},0\right)$.

三、解答题

(1) **解** 由 $y=x^2$ 将 D 划分为 D_1 与 D_2,如图 5-41 所示,则

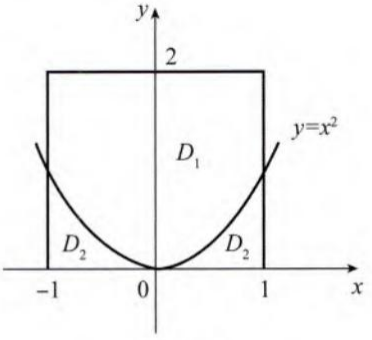


图 5-41

$$\begin{aligned}I&=\iint_D|y-x^2|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1}(y-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^2(y-x^2)\mathrm{d}y+\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}(x^2-y)\mathrm{d}y\\&=\int_{-1}^1\frac{1}{2}(y-x^2)^2\Big|_{x^2}^2\mathrm{d}x-\int_{-1}^1\frac{1}{2}(y-x^2)^2\Big|_0^{x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_{-1}^1(4-4x^2+x^4)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{-1}^1x^4\mathrm{d}x\\&=2\int_0^1(2-2x^2+x^4)\mathrm{d}x=2\times\left(2-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)=\frac{46}{15}.\end{aligned}$$

(2) **解** 以 $-x$ 代替 x,方程 $|x|y+|x|+y=1$ 不变,可知曲线关于 y 轴对称.

当 $x\geqslant0$ 时,由 $xy+x+y=1$,得 $y=\frac{1-x}{1+x}$,即 $y+1=\frac{2}{1+x}$,它是以 $x=-1,y=-1$ 为渐近线的双曲线. 有界区域 D 如图 5-42 阴影所示.

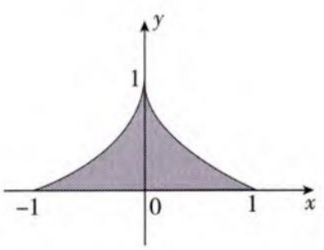


图 5-42

$$\begin{aligned}I&=\iint_D[2\ln(1+y)-y+x]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D[2\ln(1+y)-y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_Dx\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\xlongequal{\text{记}}I_1+I_2.\end{aligned}$$

对于I_2,x 是奇函数,于是$I_2=0$.

对于I_1,$2\ln(1+y)-y=[2\ln(1+y)-y]x^0$,它是关于 x 的偶函数,故

$$I_1=2\iint_{D_1}[2\ln(1+y)-y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (D_1\text{ 是 }D\text{ 在第一象限的部分}).$$

考虑到被积函数的特性,先对 x 积分,后对 y 积分,由 $xy+x+y=1$,知 $x=\frac{1-y}{1+y}$,则

$$\begin{aligned}I_1&=2\int_0^1[2\ln(1+y)-y]\mathrm{d}y\int_0^{\frac{1-y}{1+y}}\mathrm{d}x\\&=2\int_0^1[2\ln(1+y)-y]\cdot\frac{1-y}{1+y}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

注意到,$[2\ln(1+y)-y]'=\frac{2}{1+y}-1=\frac{1-y}{1+y}$,故

$$\begin{aligned}I_1&=2\int_0^1[2\ln(1+y)-y]\,\mathrm{d}[2\ln(1+y)-y]\\&=2\times\frac{1}{2}[2\ln(1+y)-y]^2\Big|_0^1=(2\ln2-1)^2.\end{aligned}$$

综上所述，$I=I_1+I_2=(2\ln 2-1)^2$.

(3) 解 积分区域 D 如图 5-43 所示.

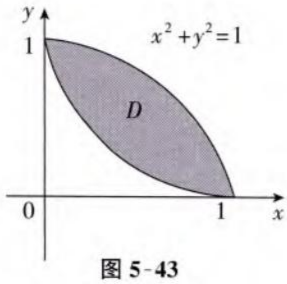


图 5-43

由 D 关于直线 $y=x$ 对称，知

$$I=\iint\limits_D(2x-y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D(2y-x^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_D 2y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{记}}I_1-I_2.$$

其中

$$I_1=\iint\limits_D 2y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}2y\,\mathrm{d}y=\int_0^1\left[(1-x^2)-\left(1-\sqrt{2x-x^2}\right)^2\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1(2\sqrt{2x-x^2}-2x)\mathrm{d}x=-1+2\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

而
$$2\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=2\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}(x-1)\xlongequal{x-1=t}2\int_{-1}^0\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 1^2=\frac{\pi}{2},$$

故 $I_1=-1+\dfrac{\pi}{2}$.

$$I_2=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}x^2\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 x^2\left[\sqrt{1-x^2}-\left(1-\sqrt{2x-x^2}\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x-\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_0^1 x^2\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

而
$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t(1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{16},$$

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 x^2\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{x-1=\sin t}\int_{-\frac{\pi}{2}}^0(1+\sin t)^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{t=-u}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin u)^2\cos^2 u\,\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\sin u+\sin^2 u)\cos^2 u\,\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\,\mathrm{d}u-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin u\cos^2 u\,\mathrm{d}u+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 u\cos^2 u\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\,\mathrm{d}(\cos u)+\frac{\pi}{16}$$

$$=\frac{\pi}{4}+2\cdot\frac{1}{3}\cos^3 u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{16}=-\frac{2}{3}+\frac{5\pi}{16}.$$

故 $I=-1+\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{16}-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+\frac{5\pi}{16}\right)=\frac{\pi}{8}.$

(4) 解 已知曲线$(x+y)^3=xy$ 过原点$(0,0)$,其在极坐标下化为

$$r(\theta)=\frac{\sin\theta\cos\theta}{(\sin\theta+\cos\theta)^3}=\frac{1}{2}\frac{\sin 2\theta}{(\sin\theta+\cos\theta)^3}.$$

当 $r(\theta)=0$ 时,$\sin 2\theta=0$,得 $\theta=0,\theta=\frac{\pi}{2}.$

又$(x+y)^3=xy$ 中 x 与 y 轮换后,方程不变,知该曲线关于直线$y=x$ 对称,如图 5-44 所示,则

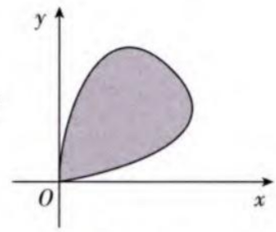


图 5-44

$$\iint_D (x-y)^3\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_D[(x-y)^3+(y-x)^3]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0.$$

故
$$I=\iint_D[(x-y)^3+1]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)}r\,\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}r^2\Big|_0^{r(\theta)}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin\theta+\cos\theta)^6}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^6\theta(1+\tan\theta)^6}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^2\theta}{(1+\tan\theta)^6}\mathrm{d}(\tan\theta)$$

$$\xlongequal{1+\tan\theta=t}\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{(t-1)^2}{t^6}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3t^3}+\frac{1}{2t^4}-\frac{1}{5t^5}\right)\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{60}.$$

(5) 解 积分区域 D 如图 5-45 所示,显然 D 关于直线 $x=y$ 对称,则

$$I=\iint_D \mathrm{e}^{(x+y)^2}(\sin^2 x+\cos^2 y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D[\mathrm{e}^{(x+y)^2}(\sin^2 x+\cos^2 y)+\mathrm{e}^{(y+x)^2}(\sin^2 y+\cos^2 x)]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D \mathrm{e}^{(x+y)^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}\mathrm{e}^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}\cdot r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}\cdot\mathrm{e}^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}\Big|_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^4-\mathrm{e})\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^4-\mathrm{e})\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\tan\theta)}{(1+\tan\theta)^2}$$

$$=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^4-\mathrm{e})\left(-\frac{1}{1+\tan\theta}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\mathrm{e}(\mathrm{e}^3-1).$$

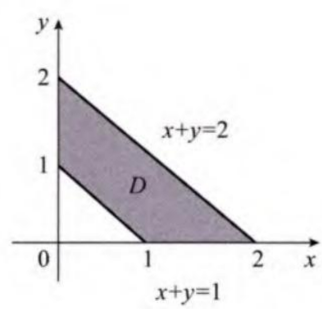


图 5-45

(6) 解 $\frac{0}{0}$ 型,利用洛必达法则,需交换积分顺序,二次积分表示的积分区域 D 如图 5-46 所示.

$$\int_0^t\mathrm{d}x\int_x^t\sin(xy)^2\mathrm{d}y=\int_0^t\mathrm{d}y\int_0^y\sin(xy)^2\mathrm{d}x,$$

$$\text{故原式}=\lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^t dy\int_0^y \sin(xy)^2dx}{t^6}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^t \sin(tx)^2dx}{6t^5}\xlongequal[x=\frac{1}{t}u]{tx=u}\lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^{t^2}\sin u^2\cdot\frac{1}{t}du}{6t^5}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^{t^2}\sin u^2du}{6t^6}=\lim_{t\to0^+}\frac{2t\sin t^4}{36t^5}=\frac{1}{18}.$$

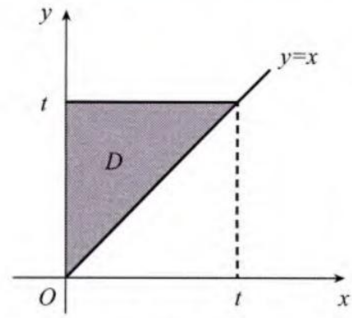


图 5-46

(7) 解 方法一:转化为直角坐标,积分区域 D 如图 5-47 所示.

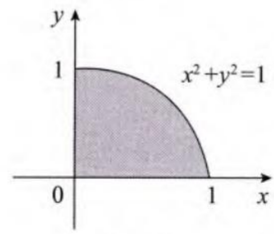


图 5-47

$$I=\iint_D 2\cdot r\cos\theta\cdot r\sin\theta e^{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}rd\theta dr$$

$$=2\iint_D xye^{x^2-y^2}dxdy$$

$$=2\int_0^1 xdx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}ye^{x^2-y^2}dy$$

$$=2\cdot\frac{-1}{2}\int_0^1 xdx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}e^{x^2-y^2}d(x^2-y^2)$$

$$=-\int_0^1 xe^{x^2-y^2}\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int_0^1 x\left(e^{2x^2-1}-e^{x^2}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^1 e^{2x^2-1}d(2x^2-1)+\frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2}d(x^2)$$

$$=-\frac{1}{4}e^{2x^2-1}\Big|_0^1+\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{4}(e+e^{-1})-\frac{1}{2}.$$

方法二:在极坐标下,选择先对 θ 积分后对 r 积分.

$$I=\int_0^1 dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^3e^{r^2\cos2\theta}\sin2\theta d\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 rdr\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\left(e^{r^2\cos2\theta}\right)=-\frac{1}{2}\int_0^1 r\left(e^{r^2\cos2\theta}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}dr$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 r\left(e^{-r^2}-e^{r^2}\right)dr=-\frac{1}{4}\int_0^1\left(e^{-r^2}-e^{r^2}\right)dr^2$$

$$\xlongequal{r^2=t}-\frac{1}{4}\int_0^1(e^{-t}-e^t)dt=-\frac{1}{4}\left(-e^{-t}\Big|_0^1-e^t\Big|_0^1\right)$$

$$=\frac{1}{4}(e^{-1}+e)-\frac{1}{2}.$$

(8) 解 积分区域 D 如图 5-48 所示,采用极坐标.先对 θ 积分后对 r 积分,则

$$D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0\leqslant r\leqslant1,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}.$$

$$I=\int_0^1 rdr\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{r\cos\theta\cdot r\sin\theta}{1+r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 rdr\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{r^2\sin2\theta}{1+r^2\cos2\theta}d\theta$$

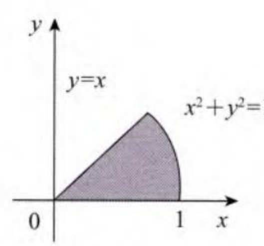


图 5-48

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4}\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}(1+r^2\cos 2\theta)}{1+r^2\cos 2\theta} \\
&= -\frac{1}{4}\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}[\ln(1+r^2\cos 2\theta)] \\
&= -\frac{1}{4}\int_0^1 r\ln(1+r^2\cos 2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}r \\
&= -\frac{1}{4}\int_0^1 r[0-\ln(1+r^2)]\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{8}\int_0^1 \ln(1+r^2)\mathrm{d}(1+r^2) \\
&= \frac{1}{8}\left[(1+r^2)\ln(1+r^2)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1+r^2}{1+r^2}\cdot 2r\mathrm{d}r\right] \\
&= \frac{1}{8}(2\ln 2-1).
\end{aligned}
$$

注 若先对 r 积分后对 θ 积分，计算较烦琐.

(9) 解 $I=\int_0^1 \arcsin(2\sqrt{x-x^2})\mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}y=\int_0^1 x\arcsin(2\sqrt{x-x^2})\mathrm{d}x$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 x\arcsin\left[2\sqrt{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2}\right]\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}\cos t} \frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1-\cos t)\sin t\cdot\arcsin(\sin t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t(1-\cos t)\sin t\mathrm{d}t+\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-t)(1-\cos t)\sin t\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

又 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-t)(1-\cos t)\sin t\mathrm{d}t \xlongequal{\pi-t=u} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(1+\cos u)\sin u\mathrm{d}u$，

故

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t(1-\cos t)\sin t\mathrm{d}t+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t(1+\cos t)\sin t\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}t\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

注 在 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上，$\arcsin(\sin t)=\pi-t$.

(10) 解 $\int_{-\sqrt{t^2-x^2}}^{\sqrt{t^2-x^2}}[f(\sqrt{x^2+y^2})+2y]\mathrm{d}y=2\int_0^{\sqrt{t^2-x^2}} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}y$

$$
\xlongequal{\sqrt{x^2+y^2}=u} 2\int_x^t \frac{uf(u)}{\sqrt{u^2-x^2}}\mathrm{d}u,
$$

故
$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^t \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{t^2-x^2}}^{\sqrt{t^2-x^2}}[f(\sqrt{x^2+y^2})+2y]\mathrm{d}y}{t^3} &= \lim_{t\to 0^+}\frac{2\int_0^t \mathrm{d}x\int_x^t \frac{uf(u)}{\sqrt{u^2-x^2}}\mathrm{d}u}{t^3} \\
&= 2\lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^t uf(u)\mathrm{d}u\int_0^u \frac{1}{\sqrt{u^2-x^2}}\mathrm{d}x}{t^3}
\end{aligned}
$$

$$=\pi\lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^t uf(u)\mathrm{d}u}{t^3}=\pi\lim_{t\to0^+}\frac{tf(t)}{3t^2}=\frac{\pi}{3}.$$

(11) 解 积分区域 D 如图 5-49 所示，用极坐标. 当 $t>0$ 时，

$$\begin{aligned}F(t)&=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant t^2\\x\geqslant0,y\geqslant0}}x\left[1-\frac{F(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^t r\cos\theta\left[1-\frac{F(r)}{r^2}\right]\cdot r\mathrm{d}r\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^t r^2\left[1-\frac{F(r)}{r^2}\right]\cdot\mathrm{d}r\\&=\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\int_0^t[r^2-F(r)]\mathrm{d}r\\&=\int_0^t r^2\mathrm{d}r-\int_0^t F(r)\mathrm{d}r=\frac{1}{3}t^3-\int_0^t F(r)\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

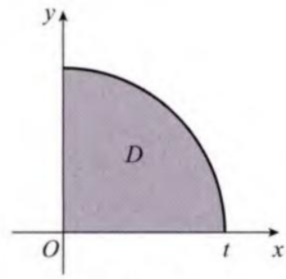


图 5-49

即
$$F(t)=\frac{1}{3}t^3-\int_0^t F(r)\mathrm{d}r. \qquad ①$$

① 式两边同时对 t 求导，得 $F'(t)=t^2-F(t)$，即 $F'(t)+F(t)=t^2$，该式为一阶线性微分方程，解得

$$F(t)=\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}t}\left(\int t^2\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\right)=t^2-2t+2+C\mathrm{e}^{-t}.$$

由已知 $F(0)=0$，得 $C=-2$，故

$$F(t)=t^2-2t+2-2\mathrm{e}^{-t}(t\geqslant0).$$

(12) 解 由已知，$f(0)=0$，$f(t)$ 是偶函数，只需讨论 $t>0$ 的情况. 用极坐标，有

$$f(t)=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t r^3f(r)\mathrm{d}r+t^4=4\pi\int_0^t r^3f(r)\mathrm{d}r+t^4,$$

上式两边同时对 t 求导，得 $f'(t)=4\pi t^3f(t)+4t^3$，且 $f(0)=0$，解此一阶线性微分方程，得

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\left(\mathrm{e}^{\pi t^4}-1\right),t\geqslant0.$$

而 $f(t)$ 是偶函数，故在$(-\infty,+\infty)$ 内有 $f(t)=\dfrac{1}{\pi}\left(\mathrm{e}^{\pi t^4}-1\right)$.

(13) 解 交换积分顺序，如图 5-50 所示，

$$\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u=-\int_0^x\mathrm{d}u\int_0^{u^2}f(t,u)\mathrm{d}t,$$

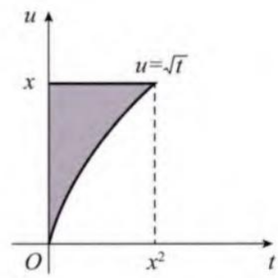


图 5-50

故原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\int_0^x\mathrm{d}u\int_0^{u^2}f(t,u)\mathrm{d}t}{\frac{1}{4}x^4}\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\int_0^{x^2}f(t,x)\mathrm{d}t}{x^3}$.

由积分中值定理，得

$$\int_0^{x^2}f(t,x)\mathrm{d}t=f(\xi,x)x^2(0\leqslant\xi\leqslant x^2),$$

故原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-f(\xi,x)x^2}{x^3}$.

因 $f(x,y)$ 在点(0,0) 处可微，由可微的定义，有

$$f(\xi,x)=f(0,0)+f_x'(0,0)\xi+f_y'(0,0)x+o(\sqrt{x^2+\xi^2}),$$

又 $\left|\dfrac{f_x'(0,0)\xi}{x}\right|\leqslant\left|\dfrac{f_x'(0,0)x^2}{x}\right|=|f_x'(0,0)x|$，则有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f_x'(0,0)\xi}{x}=0,\ \lim_{x\to0^+}\frac{o(\sqrt{x^2+\xi^2})}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{o(x)}{x}=0,$$

故 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-f(\xi,x)x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(0,0)+f_x'(0,0)\xi+f_y'(0,0)x+o(\sqrt{x^2+\xi^2})}{-x}=-f_y'(0,0)=-1.$

(14) 解 设 $\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=A$($A$ 为一个数). 在已知等式两边同时取二重积分,得

$$A=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D(x^2+y^2-x+y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+A\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

如图 5-51 所示,D 关于直线 $x=y$ 对称,则

$$A=\frac{1}{2}\iint\limits_D(x^2+y^2-x+y-1+y^2+x^2-y+x-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+A\cdot\frac{\pi}{4}\cdot2^2$$

$$=\iint\limits_D(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\pi A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2(r^2-1)r\mathrm{d}r+\pi A=\pi+\pi A,$$

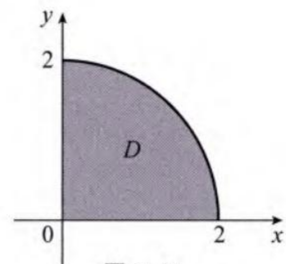


图 5-51

故 $A=\dfrac{\pi}{1-\pi}$,所求函数为 $f(x,y)=x^2+y^2-x+y-1+\dfrac{\pi}{1-\pi}.$

(15) 解 由已知,积分区域 D 如图 5-52 所示,采用极坐标,

$$I=\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2\frac{r}{r^2(1+\sin^2\theta)}\cdot r\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_1^2\frac{\mathrm{d}r}{1+\sin^2\theta}=\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta},$$

而

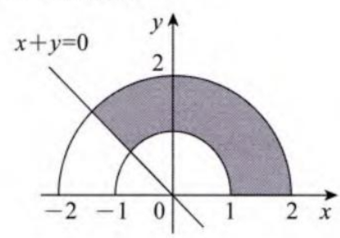


图 5-52

$$\int\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta}=\int\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{\frac{1}{\cos^2\theta}+\tan^2\theta}\mathrm{d}\theta$$
$$=\int\frac{\mathrm{d}(\tan\theta)}{1+2\tan^2\theta}$$
$$=\frac{1}{\sqrt2}\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt2\tan\theta)}{1+(\sqrt2\tan\theta)^2}$$
$$=\frac{1}{\sqrt2}\arctan(\sqrt2\tan\theta)+C,$$

故

$$I=\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta}$$
$$=\frac{1}{\sqrt2}\arctan(\sqrt2\tan\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-0}+\frac{1}{\sqrt2}\arctan(\sqrt2\tan\theta)\Big|_{\frac{\pi}{2}+0}^{\frac{3\pi}{4}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{\pi}{2}+\left(-\frac{1}{\sqrt2}\arctan\sqrt2\right)-\frac{1}{\sqrt2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{\sqrt2}{2}\pi-\frac{1}{\sqrt2}\arctan\sqrt2.$$

注 ① 如果用 $\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta}=\dfrac{1}{\sqrt2}\arctan(\sqrt2\tan\theta)\Big|_0^{\frac{3\pi}{4}}=-\dfrac{1}{\sqrt2}\arctan\sqrt2$,是错误的.

其原因是 $\dfrac{1}{\sqrt2}\arctan(\sqrt2\tan\theta)$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{2}\in\left[0,\dfrac{3}{4}\pi\right]$ 处无意义,在 $\left[0,\dfrac{3\pi}{4}\right]$ 上不连续,即 $\dfrac{1}{\sqrt2}\arctan(\sqrt2\tan\theta)$ 不是被积函数在 $\left[0,\dfrac{3}{4}\pi\right]$ 上的原函数,不能直接用牛顿-莱布尼茨公式,要进行分段处理.

② 如果用换元法:令 $\tan\theta=u$,有

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta}=\int_0^{-1}\frac{\mathrm{d}u}{1+2u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}u)\Big|_0^{-1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2},$$

也是错误的. 其原因是，当 $t\in[-1,0]$ 时，$\theta=\arctan u$ 的值不落在原积分区间 $\left[0,\frac{3}{4}\pi\right]$ 上，不符合第二换元法条件要求.

(16) 解 令 $A=\iint\limits_D\frac{xf(x,y)}{x+y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，则

$$\frac{xf(x,y)}{x+y}=\frac{x}{x+y}\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)+\frac{A}{\pi}\cdot\frac{x}{x+y},$$

$$\begin{aligned}A&=\iint\limits_D\frac{xf(x,y)}{x+y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D\frac{x}{x+y}\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\frac{A}{\pi}\iint\limits_D\frac{x}{x+y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_D\frac{y}{x+y}\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\frac{A}{\pi}\iint\limits_D\frac{y}{x+y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\iint\limits_D\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\frac{A}{2\pi}\iint\limits_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_2^3\sin(\pi r)r\,\mathrm{d}r+\frac{A}{2\pi}\cdot\frac{5\pi}{4}\\&=\frac{5}{4}+\frac{5A}{8}.\end{aligned}$$

解得 $A=\frac{10}{3}$. 故

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\frac{A}{\pi}\iint\limits_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{5}{2}+\frac{10}{3\pi}\cdot\frac{5\pi}{4}=\frac{20}{3}.$$

(17) 证 所证不等式变形为

$$I=\int_0^1xf^2(x)\mathrm{d}x\int_0^1f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1xf(x)\mathrm{d}x\int_0^1f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant0,$$

由于定积分的值与积分变量用什么字母无关，所以

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\left[xf^2(x)f(y)-xf(x)f^2(y)+yf^2(y)f(x)-yf(y)f^2(x)\right]\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\iint\limits_D f(x)f(y)(x-y)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中 $D:0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1$ 为正方形.

由 $f(x)$ 单调减少，知 $[f(x)-f(y)]$ 与 $(x-y)$ 异号，而 $f(x)>0,f(y)>0$，根据二重积分的性质，知 $I\leqslant0$，即所证不等式成立.

(18) 解 积分区域 D 如图 5-53 所示，设其密度为常数 ρ，考虑 D 的对称性，质心在 $x=\pi$ 上，即 $\overline{x}=\pi$，只需求

$$\overline{y}=\frac{\iint\limits_D y\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint\limits_D\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}=\frac{\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint\limits_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}.$$

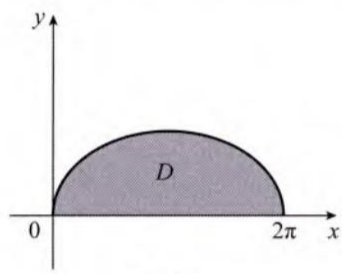


图 5-53

而面积

$$\iint\limits_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}y(x)\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\cdot(1-\cos t)\mathrm{d}t=3\pi,$$

故
$$\begin{aligned}\overline{y}&=\frac{1}{3\pi}\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{3\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{y(x)}y\,\mathrm{d}y=\frac{1}{6\pi}\int_0^{2\pi}[y(x)]^2\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{6\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\mathrm{d}t=\frac{5}{6},\end{aligned}$$

所以质心为$\left(\pi,\dfrac{5}{6}\right)$.

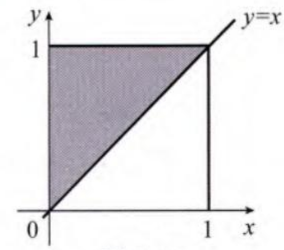


图 5-54

(19) 证 积分区域 D 如图 5-54 所示,D 关于直线 $y=x$ 对称,由轮换对称性,得

$$\begin{aligned}&\iint_D xf(x)f(y)\left[f(x)-f(y)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\=&\iint_D yf(y)f(x)\left[f(y)-f(x)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\=&\frac{1}{2}\iint_D\{xf(x)f(y)[f(x)-f(y)]+yf(y)f(x)[f(y)-f(x)]\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\=&\frac{1}{2}\iint_D f(x)f(y)(x-y)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

由已知,$f(x)f(y)>0$,考虑到 $f(x)$ 单调减少,故$(x-y)[f(x)-f(y)]<0$,于是

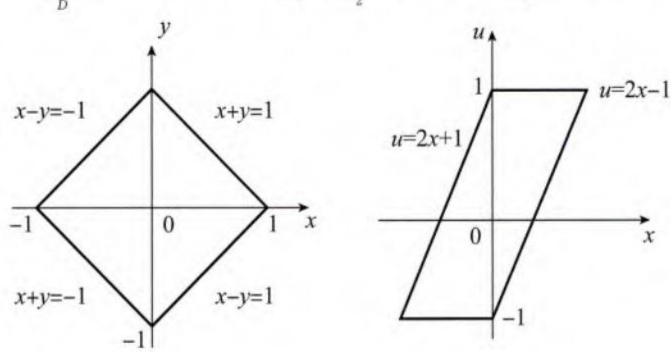
$$\iint_D xf(x)f(y)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant 0.$$

(20) 证 积分区域如图 5-55(a) 所示,

$$\begin{aligned}\iint_D f(x+y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-1-x}^{x+1}f(x+y)\mathrm{d}y+\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x-1}^{1-x}f(x+y)\mathrm{d}y\\&\xlongequal{x+y=u}\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1+2x}f(u)\mathrm{d}u+\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{2x-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

如图 5-55(b) 所示,在 xOu 坐标下,交换积分顺序,则

$$\iint_D f(x+y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_{\frac{u-1}{2}}^{\frac{u+1}{2}}f(u)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u.$$

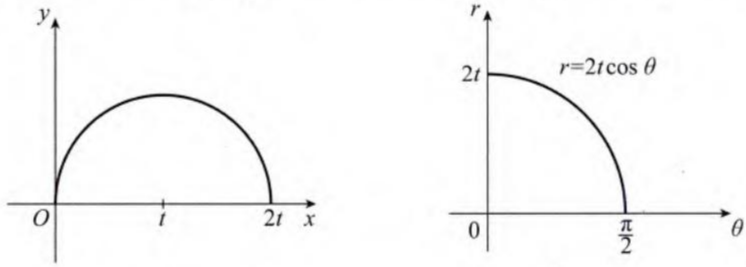


(a)　　(b)

图 5-55

(21) 解 积分区域如图 5-56(a) 所示,用极坐标,有

$$\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2t\cos\theta}f(r)\cdot r\sin\theta\cdot r\,\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2t\cos\theta}f(r)r^2\mathrm{d}r.$$



(a)　　(b)

图 5-56

交换积分顺序,可视在直角坐标下处理,如图 5-56(b) 所示,则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2t\cos\theta}f(r)r^2\mathrm{d}r=\int_0^{2t}r^2f(r)\mathrm{d}r\int_0^{\arccos\frac{r}{2t}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2t}r^2f(r)(-\cos\theta)\Big|_0^{\arccos\frac{r}{2t}}\mathrm{d}r=\int_0^{2t}r^2f(r)\left(1-\frac{r}{2t}\right)\mathrm{d}r,$$

故

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^4}\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{t\int_0^{2t}r^2f(r)\mathrm{d}r-\frac{1}{2}\int_0^{2t}r^3f(r)\mathrm{d}r}{t^5}=\lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^{2t}r^2f(r)\mathrm{d}r}{5t^4}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{2(2t)^2f(2t)}{20t^3}=\lim_{t\to0^+}\frac{4}{5}\,\frac{f(2t)-f(0)}{2t}=\frac{4}{5}f'(0).$$

注 ① 此题考虑极坐标下交换积分顺序,主要是由于$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2t\cos\theta}f(r)r^2\mathrm{d}r$ 中对 r 积分的结果会有 θ,故不能先计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$,即不能将其化为一元积分.

② 极坐标下交换积分顺序,可视 θ 为 x 轴,r 为 y 轴,在直角坐标 θOr 中画出积分区域,按直角坐标确定其积分限.

(22) 证 依题意,只需证明

$$\overline{x}=\frac{\iint_D x\rho\,\mathrm{d}\sigma}{\iint_D\rho\,\mathrm{d}\sigma}=\frac{\int_a^b x\,\mathrm{d}x\int_0^{f(x)}\mathrm{d}y}{\int_a^b\mathrm{d}x\int_0^{f(x)}\mathrm{d}y}=\frac{\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}\geqslant\frac{1}{2}(a+b),\quad \rho\text{ 为常数},$$

即证明$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}(a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant0$. 令

$$F(t)=\int_a^t xf(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}(a+t)\int_a^t f(x)\mathrm{d}x,\ t\in[a,b],$$

则

$$F'(t)=tf(t)-\frac{1}{2}(a+t)f(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x,$$

$$F''(t)=\frac{1}{2}(t-a)f'(t)\geqslant0,$$

故 $F'(t)$ 单调增加. 又 $F'(a)=0$,所以 $F'(t)\geqslant F'(a)=0$,即 $F(t)$ 单调增加.

又 $F(a)=0$,故 $F(t)\geqslant F(a)=0$,即$\overline{x}\geqslant\frac{1}{2}(a+b)$.

拓展题

解答题

(1) 证 (Ⅰ) 如图 5-57 所示,

$$\overline{x}=\frac{\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}=\frac{\int_0^a x\,\mathrm{d}x\int_0^{f(x)}\mathrm{d}y}{\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{f(x)}\mathrm{d}y}=\frac{\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x}{\int_0^a f(x)\mathrm{d}x}=\frac{2}{3}a,$$

由 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,得$\frac{2}{3}x\cdot F(x)=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$,等式两边同时对 x 求导,得

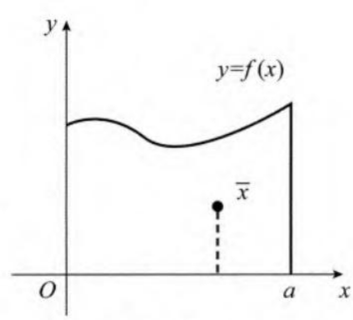


图 5-57

$$\frac{2}{3}x \cdot F'(x) + \frac{2}{3}F(x) = xf(x) = xF'(x),$$

即 $F'(x) = \dfrac{2F(x)}{x}$.

解 (Ⅱ) 由(Ⅰ)知 $F'(x) = \dfrac{2F(x)}{x}$,即 $F'(x) - \dfrac{2}{x}F(x) = 0$,

解此一阶线性齐次微分方程,得通解为

$$F(x) = C_1 \cdot e^{-\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx} = C_1x^2 \quad (C_1 \text{ 为任意常数}),$$

故 $$f(x) = F'(x) = 2C_1x = Cx \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

(2) 解 积分区域 D 如图 5-58 所示,在直角坐标下,

$$D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant x \leqslant x(y)\}.$$

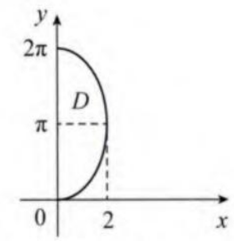


图 5-58

这里 $x = x(y)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 1-\cos t, \\ y = t - \sin t \end{cases}$ 确定.

$$I = \iint_D (2x+y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D 2x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

又
$$\begin{aligned}
\iint_D 2x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}y\int_0^{x(y)}2x\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}x^2(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi}\{x[y(t)]\}^2 \cdot y'(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}[x(t)]^2 \cdot y'(t)\mathrm{d}t \\
&\xlongequal[y=t-\sin t]{x=1-\cos t} \int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 \cdot (1-\cos t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^3\mathrm{d}t \\
&= 8\int_0^{2\pi}\sin^6\frac{t}{2}\mathrm{d}t \xlongequal{\frac{t}{2}=u} 16\int_0^{\pi}\sin^6 u\,\mathrm{d}u \\
&= 16 \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 u\,\mathrm{d}u = 32 \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = 5\pi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}y\,\mathrm{d}y\int_0^{x(y)}\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}y \cdot x(y)\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}y(t) \cdot x(t) \cdot y'(t)\mathrm{d}t \\
&\xlongequal[y=t-\sin t]{x=1-\cos t} \int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)^2\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{t=u+\pi} \int_{-\pi}^{\pi}(u+\pi+\sin u)(1+\cos u)^2\mathrm{d}u \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}(u+\sin u)(1+\cos u)^2\mathrm{d}u + \pi\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos u)^2\mathrm{d}u \\
&= 0 + \pi\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos u)^2\mathrm{d}u\text{(利用奇函数)} \\
&= 2\pi\int_0^{\pi}(1+\cos u)^2\mathrm{d}u = 8\pi\int_0^{\pi}\cos^4\frac{u}{2}\mathrm{d}u \\
&\xlongequal{u=2s} 16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 s\,\mathrm{d}s = 16\pi \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = 3\pi^2,
\end{aligned}$$

故 $I = 5\pi + 3\pi^2$.

注 由于 D 关于直线 $y = \pi$ 对称,故区域 D 的形心位于 $y = \pi$ 上,即形心的纵坐标 $\overline{y} = \pi$. 由形心公式,知 $\overline{y} = \dfrac{\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$,则

$$\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \bar{y}\cdot\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}y\int_0^{x(y)}\mathrm{d}x = \pi\int_0^{2\pi}x(y)\mathrm{d}y$$

$$= \pi\int_0^{2\pi}x(t)\cdot y'(t)\mathrm{d}t = \pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\cdot(1-\cos t)\mathrm{d}t$$

$$= \pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\mathrm{d}t = 4\pi\int_0^{2\pi}\sin^4\frac{t}{2}\mathrm{d}t \xlongequal{\frac{t}{2}=u} 8\pi\int_0^{\pi}\sin^4 u\mathrm{d}u$$

$$= 16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 u\mathrm{d}u = 16\pi\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = 3\pi^2.$$

(3) **解** 记 $f(x,y) = 2x - x^2 - y^2 = 1-(x-1)^2 - y^2$. $(x-1)^2 + y^2 = 1$,将 D 分成 D_1 与 D_2 两部分,如图 5-59 所示. 其中

$$D_1 = \{(x,y) \mid (x-1)^2 + y^2 \leqslant 1\},\ D_2 = D - D_1.$$

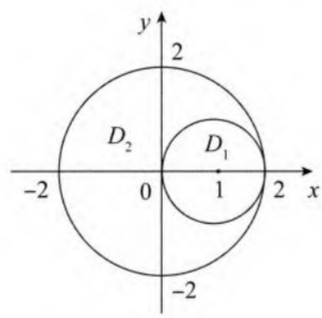


图 5-59

则

$$I = \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_1+D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{\text{记}} I_1 - I_2,$$

$$I_1 = 2\iint_{D_1}[1-(x-1)^2 - y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal[y = r\sin\theta]{x-1 = r\cos\theta} 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)r\mathrm{d}r$$

$$= 4\pi\int_0^1(r-r^3)\mathrm{d}r = \pi.$$

$$I_2 = \iint_D[1-(x-1)^2 - y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D(2x - x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

D 关于 y 轴对称,$2x$ 是奇函数,故 $\iint_D 2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$. 所以,

$$I_2 = 0 - \iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\cdot r\mathrm{d}r = -8\pi,$$

于是 $I = I_1 - I_2 = \pi - (-8\pi) = 9\pi$.

注 ① 推广的极坐标: $x - x_0 = r\cos\theta, y - y_0 = r\sin\theta$,则

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial Q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

根据二重积分的一般换元法,有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r.$$

② 广义极坐标: $x = ar\cos\theta, y = br\sin\theta, (a>0, b>0)$,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(ar\cos\theta, br\sin\theta)abr\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r.$$

③ 推广的极坐标与广义极坐标,在现行考研大纲中未作要求,掌握其方法对考试有益. 此题也可以直接利用极坐标 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 计算 I_1.

(4) **解** 当 $x \geqslant 1$ 且 $y \geqslant 1$ 时,L 为 $\ln x + \ln y = 1$,即 $xy = \mathrm{e}$;

当 $x\geqslant 1$ 且 $0<y<1$ 时,L 为 $\ln x-\ln y=1$,即 $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$;

当 $0<x<1$ 且 $y\geqslant 1$ 时,L 为 $-\ln x+\ln y=1$,即 $y=\mathrm{e}x$.

当 $0<x<1$ 且 $0<y<1$ 时,L 为 $-\ln x-\ln y=1$,即 $xy=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

积分区域 D 如图 5-60 所示,D 关于直线 $y=x$ 对称,故

$$\iint_D(x-y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_D(x-y+y-x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,$$

$$\begin{aligned}I&=0+\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_{\arctan\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\arctan \mathrm{e}}\mathrm{d}\theta\int_{\sqrt{\frac{1}{\mathrm{e}\sin\theta\cos\theta}}}^{\sqrt{\frac{\mathrm{e}}{\sin\theta\cos\theta}}}r\,\mathrm{d}r\\&=\frac{1}{2}\int_{\arctan\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\arctan \mathrm{e}}r^2\Big|_{\sqrt{\frac{1}{\mathrm{e}\sin\theta\cos\theta}}}^{\sqrt{\frac{\mathrm{e}}{\sin\theta\cos\theta}}}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\int_{\arctan\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\arctan \mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta\cos\theta}\\&=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\int_{\arctan\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\arctan \mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}(\tan\theta)}{\tan\theta}\\&=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\ln(\tan\theta)\Big|_{\arctan\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\arctan \mathrm{e}}=\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

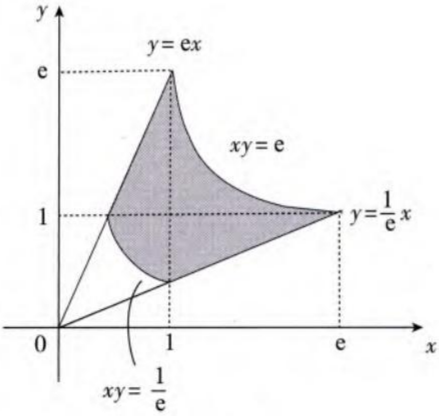


图 5-60

(5) 解 D 如图 5-61 所示,采用极坐标.

$x^2+y^2=\dfrac{1}{4}$ 的极坐标方程为 $r=\dfrac{1}{2}$.

$x^2+y^2=x^4+y^4$ 的极坐标方程为 $r=\sqrt{\dfrac{1}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}}$.

$$\begin{aligned}I&=\iint_D\frac{xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{\frac{1}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}}}\frac{r^2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\cdot\frac{1}{2}r^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{\frac{1}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}}}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\mathrm{d}\theta-\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta,\end{aligned}$$

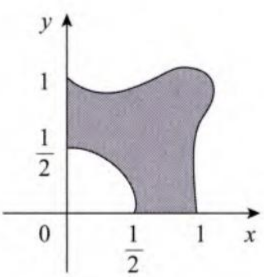


图 5-61

而
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\mathrm{d}(\sin\theta)=\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\mathrm{d}\theta&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{2(\sin^4\theta+\cos^4\theta)}\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta}{2(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+2\cos^2\theta\sin^2\theta-2\cos^2\theta\sin^2\theta}\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-\frac{1}{2}\mathrm{d}(\cos 2\theta)}{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)^2}\\&=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\cos 2\theta)}{1+(\cos 2\theta)^2}=-\frac{1}{2}\arctan(\cos 2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}[\arctan(-1) - \arctan 1] = -\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4},$$

故 $I = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}(2\pi - 1)$.

注 计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^4\theta + \cos^4\theta}\mathrm{d}\theta$ 也可以用以下方法：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^4\theta + \cos^4\theta}\mathrm{d}\theta \xlongequal{\sin\theta = t} \int_0^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^4 + (1-t^2)^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}(t^2)}{2t^4 - 2t^2 + 1}$$

$$\xlongequal{t^2 = u} \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{2u^2 - 2u + 1} = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^2 - u + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\left(u - \frac{1}{2}\right)}{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} \times 2\arctan \frac{u - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}[\arctan 1 - \arctan(-1)] = \frac{\pi}{4}.$$

第六章　微分方程及其应用

基础题

一、选择题

(1)A.

解 $\frac{dy}{dx}+\frac{x}{y}=0$ 为可分离变量方程,故 $ydy+xdx=0$,积分得 $x^2+y^2=C_1,C_1\geqslant 0$,即 $x^2+y^2=C^2$,故选项 A 正确.

(2)B.

解 将 $y=\cos 2x$ 代入 $y'+P(x)y=0$,解得 $P(x)=2\tan 2x$,故

$$y'+(2\tan 2x)y=0.$$

解此一阶线性齐次微分方程,得 $y=Ce^{-\int P(x)dx}=Ce^{-\int 2\tan 2xdx}=C\cos 2x$.

由 $y(0)=2$,得 $C=2$,故 $y=2\cos 2x$,选项 B 正确.

(3)A.

解 $y''+2y'-3y=e^{-x}+x$ 的特解为两个微分方程 $y''+2y'-3y=e^{-x}$ 与 $y''+2y'-3y=x\cdot e^{0\cdot x}$ 的两个特解之和. 齐次线性微分方程特征方程为 $r^2+2r-3=0$,得 $r_1=1,r_2=-3$. 由于 $\lambda=-1$ 与 $\lambda=0$ 均不是特征根,故 $y''+2y'-3y=e^{-x}$ 有形如 ae^{-x} 的特解,$y''+2y'-3y=x$ 有形如 $bx+c$ 的特解,所以原方程的特解形式为 $ae^{-x}+bx+c$,选项 A 正确.

(4)A.

解 依题意,$y_1(x)-y_2(x)$ 是 $y'+P(x)y=0$ 的解.

当 $P(x)$ 不恒为 0 时,非零常数不可能是 $y'+P(x)y=0$ 的解,故选择 A.

选项 D 正确,因为 $y'+P(x)y=0$ 的通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$,所以任意两个解相差一个常数因子.

选项 C 正确,因 $y'+P(x)y=0$ 两个不同的解不能满足相同的初始条件.

事实上,假设存在 x_0,使得 $y_1(x_0)=y_2(x_0)$,令 $y_0=y_1(x)-y_2(x)$,则 $y_0(x)$ 是该方程的解,且满足初始条件 $y_0(x_0)=0$,根据微分方程解的存在唯一性定理,知 $y_0(x)$ 恒为零,故 $y_1(x)=y_2(x)$,与已知条件矛盾.

(5)D.

解 由线性微分方程解的性质和结构,知该方程的通解为

$$C_1[y_1(x)-y_3(x)]+C_2[y_2(x)-y_3(x)]+y_3(x),$$

即

$$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+(1-C_1-C_2)y_3(x).$$

令 $C_3=1-C_1-C_2$,则 $C_1+C_2+C_3=1$,故选项 D 正确.

(6)C.

解 $y'+ay=f(x)$ 的通解为 $y=e^{-ax}\left[\int_0^x f(t)e^{at}dt+C\right]$,故

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}y(x)&=\lim_{x\to+\infty}\left[Ce^{-ax}+e^{-ax}\int_0^x f(t)e^{at}dt\right]\\&=0+\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)e^{at}dt}{e^{ax}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)e^{ax}}{ae^{ax}}=\frac{b}{a},\end{aligned}$$

故 $y=y(x)$ 有水平渐近线 $y=\frac{b}{a}$. 选项 C 正确.

二、填空题

(1) $y=\frac{1}{x}(\sin x-x\cos x+C)$（$C$ 为任意常数）.

解 原方程变形为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}y=\sin x$，为一阶线性微分方程，故通解为

$$\begin{aligned} y&=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int\sin x\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\\ &=\mathrm{e}^{-\ln|x|}\left(\int\mathrm{e}^{\ln|x|}\sin x\,\mathrm{d}x+C\right)\\ &=\frac{1}{x}\left(\int x\sin x\,\mathrm{d}x+C\right)=\frac{1}{x}(\sin x-x\cos x+C)\ (C\text{ 为任意常数}). \end{aligned}$$

注 ① 若令 $P=y-x\sin x$，$Q=x$，则 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=1$，所以该方程为全微分方程，故通解为

$$\int_0^x P(x,0)\mathrm{d}x+\int_0^y Q(x,y)\mathrm{d}y=C,\text{即}\int_0^x(0-x\sin x)\mathrm{d}x+\int_0^y x\,\mathrm{d}y=C.$$

故 $x\cos x-\sin x+xy=C$ 为通解.

② $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$，当 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 时，该方程为全微分方程，有通解公式

$$\int_{x_0}^x P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^y Q(x,y)\mathrm{d}y=C.$$

(2) $(2x-1)(1+y^2)=C$（C 为任意常数）.

解 原方程可化为可分离变量方程 $\frac{\mathrm{d}x}{2x-1}+\frac{y\mathrm{d}y}{1+y^2}=0$，积分可得

$$\frac{1}{2}\ln|2x-1|+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\frac{1}{2}\ln C,$$

故通解为 $(2x-1)(1+y^2)=C$（C 为任意常数）.

(3) $\sin\frac{y}{x}=\frac{1}{2}x$.

解 原方程为齐次微分方程，令 $u=\frac{y}{x}$，即 $y=ux$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u+\tan u.$$

分离变量得 $\cot u\,\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$，积分得 $\ln|\sin u|=\ln|x|+C_1$，故

$$\sin u=\pm\mathrm{e}^{C_1}\cdot x=Cx\ (C\neq 0),$$

即 $\sin\frac{y}{x}=Cx\,(C\neq 0)$.

又 $y=0$ 也是原方程的解（$y=0$ 在分离变量过程中漏掉了），故上面常数也可以为零，则原方程的通解为 $\sin\frac{y}{x}=Cx$（C 为任意常数）.

由 $y(1)=\frac{\pi}{6}$，得 $C=\frac{1}{2}$，故所求特解为 $\sin\frac{y}{x}=\frac{1}{2}x$.

(4) $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2\,(x>0)$ 和 $-y+\sqrt{x^2+y^2}=C\,(x<0)$，其中 C 为大于零的常数.

解 方程变形为 $y'=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}+\frac{y}{x}$.

当 $x>0$ 时,方程化为 $y'=\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x}$;

当 $x<0$ 时,方程化为 $y'=-\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x}$.

令 $\frac{y}{x}=u$,则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,方程变为 $\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=\pm\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 两种情形,积分可得 $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2(x>0)$ 和 $-y+\sqrt{x^2+y^2}=C(x<0)$,为原方程通解,其中 C 为大于零的常数.

(5) $y=\frac{1}{4}[(x+1)\mathrm{e}^{-x}+(x-1)\mathrm{e}^x]$.

解 特征方程为 $r^2+2r+1=0$, $r_1=r_2=-1$,故对应齐次微分方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2x\mathrm{e}^{-x}.$$

由非齐次项 $x\mathrm{e}^x$,知 $\lambda=1$ 不是特征根,故令特解为 $y^*=(ax+b)\mathrm{e}^x$,将 y^* 代入原方程,比较系数得 $a=\frac{1}{4}$,$b=-\frac{1}{4}$,故通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2x\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{4}(x-1)\mathrm{e}^x$.

由 $y(0)=0$,$y'(0)=0$,得 $C_1=\frac{1}{4}$,$C_2=\frac{1}{4}$,故所求特解为

$$y=\frac{1}{4}[(x+1)\mathrm{e}^{-x}+(x-1)\mathrm{e}^x].$$

(6) $y=\mathrm{e}^{-x}(\sin x+\cos x)$.

解 特征方程 $r^2-3r+2=0$ 的特征根为 $r_1=1$,$r_2=2$,故对应的齐次微分方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$.

由非齐次项 $10\mathrm{e}^{-x}\sin x$,知 $-1\pm\mathrm{i}$ 不是特征根,故令原方程的特解为 $y^*=\mathrm{e}^{-x}(A\sin x+B\cos x)$,将其代入原方程,可解得 $A=B=1$,所以原方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-x}(\sin x+\cos x).$$

当 $x\to+\infty$ 时,$y(x)\to 0$,而 $\mathrm{e}^x\to+\infty$, $\mathrm{e}^{2x}\to+\infty$,因此有 $C_1=C_2=0$,故所求特解为

$$y=\mathrm{e}^{-x}(\sin x+\cos x).$$

(7) $y=\arcsin x\ (-1<x<1)$.

解 已知方程为不显含 y 的可降阶方程,令 $y'=p$,则 $y''=p'$,原方程变为 $(1-x^2)p'-xp=0$,即 $p'-\frac{x}{1-x^2}p=0\ (x\neq\pm 1)$,为一阶线性微分方程,有 $p=C_1\mathrm{e}^{\int\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x}$,即

$$p=C_1\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)}=\frac{C_1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

由 $p(0)=y'(0)=1$,得 $C_1=1$,故 $y=\int p(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C_2$.

又由 $y(0)=0$,得 $C_2=0$,所以 $y=\arcsin x\ (-1<x<1)$.

注 $\int\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+C$,由已知 $y(0)=0$, $y'(0)=1$,意味着在 $(-1,1)$ 内求解,故

$$\int\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+C.$$

(8) $y=C_1(\mathrm{e}^x-x)+C_2(\mathrm{e}^{-x}-x)+x\ (C_1,C_2$ 为任意常数).

解 由线性微分方程解的性质及通解结构,知 $y_1=\mathrm{e}^x-x$, $y_2=\mathrm{e}^{-x}-x$ 是对应齐次微分方程的两个线性无关的解,故通解为 $y=C_1(\mathrm{e}^x-x)+C_2(\mathrm{e}^{-x}-x)+x\ (C_1,C_2$ 为任意常数).

(9) $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x\ (C_1,C_2$ 为任意常数).

解 由特解 $y^*=\mathrm{e}^{-x}(1+x\mathrm{e}^{2x})=\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^x$,知该方程对应的齐次微分方程有特征根 $r_1=-1$, $r_2=1$,

且 xe^x 是其特解,故该方程的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^x+xe^x$(C_1,C_2 为任意常数).

三、解答题

(1) 解 依题设,有 $y(1)=0$,$y'(1)=1$.

方程 $x^2y''-y'^2=0$ 不显含 y,令 $y'=p$, $y''=p'$,代入原方程,得 $x^2p'-p^2=0$,分离变量并积分,得 $\frac{1}{p}=\frac{1}{x}+C_1$. 由 $y'(1)=1$,得 $C_1=0$,故 $p=\frac{dy}{dx}=x$,积分得,$y=\frac{1}{2}x^2+C_2$.

又由 $y(1)=0$,得 $C_2=-\frac{1}{2}$,故所求积分曲线为 $y=\frac{1}{2}(x^2-1)$.

(2) 解 已知等式变形为 $f(x)=\cos x-x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt$,两边同时对 x 求导,得

$$f'(x)=-\sin x-\int_0^x f(t)dt-xf(x)+xf(x)=-\sin x-\int_0^x f(t)dt, \qquad ①$$

再对 x 求导,得

$$f''(x)+f(x)=-\cos x. \qquad ②$$

对应齐次方程的特征方程为 $r^2+1=0$,得 $r=\pm i$,故齐次方程的通解为

$$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

由非齐次项 $-\cos x$,知 $0\pm i$ 是特征根,故令特解为 $f^*=x(A\cos x+B\sin x)$,将其代入 ② 式可得 $A=0$,$B=-\frac{1}{2}$,所以其通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\sin x$.

又由已知等式及 ① 式,知 $f(0)=1$,$f'(0)=0$,故得 $C_1=1$,$C_2=0$,所以

$$f(x)=\cos x-\frac{1}{2}x\sin x.$$

(3) 解 由已知条件 $f(0)=0$,由导数定义,有

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x f(\Delta x)+f(x)(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}e^x\cdot\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\cdot\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\\&=e^x f'(0)+f(x)=e^{x+1}+f(x),\end{aligned}$$

即 $f'(x)-f(x)=e^{x+1}$,为一阶线性微分方程,故

$$f(x)=e^{\int dx}\left(\int e^{x+1}e^{-\int dx}dx+C\right)=xe^{x+1}+Ce^x.$$

又由 $f(0)=0$,得 $C=0$,所以 $f(x)=xe^{x+1}$.

(4) 解 依题意,$y(0)=0$, $y'(0)=2$, $y''(0)=0$.

$y'''-y'=0$ 的特征方程为 $r^3-r=0$,得特征根为 $r_1=0$, $r_2=1$, $r_3=-1$,故微分方程的通解为 $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}$,故

$$y'=C_2e^x-C_3e^{-x},\ y''=C_2e^x+C_3e^{-x}.$$

代入初始条件 $y(0)=0$, $y'(0)=2$, $y''(0)=0$,得

$$C_1+C_2+C_3=0,\ C_2-C_3=2,\ C_2+C_3=0,$$

解得 $C_1=0$, $C_2=1$, $C_3=-1$,故所求积分曲线为 $y=e^x-e^{-x}$.

(5) 解 令 $\sqrt{x^2+y^2}=u$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{u}f'(u),\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{u-\frac{x^2}{u}}{u^2}f'(u)+\frac{x^2}{u^2}f''(u)=\frac{y^2}{u^3}f'(u)+\frac{x^2}{u^2}f''(u).$$

由 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 关于 x,y 具有轮换对称性,知 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2}{u^3}f'(u)+\frac{y^2}{u^2}f''(u)$,将其代入 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$

x^2+y^2,得 $f''(u)+\dfrac{1}{u}f'(u)=u^2$,即

$$uf''(u)+f'(u)=u^3,\ [uf'(u)]'=u^3,$$

积分得 $uf'(u)=\dfrac{1}{4}u^4+C_1$,故 $f'(u)=\dfrac{1}{4}u^3+\dfrac{C_1}{u}$,积分得 $f(u)=\dfrac{1}{16}u^4+C_1\ln u+C_2$,故

$$z=\frac{1}{16}(x^2+y^2)^2+C_1\ln\sqrt{x^2+y^2}+C_2\ (C_1,C_2\text{ 为任意常数}).$$

(6) 解 由 $u=\mathrm{e}^x$,知 $x=\ln u$,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(u\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(u\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}+u^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2},$$

将其代入原方程,得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2}-2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}+y=u, \qquad ①$$

其对应齐次微分方程的特征方程为 $r^2-2r+1=0$,得 $r_1=r_2=1$.

令特解 $y^*=au+b$,代入方程 ① 可解得 $y^*=u+2$,故方程 ① 的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^u+C_2u\mathrm{e}^u+u+2,$$

将 $u=\mathrm{e}^x$ 代入得原微分方程的通解为 $y=(C_1+C_2\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}+\mathrm{e}^x+2\ (C_1,C_2$ 为任意常数).

(7) 解 (Ⅰ) 依题设,曲线 L 过点 $P(x,y)$ 的切线为 $Y-y=y'(X-x)$,令 $X=0$,则切线在 y 轴上的截距为 $y-xy'$.

由已知,$\sqrt{x^2+y^2}=y-xy'$,即 $y'=\dfrac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}$.

由 $x>0$,$y'=\dfrac{y}{x}-\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$,为齐次微分方程. 令 $\dfrac{y}{x}=u$,则 $y'=u+xu'$,则 $u+xu'=u-\sqrt{1+u^2}$,为可分离变量的微分方程,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=-\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

积分并代回 $\dfrac{y}{x}=u$,得 $y+\sqrt{x^2+y^2}=C$. 又 L 过 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$,得 $C=\dfrac{1}{2}$,于是曲线 L 的方程为

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2},\text{即 } y=\frac{1}{4}-x^2.$$

(Ⅱ) 在第一象限内,$y=\dfrac{1}{4}-x^2$ 在点 $P(x,y)$ 处的切线方程为

$$Y-\left(\frac{1}{4}-x^2\right)=-2x(X-x),$$

即 $Y=-2x\cdot X+x^2+\dfrac{1}{4}\left(0<x\leqslant\dfrac{1}{2}\right)$,它与 x 轴、y 轴的交点分别为 $\left(\dfrac{x^2+\frac{1}{4}}{2x},0\right)$ 与 $\left(0,x^2+\dfrac{1}{4}\right)$,

故所求面积为

$$A(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2}{2x}-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-x^2\right)\mathrm{d}x,$$

则 $A'(x)=\dfrac{1}{4x^2}\left(x^2+\dfrac{1}{4}\right)\left(3x^2-\dfrac{1}{4}\right)=0$,得 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

当 $0<x<\frac{\sqrt{3}}{6}$ 时，$A'(x)<0$；当 $x>\frac{\sqrt{3}}{6}$ 时，$A'(x)>0$，故 $x=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 是 $A(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 上唯一的极小值点，也是最小值点，所求切线为 $Y=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}X+\frac{3}{36}+\frac{1}{4}$，即

$$Y=-\frac{\sqrt{3}}{3}X+\frac{1}{3}.$$

(8) 解 设曲线弧$\overset{\frown}{OA}$ 的方程为 $y=y(x)$，则$\overset{\frown}{OP}$ 与$\overline{OP}$ 所围面积为

$$\int_0^x\left[y(t)-\frac{y}{x}t\right]\mathrm{d}t=\int_0^x y(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}xy.$$

依题意，$\int_0^x y(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}xy=x^2(x>0)$，两边同时对 x 求导，得

$$y-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}xy'=2x,$$

即 $y'-\frac{1}{x}y=-4$，为一阶线性微分方程，其通解为

$$y=x(\ln x^{-4}+C)=x(C-4\ln x).$$

又由已知，有 $y(1)=1$，可得 $C=1$，故所求方程为 $y=\begin{cases}x-4x\ln x, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

注 ① $y=x-4x\ln x$ 在 $x=0$ 处无定义，但由于当 $x\to0^+$ 时，$x-4x\ln x\to0$，故$x=0$ 是函数的可去间断点，若令 $y(0)=0$，则积分曲线过原点.

② 依题设，曲线过 $O(0,0)$ 和 $A(1,1)$，若将 $y(0)=0$ 作为初始条件，则从通解中不能确定常数 C.

(9) 解（Ⅰ）已知方程变形为 $y'-\left(2x-\frac{1}{x}\right)y=x^2$，其通解为

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{\int\left(2x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}\left[\int x^2\mathrm{e}^{\int\left(\frac{1}{x}-2x\right)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\\&=\frac{1}{x}\mathrm{e}^{x^2}\left(\int x^3\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x+C\right)\\&=\frac{1}{x}\mathrm{e}^{x^2}\left(-\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x^2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}+C\right)\\&=-\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}+\frac{C\mathrm{e}^{x^2}}{x}.\end{aligned}$$

由 $y(1)=a$，得 $C=(1+a)\mathrm{e}^{-1}$，故

$$y(x)=-\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}+(1+a)\mathrm{e}^{-1}\cdot\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}.$$

（Ⅱ）由（Ⅰ）知

$$\frac{y(x)}{x}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2x^2}+(1+a)\mathrm{e}^{-1}\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2}.$$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}-\frac{1}{2x^2}+(1+a)\mathrm{e}^{-1}\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2}\right]=-\frac{1}{2}+\lim\limits_{x\to+\infty}(1+a)\mathrm{e}^{-1}\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2}$ 存在且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2}=+\infty$，知仅当 $a=-1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=-\frac{1}{2}$，即极限存在. 故

$$\lim_{x\to+\infty}\left[y(x)-\left(-\frac{1}{2}x\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2x}\right)=0,$$

所求斜渐近线方程为 $y=-\frac{1}{2}x$.

(10) **解** (Ⅰ)已知方程变形为 $f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=a\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)+x$,则该方程的通解为

$$\begin{aligned}f(x)&=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left\{\int\left[a\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)+x\right]e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right\}\\&=x\left\{\int\left[a\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)+x\right]\frac{1}{x}dx+C\right\}\\&=x\left[\int a\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2}\right)dx+\int dx+C\right]\\&=x\left[-\frac{a}{x}+a\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)+x+C\right]\\&=-a+a(\ln x+1)+x^2+Cx\\&=a\ln x+x^2+Cx.\end{aligned}$$

由 $f(1)=1-a$,得 $C=-a$,故 $f(x)=a\ln x+x^2-ax$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $f(x)=0$,即$\frac{1}{a}=\frac{x-\ln x}{x^2}$.

令 $g(x)=\frac{x-\ln x}{x^2}$,则 $g'(x)=\frac{2\ln x-x-1}{x^3}$.

令 $h(x)=2\ln x-x-1$,则 $h'(x)=\frac{2}{x}-1=\frac{2-x}{x}$.

当 $x\in(0,2)$ 时,$h'(x)>0$;当 $x\in(2,+\infty)$ 时,$h'(x)<0$.

故 $x=2$ 为 $h(x)$ 的极大值点,也是最大值点,最大值为 $h(2)=2\ln 2-3<0$.

从而 $g'(x)<0$,$g(x)$ 在$(0,+\infty)$ 内单调递减.

又 $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$,知 $g(x)$ 的值域为$(0,+\infty)$.

故$\frac{1}{a}>0$,即 a 的取值范围为$(0,+\infty)$.

(11) **解** (Ⅰ)已知方程 $xf'(x)-3f(x)=2x$ 变形为

$$f'(x)-\frac{3}{x}f(x)=2.$$

其通解为
$$f(x)=e^{\int\frac{3}{x}dx}\left(\int 2e^{-\int\frac{3}{x}dx}dx+C\right)=Cx^3-x.$$

由 $f(1)=\frac{1}{3}k-1$,得 $C=\frac{1}{3}k$,故 $f(x)=\frac{1}{3}kx^3-x$.

(Ⅱ)令 $f'(x)=kx^2-1=0$,得驻点 $x=\sqrt{\frac{1}{k}}$.

当 $0<k<1$ 时,$\sqrt{\frac{1}{k}}<\frac{1}{k}$,即$\sqrt{\frac{1}{k}}\in\left(0,\frac{1}{k}\right)$.

当 $x\in\left[0,\sqrt{\frac{1}{k}}\right)$ 时,$f'(x)<0$;当 $x\in\left(\sqrt{\frac{1}{k}},\frac{1}{k}\right]$ 时,$f'(x)>0$.

故 $f\left(\sqrt{\frac{1}{k}}\right)$ 是 $f(x)$ 唯一的极小值,也是最小值,最小值为 $f\left(\sqrt{\frac{1}{k}}\right)=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{k}}$.

当 $0<k<\frac{1}{3}$ 时,由 $f(0)=0$,$f\left(\frac{1}{k}\right)=\frac{1-3k}{3k^2}$,知 $f\left(\frac{1}{k}\right)>0=f(0)$.此时 $f\left(\frac{1}{k}\right)$ 是 $f(x)$ 的最大值.

当$\frac{1}{3}<k<1$ 时,$f\left(\frac{1}{k}\right)<0=f(0)$,此时 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最大值.

当 $k=\frac{1}{3}$ 时,$f(0)=0$ 与 $f\left(\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{3k^2}-\frac{1}{k}$ 均为 $f(x)$ 的最大值.

当 $k \geqslant 1$ 时，$\sqrt{\frac{1}{k}} \geqslant \frac{1}{k}$，且 $f'(x) = kx^2 - 1 \leqslant 0, x \in \left[0, \frac{1}{k}\right]$.

此时 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{k}\right]$ 上单调减少，故 $f(0) = 0$ 是 $f(x)$ 的最大值，$f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1-3k}{3k^2}$ 是 $f(x)$ 的最小值.

综合题

一、选择题

(1)A.

解 由通解 $y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$，知其特征根为 $r_1 = 1, r_2 = \mathrm{i}, r_3 = -\mathrm{i}$，故对应的特征方程为 $(r-1)(r^2+1) = 0$，即 $r^3 - r^2 + r - 1 = 0$，故对应的微分方程为 $y''' - y'' + y' - y = 0$，选项 A 正确.

(2)C.

解 由齐次微分方程通解为 $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$，知对应特征方程的根为 $r_1 = r_2 = 1$，其特征方程为 $(r-1)^2 = 0$，即 $r^2 - 2r + 1 = 0$，故 $p = -2,\ q = 1$，所以非齐次微分方程为

$$y'' - 2y' + y = x. \qquad ①$$

令特解 $y^* = ax + b$，代入上式，得 $-2a + ax + b = x$，解得 $a = 1, b = 2$，故方程 ① 的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + x + 2$.

由 $y(0) = 2, y'(0) = 0$，得 $C_1 = 0, C_2 = -1$，故 $y = -xe^x + x + 2$，选项 C 正确.

(3)A.

解 由 $y = e^{Cx+x^2}$，有 $\ln y = x^2 + Cx$，即 $\frac{\ln y}{x} - x = C$，两边同时对 x 求导，得

$$\frac{\frac{x}{y} \cdot y' - \ln y}{x^2} - 1 = 0,$$

化简得 $xy' - y\ln y = x^2 y$，选项 A 正确.

(4)B.

解 由 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的解，知 $(\lambda y_1 + \mu y_2)' + P(x)(\lambda y_1 + \mu y_2) = Q(x)$，即

$$\lambda[y_1' + P(x)y_1] + \mu[y_2' + P(x)y_2] = Q(x),$$

即 $(\lambda + \mu)Q(x) = Q(x)\,(Q(x) \neq 0)$，故

$$\lambda + \mu = 1. \qquad ①$$

由 $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是 $y' + P(x)y = 0$ 的解，知 $(\lambda y_1 - \mu y_2)' + P(x)(\lambda y_1 - \mu y_2) = 0$，即

$$\lambda[y_1' + P(x)y_1] - \mu[y_2' + P(x)y_2] = 0,$$

即 $(\lambda - \mu)Q(x) = 0\,(Q(x) \neq 0)$，故

$$\lambda - \mu = 0, \qquad ②$$

解方程 ①、②，得 $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$，故选项 B 正确.

注 设 y_1, y_2 是 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的解，则

① $k_1 y_1 + k_2 y_2$ 是非齐次微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的解 $\Leftrightarrow k_1 + k_2 = 1$；

② $k_1 y_1 + k_2 y_2$ 是对应齐次微分方程 $y' + P(x)y = 0$ 的解 $\Leftrightarrow k_1 + k_2 = 0$.

对于 n 阶线性微分方程，有类似结果.

二、填空题

(1)$x = y\left(y + 2\ln|y| - \frac{1}{y} + C\right)$（$C$ 为任意常数）.

解 原方程不是可分离变量方程，不是线性微分方程，也不是齐次微分方程，需要变形为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - \frac{1}{y}x =$

$\dfrac{(y+1)^2}{y}$，为一阶线性微分方程，通解为

$$x = e^{-\int -\frac{1}{y}dy}\left[\int \frac{(y+1)^2}{y}\cdot e^{-\int \frac{1}{y}dy}dy + C\right]$$
$$= y\left(y + 2\ln|y| - \frac{1}{y} + C\right)\ (C\text{ 为任意常数}).$$

(2) $y = e^x - e^{-x} - \dfrac{1}{2}\sin x$.

解 特征方程为 $r^2 - 1 = 0$，$r = \pm 1$. 又 $\sin x = e^{0x}\cdot\sin x$，$0\pm i$ 不是特征根，故令原方程的特解为 $y^* = a\sin x + b\cos x$，则

$$(y^*)' = a\cos x - b\sin x,\ (y^*)'' = -a\sin x - b\cos x,$$

代入原方程，得

$$-a\sin x - b\cos x - (a\sin x + b\cos x) = \sin x,$$

即 $-2a\sin x - 2b\cos x = \sin x$，比较 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的两边系数，得 $-2a = 1, -2b = 0$，即 $a = -\dfrac{1}{2}, b = 0$，所以原方程的通解为 $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - \dfrac{1}{2}\sin x$.

由 $y(0) = 0, y'(0) = \dfrac{3}{2}$，得 $C_1 + C_2 = 0, C_1 - C_2 = 2$，解得 $C_1 = 1, C_2 = -1$，所以特解为 $y = e^x - e^{-x} - \dfrac{1}{2}\sin x$.

(3) $y^2 = C(x+1) - (x+1)\ln|x+1| - 1$ (C 为任意常数).

解 原方程变形为 $2yy' - \dfrac{1}{1+x}y^2 = -\dfrac{x}{1+x}$. 由 $2yy' = (y^2)'$，令 $u = y^2$，则方程变为 $u' - \dfrac{1}{1+x}u = -\dfrac{x}{1+x}$，为一阶线性微分方程，其通解为

$$y^2 = u = e^{\int \frac{1}{1+x}dx}\left[\int\left(-\frac{x}{1+x}\right)\cdot e^{-\int\frac{1}{1+x}dx}dx + C\right]$$
$$= (1+x)\left[-\int\frac{x}{(1+x)^2}dx + C\right]$$
$$= C(x+1) - (x+1)\ln|x+1| - 1\ (C\text{ 为任意常数}).$$

(4) $\dfrac{1}{2}\ln\left[\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + 1\right] + \arctan\dfrac{y}{x} + \ln x = 0$.

解 已知方程变形为 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1}$，为一阶齐次微分方程.

令 $\dfrac{y}{x} = u$，则 $y = ux$，$\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$，故 $u + x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{u-1}{u+1}$，分离变量得 $\dfrac{u+1}{u^2+1}du = -\dfrac{dx}{x}$，积分得

$$\frac{1}{2}\ln(u^2+1) + \arctan u = -\ln|x| + C.$$

由 $y(1) = 0$，得 $C = 0$，故所求特解为 $\dfrac{1}{2}\ln\left[\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + 1\right] + \arctan\dfrac{y}{x} + \ln x = 0$.

(5) $\tan y = \dfrac{1}{3}\left(1 + x^2 - \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

解 因为$(\tan y)'=y'\sec^2 y$，令$u=\tan y$，则原方程为$u'+\dfrac{x}{1+x^2}u=x$，为一阶线性微分方程，故通解为

$$\tan y=u=e^{-\int\frac{x}{1+x^2}dx}\left(\int x e^{\int\frac{x}{1+x^2}dx}dx+C\right)=\frac{C}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{3}(1+x^2).$$

由$y(0)=0$，得$C=-\dfrac{1}{3}$，故所求特解为$\tan y=\dfrac{1}{3}\left(1+x^2-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

注 这类利用导数去“找变量替换”的方法，值得注意.

(6) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x+\dfrac{1}{2}x\sin x$ (C_1,C_2为任意常数).

解 特征方程为$r^2+1=0$，得$r=\pm i$，故对应齐次微分方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

令$y''+y=x$的特解为$y_1^*=Ax$，则$(y_1^*)'=A$，$(y_1^*)''=0$，故

$$0+Ax=x,\ A=1.$$

令$y''+y=\cos x$的特解为$y_2^*=x(B\cos x+C\sin x)$，代入方程解得$B=0,C=\dfrac{1}{2}$，故其特解为$y_2^*=\dfrac{1}{2}x\sin x$，所以原方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x+\frac{1}{2}x\sin x\ (C_1,C_2\text{为任意常数}).$$

(7) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\cos 2x}{10}$ (C_1,C_2为任意常数).

解 特征方程为$r^2-1=0$，$r=\pm 1$，故对应齐次微分方程的通解为$y=C_1e^x+C_2e^{-x}$. 又非齐次项为

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{-\cos 2x}{2},$$

方程$y''-y=\dfrac{1}{2}$和$y''-y=-\dfrac{\cos 2x}{2}$的特解分别令为

$$y_1^*=A,\ y_2^*=B\cos 2x+C\sin 2x,$$

将其分别代入上两个方程，可求得$A=-\dfrac{1}{2}$，$B=\dfrac{1}{10}$，$C=0$，所以$y_1^*=-\dfrac{1}{2}$和$y_2^*=\dfrac{\cos 2x}{10}$，故原方程的通解为$y=C_1e^x+C_2e^{-x}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\cos 2x}{10}$ (C_1,C_2为任意常数).

(8) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x^2+1)$.

解 将$x=0$代入已知等式，有

$$f(a)=\int_0^a\frac{t(t^2+1)}{f(t)}dt+f(0).$$

上式两边同时对a求导，得$f'(a)=\dfrac{a(a^2+1)}{f(a)}$，故$2f(a)f'(a)=2a+2a^3$. 又因

$$\int 2f(a)f'(a)da=\int(2a+2a^3)da,$$

故$[f(a)]^2=a^2+\dfrac{1}{2}a^4+C$.

由$f(1)=\sqrt{2}$，得$C=\dfrac{1}{2}$，故$f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x^2+1)$(由$f(1)=\sqrt{2}$，知开方取正).

(9) $\dfrac{2a+1}{b^2}$.

解 $y''+2ay'+b^2y=0$ 的特征方程为 $r^2+2ar+b^2=0$,解得

$$r_{1,2}=-a\pm\sqrt{a^2-b^2},$$

故方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}$($C_1,C_2$ 为任意常数).

由 $a>b>0$,知 r_1,r_2 均小于零,故

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to+\infty}(C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x})=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}y'(x)=\lim_{x\to+\infty}(C_1r_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2r_2\mathrm{e}^{r_2x})=0$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\left[-\frac{1}{b^2}y''(x)-\frac{2a}{b^2}y'(x)\right]\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{b^2}y'(x)\Big|_0^{+\infty}-\frac{2a}{b^2}y(x)\Big|_0^{+\infty}\\&=-\frac{1}{b^2}(0-1)-\frac{2a}{b^2}(0-1)=\frac{2a+1}{b^2}.\end{aligned}$$

三、解答题

(1) 解 已知等式中,令 $x=y=0$,得 $f(0)=0$. 由导数的定义,有

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\dfrac{f(x)+f(\Delta x)}{1-f(x)f(\Delta x)}-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)[1+f^2(x)]}{\Delta x[1-f(x)f(\Delta x)]}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\dfrac{f(\Delta x)[1+f^2(x)]}{\Delta x}}{1-f(x)f(\Delta x)}\\&=\lim_{\Delta x\to0}[1+f^2(x)]\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to0}\frac{1}{1-f(x)f(\Delta x)}\\&=[1+f^2(x)]f'(0),\end{aligned}$$

即

$$f'(x)=[1+f^2(x)]f'(0). \qquad ①$$

① 式变形为 $\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}=f'(0)$,两边同时积分,得

$$\arctan f(x)=f'(0)x+C,$$

由 $f(0)=0$,得 $C=0$,故 $\arctan f(x)=f'(0)x$,即 $f(x)=\tan[f'(0)x]$,其中 $f'(0)x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

(2) 解 由 $x=\sin t$,$y=y(t)$ 及复合函数求导法则,有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\cos t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\cos t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\\&=\left(\frac{\sin t}{\cos^2t}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\cos t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)\frac{1}{\cos t}=\frac{1}{\cos^2t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\sin t}{\cos^3t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.\end{aligned}$$

将 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 代入原方程化简为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+y=0, \qquad ①$$

特征方程为 $r^2+1=0$,$r=\pm\mathrm{i}$,故方程 ① 的通解为 $y=C_1\cos t+C_2\sin t$.

由 $x=\sin t\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$，知 $\cos t=\sqrt{1-x^2}$，所以原方程的通解为

$$y=C_1\sqrt{1-x^2}+C_2x\quad (C_1,C_2\text{ 为任意常数}).$$

(3) 解（Ⅰ）由 $t=\mathrm{e}^{-x}$，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+t^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}.$$

代入原微分方程，化简得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+y=t. \qquad ①$$

由 ① 式为二阶常系数线性非齐次微分方程，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+y=0$ 的特征方程为 $r^2+1=0$，得 $r_1=\mathrm{i},r_2=-\mathrm{i}$.

令 ① 式的特解为 $y^*=at+b$，代入方程 ①，得 $a=1,b=0$，故方程 ① 的通解为

$$y=C_1\cos t+C_2\sin t+t.$$

原方程的通解为

$$y=C_1\cos\mathrm{e}^{-x}+C_2\sin\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}\quad (C_1,C_2\text{ 为任意常数}).$$

（Ⅱ）由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(C_1\cos\mathrm{e}^{-x}+C_2\sin\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x})=C_1=1$，

且 $y(0)=\cos 1+C_2\sin 1+1=1$，得 $C_2=-\dfrac{\cos 1}{\sin 1}=-\cot 1$，故

$$y(x)=\cos\mathrm{e}^{-x}-\cot 1\cdot\sin\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}.$$

(4) 解（Ⅰ）由互为反函数的导数关系式，有 $y'(x)=\dfrac{1}{x'(y)}$. 两边同时对 x 求导，得

$$y''(x)=\left[\frac{1}{x'(y)}\right]'\cdot\frac{1}{x'(y)}=-\frac{x''(y)}{[x'(y)]^3}\quad (x'(y)\neq 0),$$

故原方程为 $-\dfrac{x''(y)}{[x'(y)]^3}+(4x+\mathrm{e}^{2y})\dfrac{1}{[x'(y)]^3}=0$，即

$$x''(y)-4x(y)=\mathrm{e}^{2y}. \qquad ①$$

（Ⅱ）方程 ① 为二阶常系数非齐次线性微分方程，特征方程为 $r^2-4=0$，解得

$$r_1=-2,\ r_2=2.$$

又由 e^{2y} 知 $\lambda=2$ 是单特征根，令特解为 $x^*=y\cdot A\cdot\mathrm{e}^{2y}$，代入方程 ①，可求得 $A=\dfrac{1}{4}$，故方程 ① 的通解为 $x(y)=C_1\mathrm{e}^{-2y}+C_2\mathrm{e}^{2y}+\dfrac{1}{4}y\mathrm{e}^{2y}$（$C_1,C_2$ 为任意常数）.

(5) 解 方程的通解为

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y^*(x), \qquad ①$$

其中 $y_1(x),y_2(x)$ 是对应齐次微分方程的两个线性无关的解，$y^*(x)$ 是非齐次微分方程的特解.

若 $y^*(x)=(Ax+B)\mathrm{e}^{2x}$，则 $\lambda=2$ 不是特征根；

若 $y^*(x)=x(Ax+B)\mathrm{e}^{2x}$，则 $\lambda=2$ 是单特征根.

由已知特解 $y=2\mathrm{e}^x+(x^2-1)\mathrm{e}^{2x}=2\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{2x}+x^2\mathrm{e}^{2x}$，应为 ① 式中取定常数所得，从而可知

$$y_1(x)=\mathrm{e}^x,\ y_2(x)=\mathrm{e}^{2x},\ y^*(x)=x^2\mathrm{e}^{2x}.$$

因此 $r=1,r=2$ 为特征根，由根与系数的关系，知 $a=-(1+2)=-3$，$b=1\times 2=2$，所以原方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+x^2\mathrm{e}^{2x}$（$C_1,C_2$ 为任意常数）.

将 $y^*=x^2\mathrm{e}^{2x}$ 代入原方程，可得

$$\mathrm{e}^{2x}(4x^2+8x+2)-3\mathrm{e}^{2x}(2x^2+2x)+2x^2\mathrm{e}^{2x}=(cx+d)\mathrm{e}^{2x},$$

即 $2x+2=cx+d$,得 $c=2,d=2$.

综上可得,$a=-3,b=2,c=2,d=2$.

(6) 解 令 $y'(x)+y(x)=f(x)$,则由一阶线性微分方程的通解公式,得

$$y(x)=e^{-x}\left[\int_{x_0}^{x}e^{t}f(t)dt+C\right],\ \lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_{x_0}^{x}e^{t}f(t)dt+C}{e^{x}}.$$

当 $x\to+\infty$ 时,若 $\int_{x_0}^{x}e^{t}f(t)dt\to\infty$,则由洛必达法则,知

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}f(x)}{e^{x}}=\lim_{x\to+\infty}f(x)=k;$$

当 $x\to+\infty$ 时,若 $\int_{x_0}^{x}e^{t}f(t)dt$ 不趋于 ∞,则必有 $k=0$,故

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\left[\int_{x_0}^{x}e^{t}f(t)dt+C\right]=0=k.$$

(7) 解 由已知,有 $f''(x)=g'(x)=1-f(x)$, $f'(0)=g(0)=1$,故

$$\begin{cases}f''(x)+f(x)=1,\\ f(0)=f'(0)=1,\end{cases}$$

解方程得 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+1$.

由 $f(0)=f'(0)=1$,得 $C_1=0$, $C_2=1$,故 $f(x)=\sin x+1$,所以

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}[g(x)-f(x)]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}[f'(x)-f(x)]dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d[e^{-x}f(x)]=e^{-x}f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2e^{-\frac{\pi}{2}}-1.\end{aligned}$$

(8) 解 已知等式 $f'(x)=1+\int_0^{x}[-6\cos 2t-f(t)]dt$,两边对 x 求导,得

$$f''(x)=-6\cos 2x-f(x),\ 且\ f'(0)=1.$$

解微分方程:

$$\begin{cases}f''(x)+f(x)=-6\cos 2x,\\ f(0)=1,f'(0)=1,\end{cases}\qquad ①$$

由特征方程 $r^2+1=0$,得 $r=\pm i$.

令特解 $f^*=a\cos 2x+b\sin 2x$,代入方程 ①,得

$$(-4a+a)\cos 2x+(-4b+b)\sin 2x=-6\cos 2x,$$

解得 $a=2,b=0$,故方程 ① 的通解为

$$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+2\cos 2x.$$

由 $f(0)=1,f'(0)=1$,得 $C_1=-1,C_2=1$,故

$$f(x)=-\cos x+\sin x+2\cos 2x.$$

于是

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\pi}\left[\frac{f(x)}{x+1}+f'(x)\ln(1+x)\right]dx\\&=\int_0^{\pi}d[f(x)\ln(1+x)]=f(x)\ln(1+x)\Big|_0^{\pi}=3\ln(1+\pi).\end{aligned}$$

(9) 解

$$\int_0^{1}y(xu)du\xlongequal{xu=t}\int_0^{x}y(t)\frac{1}{x}dt=\frac{1}{x}\int_0^{x}y(t)dt,$$

故原方程化为

$$y'(x)+3\int_0^{x}y'(t)dt+2\int_0^{x}y(t)dt+e^{-x}=0,\qquad ①$$

方程 ① 两边同时对 x 求导，得

$$y''(x)+3y'(x)+2y(x)=\mathrm{e}^{-x}, \tag{②}$$

且 $y(0)=1$，$y'(0)=-1$，特征方程为 $r^2+3r+2=0$，得 $r_1=-1$，$r_2=-2$，令特解 $y^*=Ax\mathrm{e}^{-x}$，代入方程 ② 可得 $A=1$，故方程 ② 的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}+x\mathrm{e}^{-x}.$$

又由 $y(0)=1, y'(0)=-1$，得 $C_1=0, C_2=1$，故 $y=y(x)=\mathrm{e}^{-2x}+x\mathrm{e}^{-x}$.

(10) **解** 已知方程两边同时对 x 求导，得

$$f'(x)=f(1-x), \tag{①}$$

两边再同时对 x 求导，得

$$f''(x)=-f'(1-x). \tag{②}$$

由方程 ① 得 $f'(1-x)=f[1-(1-x)]=f(x)$，代入方程 ② 得 $f''(x)=-f(x)$.

由原方程，有 $f(0)=1$，在方程 ① 中令 $x=0$，得 $f'(0)=f(1)$. 解初值问题：

$$\begin{cases} f''(x)+f(x)=0, \\ f(0)=1, f'(0)=f(1), \end{cases}$$

可得通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$.

由 $f(0)=1$，得 $C_1=1$，即 $f(x)=\cos x+C_2\sin x$，故 $f'(x)=-\sin x+C_2\cos x$.

再由 $f'(0)=f(1)$，得 $C_2=\dfrac{\cos 1}{1-\sin 1}$，故 $f(x)=\cos x+\dfrac{\cos 1}{1-\sin 1}\sin x$.

(11) **证** (Ⅰ) 由 $f(xy)=yf(x)+xf(y)$，令 $y=1$，得 $f(1)=0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，有

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left[x\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)\right]-f(x)}{\Delta x} \\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)f(x)+xf\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)-f(x)}{\Delta x} \\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x}+\frac{f\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)-f(1)}{\dfrac{\Delta x}{x}}\right] \\ &=\frac{f(x)}{x}+f'(1)=\frac{f(x)}{x}+1, \end{aligned}$$

从而 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，且 $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x}+1$.

解 (Ⅱ) 由(Ⅰ)可知，解初值问题：$\begin{cases} f'(x)-\dfrac{1}{x}f(x)=1, \\ f(1)=0, f'(1)=1, \end{cases}$ 解得 $f(x)=x\ln x$.

由 $f'(x_0)=\ln x_0+1=0$，得唯一驻点 $x_0=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内只取极大值或极小值，且仅在 x_0 处取得. 又因为 $f''\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{e}>0$，所以在点 $x_0=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 处 $f(x)$ 取极小值，且极小值为 $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，无极大值.

(12) **解** (Ⅰ) 由已知，$f'(x)-\dfrac{1}{x}f(x)=x\cos x\ (x>0)$，解一阶线性微分方程，有

$$f(x)=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int x\cos x\cdot \mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=x\left(\int x\cos x\cdot x^{-1}\mathrm{d}x+C\right)$$
$$=x(\sin x+C).$$

由 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x(\sin x+C)}{x}=C=0$,知 $f(x)=x\sin x$.

(Ⅱ)依题设,有

$$A_n=\int_0^{n\pi}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_0^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x,$$
$$\int_0^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x\xlongequal{x=n\pi-t}\int_0^{n\pi}(n\pi-t)|\sin t|\mathrm{d}t$$
$$=n\pi\int_0^{n\pi}|\sin t|\mathrm{d}t-\int_0^{n\pi}t|\sin t|\mathrm{d}t$$
$$=n\pi\int_0^{n\pi}|\sin x|\mathrm{d}x-\int_0^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x,$$

移项,得 $\int_0^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x=\dfrac{n\pi}{2}\int_0^{n\pi}|\sin x|\mathrm{d}x$.

因 $|\sin x|$ 以 π 为周期,所以

$$\int_0^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x=\frac{n\pi}{2}\cdot n\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=n^2\pi,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_n}{(n+1)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\pi}{(n+1)^2}=\pi$.

(13) 解 由已知,有 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y^2}{x}+xf\left(\dfrac{y}{x}\right),\dfrac{\partial u}{\partial y}=y-xf'\left(\dfrac{y}{x}\right)$,故

$$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\frac{2y}{x}+f'\left(\frac{y}{x}\right),\ \frac{\partial^2u}{\partial y\partial x}=\frac{y}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right)-f'\left(\frac{y}{x}\right).$$

由已知,$u(x,y)$ 有二阶连续偏导数,故

$$\frac{2y}{x}+f'\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{y}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right)-f'\left(\frac{y}{x}\right).$$

令 $\dfrac{y}{x}=t$,当 $t=0$ 时,$f'(t)=0$;当 $t\neq0$ 时,$f''(t)-\dfrac{2}{t}f'(t)=2$,为可降阶微分方程.

令 $f'(t)=p$,则 $p'-\dfrac{2}{t}p=2$,解得

$$p=\mathrm{e}^{\int\frac{2}{t}\mathrm{d}t}\left(\int2\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{t}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C_1\right)=C_1t^2-2t.$$

由 $f'(1)=p(1)=1$,得 $C_1=3$,故

$$f(t)=\int(3t^2-2t)\mathrm{d}t=t^3-t^2+C_2.$$

由 $f(1)=1$,得 $C_2=1$,所以 $f(t)=t^3-t^2+1(t\neq0)$.

综上所述,有 $f(t)=t^3-t^2+1$.

令 $f'(t)=3t^2-2t=0$,得 $t=0,t=\dfrac{2}{3}$. 由 $f''(t)=6t-2$,知

$$f''(0)=-2<0,\ f''\left(\frac{2}{3}\right)=2>0,$$

故 $f(0)=1$ 为极大值,$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{23}{27}$ 为极小值.

(14) 解 由 $g(x,y)=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$,有

$$\frac{\partial g}{\partial x}=f'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right),\frac{\partial g}{\partial y}=f'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=f''\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{y^2}{x^4}+\frac{2y}{x^3}f'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=f''\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=f''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x^2}.$$

$$x^3\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+x^2y\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+xy^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=y$$

变形为

$$x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{y}{x}. \qquad ①$$

将$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2},\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$代入 ① 式化简得

$$\frac{y^2}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{y}{x}.$$

令$\frac{y}{x}=t$,得 $t^2f''(t)+tf'(t)=t$. 即 $f''(t)+\frac{1}{t}f'(t)=\frac{1}{t}$ 为可降阶微分方程.

令 $p=f'(t)$,有 $p'+\frac{1}{t}p=\frac{1}{t}$,解一阶线性微分方程

$$p=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{t}\mathrm{d}t}\left(\int\frac{1}{t}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{t}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C_1\right)=\frac{1}{t}(t+C_1)=1+\frac{C_1}{t}.$$

由$\frac{\partial g}{\partial y}=f'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x},\frac{\partial g}{\partial y}\bigg|_{(y,y)}=f'(1)\frac{1}{y}=\frac{2}{y}$,得 $f'(1)=2$,故 $C_1=1,p=1+\frac{1}{t}$,即 $f'(t)=1+\frac{1}{t}$,积分得

$$f(t)=t+\ln t+C_2.$$

由 $g(y,y)=1$,得 $f(1)=1,C_2=0$,故

$$f(t)=t+\ln t.$$

(15) **解** (Ⅰ) 由题意可知 $f'(x)+\frac{2nx}{1+x^2}f(x)=0$,将其变形为

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{2nx}{1+x^2}.$$

上式两边同时积分,得

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=-n\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

故 $\ln f(x)=-n\ln(1+x^2)+\ln \mathrm{e}^{C_1}$,即 $f(x)=C(1+x^2)^{-n}$ $\left(C=\mathrm{e}^{C_1}\right)$.

由 $f(0)=1$,得 $C=1$,故 $f(x)=\frac{1}{(1+x^2)^n}$.

(Ⅱ) 依题意,有

$$\begin{aligned}S_n&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}=2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}\\&=2\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x=S_{n-1}-\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}(x^2+1)}{(1+x^2)^n}\\&=S_{n-1}-\left\{\frac{x}{(1+x^2)^n}(x^2+1)\bigg|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}(x^2+1)\left[\frac{x}{(1+x^2)^n}\right]'\mathrm{d}x\right\}\end{aligned}$$

$$=S_{n-1}+\int_0^{+\infty}(x^2+1)\frac{1\cdot(1+x^2)^n-x\cdot n(1+x^2)^{n-1}\cdot 2x}{(1+x^2)^{2n}}\mathrm{d}x$$

$$=S_{n-1}+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n-1}}-2n\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x$$

$$=S_{n-1}+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n-1}}-2n\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x$$

$$=S_{n-1}+\frac{1}{2}S_{n-1}-nS_{n-1}+nS_n,$$

即$S_n=S_{n-1}+\frac{1}{2}S_{n-1}-nS_{n-1}+nS_n$,所以有

$$\frac{S_n}{S_{n-1}}=\frac{\frac{3}{2}-n}{1-n}=\frac{2n-3}{2n-2}.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-3}{2n-2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{2n-2}\right)^{-(2n-2)}\right]^{\frac{n}{-(2n-2)}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

(16) 解 如图 6-1 所示,D 关于直线 $y=x$ 对称,则

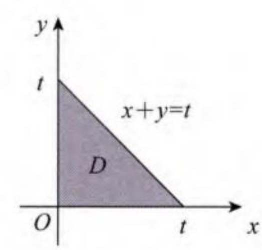


图 6-1

$$\iint_D[f(x+y)+(x-y)^3]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D f(x+y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_D(x-y)^3\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$$\iint_D(x-y)^3\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D[(x-y)^3+(y-x)^3]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,$$

$$\iint_D f(x+y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^t\mathrm{d}x\int_0^{t-x}f(x+y)\mathrm{d}y\xlongequal{x+y=u}\int_0^t\mathrm{d}x\int_x^t f(u)\mathrm{d}u$$

$$\xlongequal[\text{顺序}]{\text{交换积分}}\int_0^t\mathrm{d}u\int_0^u f(u)\mathrm{d}x=\int_0^t uf(u)\mathrm{d}u,$$

$$\iint_D f''(x+y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^t\mathrm{d}x\int_0^{t-x}f''(x+y)\mathrm{d}y\xlongequal{x+y=u}\int_0^t\mathrm{d}x\int_x^t f''(u)\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^t[f'(t)-f'(x)]\,\mathrm{d}x=tf'(t)-\int_0^t f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=tf'(t)-[f(t)-f(0)],$$

故

$$tf'(t)-[f(t)-f(0)]=\int_0^t uf(u)\mathrm{d}u.$$

上式两边同时对 t 求导,得 $f''(t)-f(t)=0$,解微分方程,得 $f(t)=C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^t$.

由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数,知

$$\lim_{x\to0^+}(C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^x)=C_1+C_2=1,$$

$$\lim_{x\to0^+}f'(x)=\lim_{x\to0^+}(-C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^x)=-C_1+C_2=1.$$

故 $C_1=0,C_2=1,f(x)=\mathrm{e}^x$.

(17) 解 (Ⅰ) $f'(x)+f(x)=\mathrm{e}^{-x}$ 的通解为

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\left(\int\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-x}(x+C).$$

由 $f(0)=0$,得 $C=0$,故 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}$.

由 $f'(x)=\mathrm{e}^{-x}(1-x)$,$f''(x)=-\mathrm{e}^{-x}(2-x)$,得 $x=1$ 为 $f(x)$ 的唯一驻点,且

$$f''(1)=-\mathrm{e}^{-1}<0,\ f(1)=\frac{1}{\mathrm{e}}\text{ 为极大值.}$$

由 $f''(x)=0$,得 $x=2$. 当 $x<2$ 时,$f''(x)<0$;当 $x>2$ 时,$f''(x)>0$,故 $(2,2\mathrm{e}^{-2})$ 为拐点.

(Ⅱ) 由 $f(x_1)=f(x_2)$,知 $x_1\mathrm{e}^{-x_1}=x_2\mathrm{e}^{-x_2}$,即有

$$\frac{x_2}{x_1}=\mathrm{e}^{x_2-x_1},\ x_2-x_1=\ln\frac{x_2}{x_1},\ \frac{x_2-x_1}{\ln\frac{x_2}{x_1}}=1.$$

要证 $x_1+x_2>2$,只需证 $x_1+x_2>\dfrac{2(x_2-x_1)}{\ln\frac{x_2}{x_1}}$,即证

$$\ln\frac{x_2}{x_1}>\frac{2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}=\frac{2\left(\frac{x_2}{x_1}-1\right)}{1+\frac{x_2}{x_1}}.$$

令 $\dfrac{x_2}{x_1}=t$,则 $t>1$.

令 $g(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}$,则 $g'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$,所以 $g(t)$ 单调递增,从而 $g(t)>g(1)=0$,故 $x_1+x_2>2$.

(18) 解 依题设,凸曲线 $y=y(x)$,$y'(x)>0$,过 M 作 x 轴的垂线 MP,如图 6-2 所示,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{|MP|}{|NP|},\ |MP|=y,\ |NP|=\sqrt{x^2+y^2}+x$$

故 $y(x)$ 满足的微分方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}},\\ y(0)=1,\end{cases}$$

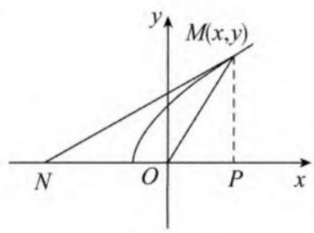


图 6-2

变形为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}=\frac{x}{y}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}.$$

令 $\dfrac{x}{y}=u$,代入上式,得 $u+y\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=u+\sqrt{1+u^2}$,即 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$,两边积分,得

$$\ln(u+\sqrt{1+u^2})=\ln y+C_1,$$

故 $u+\sqrt{1+u^2}=C_2y\ (C_2=\mathrm{e}^{C_1}>0)$,将 $\dfrac{x}{y}=u$ 代入并化简,得 $1=C_2^2y^2-2C_2x$,由 $y(0)=1$,得 $C_2=1$.

所求 $y(x)=\sqrt{1+2x}\ \left(x>-\dfrac{1}{2}\right)$.

(19) 解 由已知,$y''<0$,于是曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},$$

化简得 $y''=-(1+y'^2)$.

由已知,$y(0)=1$,$y'(0)=1$,令 $y'=p$,$y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$,代入上方程,得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{1+p^2}=-\mathrm{d}x$,积分,得 $p=$

$\tan(C_1-x)$,由 $y'(0)=1$,得 $C_1=\frac{\pi}{4}$,故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\ \left(-\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}\right),$$

积分得,$y=\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|+C_2$,再由 $y(0)=1$,得 $C_2=1+\frac{1}{2}\ln 2$,故所求曲线为

$$y=\ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]+1+\frac{1}{2}\ln 2,\ -\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}.$$

(20) 解 依题设,知 $y(x)>0,y''(x)>0,y(0)=2,y'(0)=0$,且

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{y}(1+y'^2)}.$$

上式化简为

$$\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2y}}.\qquad ①$$

该式为可降阶微分方程.令 $y'=p$,则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,代入①式,得

$$\frac{p\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{2y}}.\qquad ②$$

②式两边同时积分,得 $\sqrt{1+p^2}=\sqrt{\frac{y}{2}}+C_1$.由 $y(0)=2,y'(0)=0$,得 $C_1=0$,故

$$\sqrt{1+p^2}=\sqrt{\frac{y}{2}},$$

解得 $y'=p=\pm\sqrt{\frac{y-2}{2}}$.由 $y''(x)>0$ 知,当 $x>0$ 时,$y'(x)>y'(0)=0$,故 $y'=\sqrt{\frac{y-2}{2}}$.对其变形后的表达式$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\frac{y-2}{2}}}=\mathrm{d}x$ 两边积分,得

$$2\sqrt{y-2}=\frac{x}{\sqrt{2}}+C_2.$$

由 $y(0)=2$,得 $C_2=0$,故

$$2\sqrt{y-2}=\frac{x}{\sqrt{2}},\ 即\ y=2+\frac{x^2}{8}.$$

所求旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_0^2(2-x)\cdot y(x)\mathrm{d}x=2\pi\int_0^2(2-x)\left(2+\frac{x^2}{8}\right)\mathrm{d}x=\frac{25}{3}\pi.$$

(21) 证 (Ⅰ)$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a(t)x=0$ 的通解可表示为 $x(t)=C\mathrm{e}^{-\int_0^t a(s)\mathrm{d}s}$,当且仅当$\int_0^{+\infty}a(t)\mathrm{d}t$ 发散时,

$$-\int_0^t a(s)\mathrm{d}s\to-\infty\ (t\to+\infty),$$

故有 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$.

(Ⅱ)该方程的通解为

$$x(t)=\mathrm{e}^{-at}\left[C+\int_0^t\mathrm{e}^{as}f(s)\mathrm{d}s\right]\ (t>0),$$

满足 $x(0)=x_0$ 的解为 $x_0(t)=\mathrm{e}^{-at}\left[x_0+\int_0^t\mathrm{e}^{as}f(s)\mathrm{d}s\right](t>0)$.

当 $t\in[0,+\infty)$ 时，由已知，设 $|f(t)|\leqslant M(M>0)$，则可得

$$|x_0(t)|\leqslant|x_0|+\left|\int_0^t e^{-a(t-s)}f(s)ds\right|\leqslant|x_0|+M\left|\int_0^t e^{-a(t-s)}ds\right|\leqslant|x_0|+\frac{M}{a}.$$

(22) 解 由曲率公式及 $y''(x)>0$，知 $K=\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$. 又 α 为切线的倾角，所以

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\ (\cos\alpha>0).$$

由已知条件，得

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2y^2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}}=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^2},$$

化简得

$$2y^2y''=(1+y'^2)^2. \qquad ①$$

又 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 处取得极小值，知 $y(1)=1,y'(1)=0$. 方程 ① 为不显含 x 的可降阶方程，令 $y'=p$，则 $y''=p\cdot\dfrac{dp}{dy}$，代入方程 ① 得 $2y^2p\cdot\dfrac{dp}{dy}=(1+p^2)^2$，分离变量，得 $\dfrac{2p\,dp}{(1+p^2)^2}=\dfrac{dy}{y^2}$，积分得 $y=(p^2+1)(1+yC_1)$.

由 $y(1)=1,y'(1)=0$，得 $C_1=0$，故 $y=p^2+1$，即 $\dfrac{dy}{dx}=\pm\sqrt{y-1}$，分离变量，得 $\dfrac{dy}{\pm\sqrt{y-1}}=dx$（由 $y''(x)>0$，知 $y\neq1$），积分得 $\pm2\sqrt{y-1}=x+C_2$，由 $y(1)=1$，得 $C_2=-1$，故 $\pm2\sqrt{y-1}=x-1$，即 $y=1+\dfrac{1}{4}(x-1)^2$.

(23) 解 $y=y(x)$ 在点 $P(x,y)$ 处的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，它与 x 轴的交点为 $\left(x-\dfrac{y}{y'},0\right)$. 由 $y(0)=1,y'(x)>0$，知 $y(x)>y(0)=1>0(x>0)$，于是

$$S_1=\frac{1}{2}|y|\left|x-\left(x-\frac{y}{y'}\right)\right|=\frac{y^2}{2y'},\ S_2=\int_0^x y(t)dt.$$

由 $2S_1-S_2=1$，得 $\dfrac{y^2}{y'}-\int_0^x y(t)dt=1$. 由此知，$y'(0)=1$，上式两边同时对 x 求导并化简，得 $yy''=y'^2$. 令 $y'=p,y''=p\dfrac{dp}{dy}$，则方程为 $py\dfrac{dp}{dy}=p^2$.

由 $y'>0$，即 $p>0$，故 $\dfrac{dp}{p}=\dfrac{dy}{y}$，积分得 $p=C_1y$，由 $y=1,p=1$，得 $C_1=1$，即 $\dfrac{dy}{dx}=y$，于是 $y=C_2e^x$，再由 $y(0)=1$，得 $C_2=1$，所求曲线为 $y=e^x$.

(24) 解 依题设，有

$$|PM|=y(x),\ \frac{|PM|}{|TP|}=y'(x)\quad(x>0,y>0),$$

故 $|TP|=\dfrac{y(x)}{y'(x)}$. 由已知，有

$$k=\frac{S_{\triangle PMT}}{S_{\text{曲边三角形}OPM}}=\frac{\dfrac{1}{2}|PM|\cdot|TP|}{\int_0^x y(t)dt},$$

即$\dfrac{y^2}{y'}=2k\int_0^x y(t)\mathrm{d}t$. 该式两边对 x 求导,得

$$\frac{y'\cdot 2yy'-y^2y''}{y'^2}=2ky,$$

即

$$yy''+2(k-1)y'^2=0. \qquad ①$$

方程 ① 为可降阶的微分方程. 令 $y'=p,y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,代入方程 ①,得

$$y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=2(1-k)p.$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=2(1-k)\frac{\mathrm{d}y}{y},$$

积分得

$$p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C_1y^{2(1-k)}\quad(C_1>0),$$

变形为

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^{2(1-k)}}=C_1\mathrm{d}x,$$

积分得

$$\frac{1}{2k-1}y^{2k-1}=C_1x+C_2\quad(C_1>0,C_2\text{ 为任意常数}).$$

由 $y(0)=0$,得 $C_2=0$,则 $y^{2k-1}=(2k-1)C_1x$,即

$$y=[(2k-1)C_1]^{\frac{1}{2k-1}}\cdot x^{\frac{1}{2k-1}}.$$

令 $C=[(2k-1)C_1]^{\frac{1}{2k-1}}$,因 $k>\dfrac{1}{2}$,$C_1>0$,所以 $C>0$.

故所求曲线方程为

$$y=y(x)=C\cdot x^{\frac{1}{2k-1}}\quad(C\text{ 为任意正常数}).$$

(25) 解 (Ⅰ) 由 $y=y(x)$ 在点$(0,1)$处有水平切线,知 $y(0)=1,y'(0)=0$.

由已知,$y''(x)>0$,从而当 $x>0$ 时,$y'(x)>y'(0)=0$. 依题设,

$$\int_0^x\sqrt{1+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t=y'(x). \qquad ①$$

① 式两边同时对 x 求导,得 $\sqrt{1+y'^2(x)}=y''(x)$,即 $1+y'^2=(y'')^2$. 其为不显含 y 的可降阶方程.

令 $y'=p,y''=p'=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$,则$1+p^2=\left(\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)^2$,即$\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+p^2}$. 该式分离变量后两边积分,有$\int\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}\mathrm{d}p$,可解得

$$\begin{aligned}x&=\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)+\ln\mathrm{e}^{C_1'}=\ln\mathrm{e}^{C_1'}\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)\\&=\ln C_1\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)\quad\left(C_1=\mathrm{e}^{C_1'}>0\right).\end{aligned}$$

解得

$$p+\sqrt{1+p^2}=C_2\mathrm{e}^x\quad\left(C_2=\frac{1}{C_1}\right). \qquad ②$$

② 式变形,得

$$\sqrt{1+p^2}-p=\frac{1}{C_2}e^{-x}. \tag{③}$$

②－③,得

$$y'=p=\frac{1}{2}\left(C_2e^x-\frac{1}{C_2}e^{-x}\right).$$

由 $y'(0)=0$,得 $C_2=1,-1$(负根舍去),故

$$y'=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right).$$

上式两边积分,可得 $y=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)+C_3$.

由 $y(0)=1$,得 $C_3=0$,所求函数为 $y=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)中的 ① 式知,所求弧长为

$$\begin{aligned}s&=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\sqrt{1+y'^2}\,dx=y'(x)\Big|_{x=\ln 3}-y'(x)\Big|_{x=\ln 2}\\&=\frac{1}{2}\left(e^{\ln 3}-e^{-\ln 3}\right)-\frac{1}{2}\left(e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\left(3-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\times\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{12}.\end{aligned}$$

(26) 解 由牛顿第二定律,$F_{阻}=ma$,故由已知条件,有 $-kv=m\frac{dv}{dt}$. 又

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\cdot\frac{dv}{dx}\ (x\text{ 表示位移}),$$

故 $-kv=m\cdot v\frac{dv}{dx}$,即 $dv=-\frac{k}{m}dx$,积分得

$$v=v_0-\frac{k}{m}x, \tag{①}$$

故

$$k=\frac{m(v_0-v)}{x}. \tag{②}$$

将 $m=4\ 500$ kg,$v_0=600$ km/h,$v=100$ km/h,$x=0.5$ km 代入 ② 式,可得 $k=4.5\times10^6$ kg/h. 将数值代入 ① 式有 $v=600-\frac{4.5\times10^6}{4\ 500}x$,令 $v=0$,解得 $x=0.6$ km,即跑道至少应为 600 m.

(27) 解 $v=\frac{dx}{dt},\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=a$ (加速度). 由牛顿第二定律,知 $F=ma$,故

$$1\cdot\frac{dv}{dt}=-2\sin 2x.$$

又 $\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$,故

$$v\frac{dv}{dx}=-2\sin 2x,$$

即 $v\,dv=-2\sin 2x\,dx$,两边同时对 x 积分,得

$$\frac{1}{2}v^2=\cos 2x+C_1.$$

由 $v(0)=2$,即当 $t=0$ 时,$x=0,v=2$,得 $C_1=1$,从而有

$$v^2=2(\cos 2x+1),$$

解得 $v=2\cos x$. 故$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2\cos x$,即$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\int\mathrm{d}t$,解得

$$\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|=t+C_2.$$

由已知 $x(0)=0$,解得 $C_2=0$,故 $\ln|\sec x+\tan x|=2t$,即位移 $x=x(t)$ 满足

$$\ln|\sec x+\tan x|=2t.$$

质点运动的最远距离即速度 $v=0$ 时 x 的值.

在$v^2=2(\cos 2x+1)$ 中,令 $v=0$,解得 $\cos 2x=-1$,故 $x=\dfrac{1}{2}\arccos(-1)=\dfrac{\pi}{2}$.

注 计算$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{2\cos x}$ 也可以用以下方法.

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{2\cos x}&=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}\\&=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}\\&=\frac{1}{4}\int\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}\\&=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}\mathrm{d}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right]+C,\end{aligned}$$

故$\dfrac{1}{2}\ln\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)\right]=t+C_2$. 由 $x(0)=0$,得 $C_2=0$,故 $\ln\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)\right]=2t$,解得

$$x=2\left(\arctan\mathrm{e}^{2t}-\frac{\pi}{4}\right).$$

质点运动的最远距离为$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}2\left(\arctan\mathrm{e}^{2t}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

拓展题

解答题

(1) **解** 依题意,设该物体温度为 $T(t)$,则$\dfrac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}=-k[T(t)-20](k>0)$,即

$$\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}+kT(t)=20k.$$

解一阶线性微分方程,得通解为 $T(t)=20+C\mathrm{e}^{-kt}$.

由初始条件 $T(0)=100$,得 $C=80$,故 $T(t)=20+80\mathrm{e}^{-kt}$.

又由 $T(10)=20+80\mathrm{e}^{-10k}=60$,解得 $k=\dfrac{1}{10}\ln 2$,故 $T(t)=20+80\cdot 2^{-0.1t}$.

由 $T(t)=25$，即 $2^{-0.1t}=\dfrac{1}{16}$，解得 $t=40$，故物体从 100 ℃ 降到 25 ℃ 需要 40 s.

(2) 解 （Ⅰ）由于积分区域 $x^2+y^2\leqslant 4t^2$ 关于直线 $y=x$ 对称，故

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2}(x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2}(x^2-y^2+y^2-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

从而
$$f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2t}f\left(\frac{1}{2}r\right)r\mathrm{d}r=\mathrm{e}^{4\pi t^2}+2\pi\int_0^{2t}f\left(\frac{1}{2}r\right)r\mathrm{d}r. \qquad ①$$

① 式两边同时对 t 求导，得

$$f'(t)=8\pi t\mathrm{e}^{4\pi t^2}+8\pi tf(t), \qquad ②$$

且由 ① 式知 $f(0)=1$. 又解 ② 式，得 $f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}(4\pi t^2+C)$，由 $f(0)=1$，得 $C=1$，故

$$f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}(4\pi t^2+1),\ t\in[0,+\infty).$$

（Ⅱ）由（Ⅰ）有，

$$\lim_{t\to0^+}[f(t)]^{\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to0^+}[\mathrm{e}^{4\pi t^2}(4\pi t^2+1)]^{\frac{1}{t^2}}$$
$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{t^2}\ln[\mathrm{e}^{4\pi t^2}\cdot(4\pi t^2+1)]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{4\pi t^2+\ln(4\pi t^2+1)}{t^2}},$$

而 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{4\pi t^2+\ln(4\pi t^2+1)}{t^2}=4\pi+\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{4\pi t^2}{t^2}=4\pi+4\pi=8\pi$，故 $\lim\limits_{t\to0^+}[f(t)]^{\frac{1}{t^2}}=\mathrm{e}^{8\pi}$.

(3) 解 由 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}f(t-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t rf(t-r)\mathrm{d}r=2\pi\int_0^t rf(t-r)\mathrm{d}r$ 有

$$f(t)=\int_0^t rf(t-r)\mathrm{d}r+t. \qquad ①$$

又

$$\int_0^t rf(t-r)\mathrm{d}r\xlongequal{t-r=u}\int_t^0(t-u)f(u)\mathrm{d}(-u)=t\int_0^t f(u)\mathrm{d}u-\int_0^t uf(u)\mathrm{d}u,$$

得

$$f(t)=t\int_0^t f(u)\mathrm{d}u-\int_0^t uf(u)\mathrm{d}u+t.$$

上式两边同时对 t 求导，得

$$f'(t)=\int_0^t f(u)\mathrm{d}u+1. \qquad ②$$

② 式两边同时对 t 求导(等号右端可导，故左端 $f'(t)$ 可导)，得 $f''(t)-f(t)=0$. 解此微分方程，得

$$f(t)=C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{t}.$$

由 ① 式知 $f(0)=0$，由 ② 式知 $f'_+(0)=1$，故

$$C_1+C_2=0,\ -C_1+C_2=1,\ 解得\ C_1=-\frac{1}{2},\ C_2=\frac{1}{2}.$$

所以 $f(t)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t})$.

(4) 解 将 $y_2=xu(x)$ 代入原方程，得

$$xu-x(u+xu')+(u'+u'+xu'')x^2\ln x=0,$$

即 $x^3u''\ln x+x^2(2\ln x-1)u'=0$，故 $xu''\ln x+(2\ln x-1)u'=0$ 为可降阶方程，令 $u'=p$，则

$$xp'\ln x+(2\ln x-1)p=0,$$

分离变量,得$\int \frac{\mathrm{d}p}{p}=\int \frac{1-2\ln x}{x\ln x}\mathrm{d}x$,$\ln|p|=\int \frac{1-2\ln x}{\ln x}\mathrm{d}(\ln x)$. 令 $\ln x=t$,

$$\int \frac{1-2\ln x}{\ln x}\mathrm{d}(\ln x)=\int \frac{1-2t}{t}\mathrm{d}t=\ln|t|-2t+C_1',$$

故 $\ln|p|=\ln|t|-2t+C_1'$,解得 $p=C_1te^{-2t}\left(C_1=\pm e^{C_1'}\right)$,即 $p=C_1\frac{\ln x}{x^2}$. 又 $u'=p=C_1\frac{\ln x}{x^2}$,故

$$u=\int C_1\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=-C_1\int \ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-C\left(\frac{\ln x}{x}-\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\right),$$

即 $u=-C\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+C_2\right)$.

由 $u(1)=1,u(e^{-1})=0$,得$\begin{cases}-C_1(1+C_2)=1,\\-C_1C_2=0,\end{cases}$解得 $C_1=-1,C_2=0$,所以

$$u(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x},$$

故 $y_1=x,y_2=xu(x)=\ln x+1$ 为原方程两个线性无关的解,该方程的通解为

$$y=k_1x+k_2(\ln x+1)\ (k_1,k_2\text{ 为任意常数}).$$

(5) 解 如图6-3所示,设导弹在 $t(t\geqslant 0)$ 时刻的位置为 $P(x(t),y(t))$,则飞机的位置为 $Q(0,vt)$,则 $y=y(x)$ 在点 P 处的切线的斜率为

$$y'(x)=\frac{vt-y}{0-x},$$

即

$$vt=y-xy'. \quad ①$$

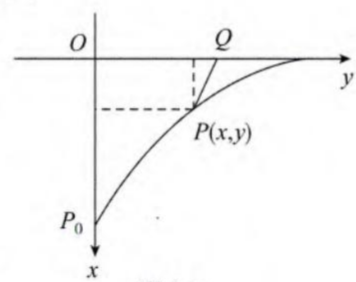


图6-3

弧长$\overset{\frown}{P_0P}$ 为

$$-\int_{16}^{x}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=2vt. \quad ②$$

将①式代入②式,可得

$$-\int_{16}^{x}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=2(y-xy').$$

上式两边对 x 求导得

$$2xy''=\sqrt{1+y'^2}$$

令 $y'=P$,则 $y''=P'$,可得 $2xP'=\sqrt{1+P^2}$,分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}P}{\sqrt{1+P^2}}=\frac{\mathrm{d}x}{2x},$$

两边同时积分,得 $\ln(P+\sqrt{1+P^2})=\ln\left(C_1x^{\frac{1}{2}}\right)$,即 $P+\sqrt{1+P^2}=C_1x^{\frac{1}{2}}$.

由 $P(16)=y'(16)=0$ (因在 P_0 处方向指向 $O(0,0)$) 可得 $C_1=\frac{1}{4}$,故

$$P+\sqrt{1+P^2}=\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}, \quad ③$$

对③式有理化,得

$$P-\sqrt{1+P^2}=-4x^{-\frac{1}{2}}. \quad ④$$

由③+④可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P=\frac{1}{8}x^{\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}},$$

所以
$$y=\int\left(\frac{1}{8}x^{\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{12}x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}+C_2.$$

由 $y(16)=0$，解得 $C_2=\dfrac{32}{3}$. 所求轨迹为

$$y=\frac{1}{12}x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}+\frac{32}{3}.$$

（Ⅱ）由 $y=\dfrac{1}{12}x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}+\dfrac{32}{3}$，取 $x=0$，得 $y=\dfrac{32}{3}$. 所以，飞机被击中的位置为 $\left(0,\dfrac{32}{3}\right)$.

由 $\dfrac{32}{3}=vt$，知所需时间 $T=\dfrac{32}{3v}$.

线性代数

第七章 行列式

基础题

一、选择题

(1)A.

解 设元素 a_{ij} 的代数余子式为 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,则

$$\begin{aligned}
&M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}\\
=&-(-1)^{4+1}M_{41}+(-1)^{4+2}M_{42}+[-(-1)^{4+3}]M_{43}+(-1)^{4+4}M_{44}\\
=&-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}\\
=&\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}=7\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\-1&-1&1\end{vmatrix}=-28,
\end{aligned}$$

故原式 $=-28$. 选项 A 正确.

注 $D=|a_{ij}|_{n\times n}$ 中,a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 仅与 a_{ij} 的位置有关,而与 a_{ij} 的取值无关,即改变 D 中 a_{ij} 的值,A_{ij} 不改变.

(2)C.

解 利用行列式的性质,有

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|&=|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2|\\
&=-|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|-|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2|\\
&=-a+|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=-a+b=b-a,
\end{aligned}$$

故选项 C 正确.

(3)D.

解 矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1,4\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_3)$,故

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|&=|\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1,4\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_3|\\
&=16(|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|+|\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|)\\
&=16\left(|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|+\frac{1}{3}|\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\right)\\
&=16\times\left(1+\frac{1}{3}\times 3\right)=16\times 2=32,
\end{aligned}$$

故选项 D 正确.

(4)A.

解 由 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{3-1}=|\boldsymbol{A}|^2$, $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|k\boldsymbol{A}^*|=k^3|\boldsymbol{A}^*|$, $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$,

可知 $|\boldsymbol{A}|=k^3|\boldsymbol{A}|^2$,故 $|\boldsymbol{A}|(k^3|\boldsymbol{A}|-1)=0$,于是有 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{k^3}$. 又 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^*$,即 $a_{ji}=kA_{ji}$,故

$$|\boldsymbol{A}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=\frac{1}{k}(a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2)=\frac{3c^2}{k}\neq 0,$$

于是$\dfrac{3c^2}{k}=\dfrac{1}{k^3}$，$c=\sqrt{\dfrac{1}{3k^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3k}$. 选项 A 正确.

注 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

二、填空题

(1) $k^2(k^2-4)$.

解 将第 2,3,4 行加到第 1 行，提取 k，再利用行列式的性质，有

$$\begin{vmatrix} k & 0 & -1 & 1 \\ 0 & k & 1 & -1 \\ -1 & 1 & k & 0 \\ 1 & -1 & 0 & k \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 & -1 \\ -1 & 1 & k & 0 \\ 1 & -1 & 0 & k \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & k & k \end{vmatrix}$$

$$=k^2\begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ 2 & k+1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=k^2\begin{vmatrix} k & 2 & -1 \\ 2 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=k^2(k^2-4).$$

(2) $a+1$ 或 $a-2$.

解 原式$=\begin{vmatrix} \lambda-a-1 & \lambda-a-1 & 0 \\ -1 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-a-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-a+1 & 1 \\ -1 & 2 & \lambda-a \end{vmatrix}$

$=(\lambda-a-1)[(\lambda-a)^2+(\lambda-a)-2]=0$，

得 $\lambda=a+1$ 或 $\lambda=a-2$.

(3) 13.

解 箭形(爪形)行列式，利用主对角线元素将第 4 行前 3 个元素化为零.

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4-1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3} \end{vmatrix}$$

$$=1\times2\times3\times\left(4-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=13.$$

(4) -4.

解 数字型行列式，每行(列)有 2 个元素为 0，可以直接按一行(一列)展开计算，考虑到元素有规律，可以利用行列式的性质，交换第 1,4 行，再交换第 2,4 列，得

$$D_4=-\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-4.$$

(5) $a^4+a^3+2a^2+3a+4$.

解 按第 1 列展开.

$$D_4=a\begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & a & -1 \\ 3 & 2 & a+1 \end{vmatrix}+4\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix}$$

$$=a\left[a\begin{vmatrix} a & -1 \\ 2 & a+1 \end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ a & -1 \end{vmatrix}\right]+4$$

$$=a^4+a^3+2a^2+3a+4.$$

(6) 6.

解 若按第 1 行展开,只有 $-2x$ 乘以其代数余子式会出现 x^3 项,故只要求出这一项即可.

$$(-2x)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & 3x & 1\\ 1 & 1 & x\end{vmatrix}=2x\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 3x-3 & 1\\ 1 & 0 & x\end{vmatrix}=2x(3x-3)(x+1)=6x^3-6x,$$

故 x^3 的系数为 6.

(7) 0.

解 将 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 变成矩阵乘积的形式,

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|&=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|\\&=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|,\end{aligned}$$

故 $(1-|\boldsymbol{A}|)|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$,由 $|\boldsymbol{A}|<0$,知 $1-|\boldsymbol{A}|>0$,所以 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$.

(8) 0.

解 方法一:利用矩阵的秩.

由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,可知 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$,故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant n$.

又 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{O}$,知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\geqslant 1$,从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n$,于是 $|\boldsymbol{A}|=0$.

方法二:利用齐次线性方程组.

由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$,知 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的列向量组是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解. 又 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{O}$,知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解,故 $|\boldsymbol{A}|=0$.

注 结论:设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵,且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$,则

①$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leqslant n$;②$\boldsymbol{B}$ 的列向量组是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

(9) 2.

解
$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|&=|\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|\\&=|\boldsymbol{B}^{-1}||\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{B}^{-1}||\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}|\\&=|\boldsymbol{B}^{-1}||\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1}||\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}\times2\times2=2.\end{aligned}$$

注 求行列式 $|\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}|$,利用 $\boldsymbol{E}$ 作恒等变形化为矩阵积的行列式.

(10) $(-4)^{n-1}$.

解 因为 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=2\boldsymbol{A}^{-1}$,$\boldsymbol{B}^*=|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}=-2\boldsymbol{B}^{-1}$,所以

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^*-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|&=|\boldsymbol{A}^{-1}\cdot(-2\boldsymbol{B}^{-1})-2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}|\\&=|-4\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}|=(-4)^n|\boldsymbol{A}|^{-1}\cdot|\boldsymbol{B}|^{-1}\\&=(-4)^n\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=(-4)^{n-1}.\end{aligned}$$

(11) 1.

解 由 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}3 & -2 & -1\\ -1 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$,知

$$|\boldsymbol{B}|=|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|\begin{vmatrix}3 & -2 & -1\\ -1 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\cdot14=14,$$

故 $|\boldsymbol{A}|=1$.

(12) $\dfrac{1}{k}$.

解 依题意,由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$,得

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} k & k & \cdots & k \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第一行展开}} k(A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n})=1,$$

故 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}=\dfrac{1}{k}$.

三、解答题

(1) 解 方法一:D_n 的各列元素之和相等,用行加法.

$$D_n=\begin{vmatrix} b+(n-1)a & b+(n-1)a & b+(n-1)a & \cdots & b+(n-1)a \\ a & b & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & b \end{vmatrix}$$

$$=[b+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & b & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & b \end{vmatrix}$$

$$=[b+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & b-a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b-a \end{vmatrix}$$

$$=[b+(n-1)a](b-a)^{n-1}.$$

方法二:D_n 除主对角线上元素以外,其余列元素均相同,可用加边法.

$$D_n=D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & b & a & \cdots & a \\ 0 & a & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & b-a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & b-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & b-a \end{vmatrix},$$

为箭形行列式,故 $D_n=(b-a)^{n-1}\cdot[b+(n-1)a]$.

注 当 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 均不为零时,箭形行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} \lambda_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}=\left(\lambda_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ia_i}{\lambda_i}\right)\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

本结论见《2026 考研数学线性代数辅导讲义》.

(2) 证 方法一:用数学归纳法.

当 $n=1$ 时,$D_1=x+a_1$;当 $n=2$ 时,$D_2=\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & a_1+x \end{vmatrix}=x^2+a_1x+a_2$,结论成立.

假设当 $n=k-1$ 时,结论成立,有

$$D_{k-1}=x^{k-1}+a_1x^{(k-1)-1}+a_2x^{(k-1)-2}+\cdots+a_{k-2}x+a_{k-1},$$

则当 $n=k$ 时,将 D_k 按第 1 列展开,得

$$D_k=xD_{k-1}+a_k=x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-2}x^2+a_{k-1}x+a_k,$$

故对任意正整数 n,有 $D_n = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$,结论成立.

方法二:用递推法,将 D_n 按第 1 列展开,得

$$D_n = xD_{n-1} + (-1)^{n+1}a_n \cdot (-1)^{n-1} = xD_{n-1} + a_n, \qquad ①$$

故 $D_{n-1} = xD_{n-2} + a_{n-1}, \cdots, D_3 = xD_2 + a_3,\ D_2 = xD_1 + a_2 = x^2 + a_1x + a_2$,

将其依次代入 ① 式,得 $D_n = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$.

注 此题也可对第 n 行展开进行计算.

(3) 解 D_n 为三对角行列式,用递推法,将 D_n 按第 1 行展开.

$$D_n = 2D_{n-1} + (-1)\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} - D_{n-2},$$

即 $D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2} = D_{n-2} - D_{n-3} = \cdots = D_2 - D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 = 1$,

故 $D_n = D_{n-1} + 1 = (D_{n-2} + 1) + 1 = D_{n-2} + 2 = \cdots = D_1 + (n-1) = 2 + (n-1) = n + 1$.

(4) 解 记 $D_n = D_1 + D_2$. D_1 按第 1 列展开,得

$$D_1 = a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}b_n\begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= a_1a_2\cdots a_n + (-1)^{n+1}b_1b_2\cdots b_n.$$

D_2 是 D_1 的转置行列式,故 $D_2 = D_1$,并且 $D_n = D_1 + D_2$,所以

$$D_n = 2a_1a_2\cdots a_n + 2(-1)^{n+1}b_1b_2\cdots b_n.$$

综合题

一、选择题

(1) D.

解 因为伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的主对角线元素为 A_{11}, A_{22}, A_{33},所以 $A_{11} + A_{22} + A_{33}$ 的值等于 $\boldsymbol{A}^*$ 的 3 个特征值之和,故只需求 $\boldsymbol{A}^*$ 的 3 个特征值.

由 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值为 3,2,1,可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$,则有

$$|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{6},$$

故 $\boldsymbol{A}^*$ 的 3 个特征值分别为

$$\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1} = \frac{1}{2},\ \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_2} = \frac{1}{3},\ \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_3} = \frac{1}{6},$$

所以 $A_{11} + A_{22} + A_{33} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$. 选项 D 正确.

注 结论:设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,则

① $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$;

② $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$;

③ A^{-1} 的特征值为$\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}(\lambda_i\neq 0;i=1,2,\cdots,n)$;

④ A^* 的特征值为$\frac{|A|}{\lambda_1},\frac{|A|}{\lambda_2},\cdots,\frac{|A|}{\lambda_n}(\lambda_i\neq 0;i=1,2,\cdots,n)$.

本结论见《2026考研数学线性代数辅导讲义》.

(2)B.

解 求$\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{4}A_{ij}$,只要求$A^*=(A_{ji})_{4\times4}$,由$A^*=|A|A^{-1}$,可知先求$|A|$和$A^{-1}$.

由分块矩阵求逆,得

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

又$|A|=(-1)^{4+1}=-1$(按第1行展开),故

$$A^*=|A|A^{-1}=-A^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}&A_{41}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}&A_{42}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}&A_{43}\\A_{14}&A_{24}&A_{34}&A_{44}\end{pmatrix},$$

所以$\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{4}A_{ij}=(-1)+(-1)+(-1)+(-1)=-4$. 选项B正确.

(3)C.

解 方法一:由$A^*=|A|A^{-1}=\frac{1}{2}A^{-1}$,则有

$$\begin{aligned}|(2A)^{-1}-2A^*|&=\left|\frac{1}{2}A^{-1}-2\cdot\frac{1}{2}A^{-1}\right|=\left|\frac{1}{2}A^{-1}-A^{-1}\right|\\&=\left|-\frac{1}{2}A^{-1}\right|=\left(-\frac{1}{2}\right)^3|A^{-1}|\\&=-\frac{1}{8}|A|^{-1}=-\frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

方法二:由$A^{-1}=|A|^{-1}A^*=2A^*$,则有

$$\begin{aligned}|(2A)^{-1}-2A^*|&=\left|\frac{1}{2}\cdot2A^*-2A^*\right|=|A^*-2A^*|\\&=|-A^*|=(-1)^3|A^*|=-|A|^{3-1}=-\left(\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

故选项C正确.

(4)B.

解
$$\begin{aligned}f(x)&=\begin{vmatrix}1&x&x^2&x^3\\1&2&4&8\\1&-1&1&-1\\1&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x&2&-1&1\\x^2&4&1&1\\x^3&8&-1&1\end{vmatrix}\\&=(2-x)(-1-x)(1-x)(-1-2)(1-2)(1+1)\\&=6(x^2-1)(2-x).\end{aligned}$$

$f(-1)=f(1)=f(2)=0$,由罗尔定理,至少存在$x_1\in(-1,1)$,$x_2\in(1,2)$,使得$f'(x_1)=f'(x_2)=0$,故$y=f(x)$在$(-1,2)$内至少有两条水平切线.

又因为$f(x)$为三次多项式,所以$y=f(x)$至多有两条水平切线. 选项B正确.

注 题目所给行列式的转置为范德蒙行列式.

二、填空题

(1)$(-1)^n\cdot 6^{2n-1}$.

解
$$|C|=\begin{vmatrix} A & 3A^* \\ \left(\dfrac{B}{2}\right)^{-1} & O \end{vmatrix}=(-1)^{n\times n}\left|\left(\dfrac{B}{2}\right)^{-1}\right||3A^*|,$$

而
$$\left|\left(\dfrac{B}{2}\right)^{-1}\right|=|2B^{-1}|=2^n|B|^{-1}=2^n,$$
$$|3A^*|=3^n|A^*|=3^n\cdot|A|^{n-1}=3^n\cdot 6^{n-1},$$

故 $|C|=(-1)^{n^2}2^n\cdot 3^n\cdot 6^{n-1}=(-1)^{n^2}\cdot 6^{2n-1}=(-1)^n\cdot 6^{2n-1}$.

(2)0.

解 由已知,AB 是 m 阶方阵. 由于 $\mathrm{r}(AB)\leqslant \mathrm{r}(B)\leqslant \min\{m,n\}$,故当 $m>n$ 时,有 $\mathrm{r}(AB)\leqslant n<m$,故 $|AB|=0$.

(3) $\dfrac{1}{2}$.

解 由已知 $A^2B-A-B=E$,得$(A^2-E)B=A+E$,即
$$(A+E)(A-E)B=A+E,$$

而 $A+E=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,可知 $A+E$ 可逆,故$(A-E)B=E$,两边取行列式,得
$$|A-E||B|=1.$$

而 $|A-E|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}=2$,故 $|B|=\dfrac{1}{2}$.

(4)126.

解 先求出 A 的特征值,再求 $2A^*-3E$ 的特征值.

由 $|A-E|=|(-1)(E-A)|=(-1)^3|E-A|=0$,得 $|1\cdot E-A|=0$,可知$\lambda_1=1$是 A 的一个特征值.

同理,由 $|A+2E|=|2A+3E|=0$,得 A 的特征值$\lambda_2=-2,\lambda_3=-\dfrac{3}{2}$,故
$$|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=3\neq 0\ (A\text{ 可逆}),$$

所以 A^* 的特征值分别为
$$\frac{|A|}{\lambda_1}=\frac{3}{1}=3,$$
$$\frac{|A|}{\lambda_2}=\frac{3}{-2}=-\frac{3}{2},$$
$$\frac{|A|}{\lambda_3}=-2,$$

于是 $2A^*-3E$ 的特征值分别为
$$2\times 3-3=3,\ 2\times\left(-\frac{3}{2}\right)-3=-6,\ 2\times(-2)-3=-7,$$

所以 $|2A^*-3E|=3\times(-6)\times(-7)=126$.

注 设 A 的特征值为λ,则 $f(A)$ 的特征值为 $f(\lambda)$,其中 $f(x)$ 为多项式.

(5)2.

解 方法一：利用行列式的性质，由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)$，则有

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|&=|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1|\\&=2|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1|\\&=2|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_1,-\boldsymbol{\alpha}_2|\\&=2|\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_1,-\boldsymbol{\alpha}_2|=2|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|.\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\neq 0$，故 $|\boldsymbol{A}|=2$.

方法二：利用矩阵的乘法及相似矩阵的性质.

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，由已知，$\boldsymbol{P}$ 可逆，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，故 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$，即 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，故

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2.$$

(6) 12.

解 先找出 $|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}|$ 与 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 的关系.

由 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=1$，知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均可逆，并且

$$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}|=|(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{B}^{-1}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}^{-1}|$$

又因为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\ 2\boldsymbol{\alpha}_1,\ 2\boldsymbol{\alpha}_2,\ 2\boldsymbol{\alpha}_3)$，所以

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|&=|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_3|\\&=2^3|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\\&=8|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|+|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\\&=8\times(2+1)=24.\end{aligned}$$

故 $|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}|=1\times 24\times\dfrac{1}{2}=12.$

注 $|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}|$ 没有公式直接计算，可通过恒等变形化为矩阵积的行列式解.

(7) $\dfrac{(-1)^{n+1}n!}{k}$.

解 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分块，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=(n)$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&n-1\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^{-1}\\\boldsymbol{B}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&\frac{1}{n}\\1&0&\cdots&0&0\\0&\frac{1}{2}&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&\frac{1}{n-1}&0\end{pmatrix}.$$

行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 按第 1 列展开，得 $|\boldsymbol{A}|=(-1)^{n+1}n!$，又 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，故

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{k1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & \cdots & A_{k2} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{kn} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = (-1)^{n+1} n! \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

所以 $A_{k1} + A_{k2} + \cdots + A_{kn} = \dfrac{(-1)^{n+1} n!}{k}$.

三、解答题

(1) 解 D_n 除主对角线元素外,第 i 行($i = 1,2,\cdots$) 元素分别是 $a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_n$ 的倍数,即

$$(-a_i)a_1, (-a_i)a_2, \cdots, (-a_i)a_{i-1}, (-a_i)a_{i+1}, \cdots, (-a_i)a_n.$$

可考虑用加边法,

$$D_n = D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ 0 & -a_2a_1 & b-a_2^2 & \cdots & -a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & b-a_n^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & b & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix},$$

为箭形行列式,故 $D_n = b^{n-1}\left(b - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right)$.

(2) 解 D_n 中除主对角线外,各列元素分别相同,用加边法.

$$D_n = D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b_1 & a & \cdots & a \\ 1 & a & a+b_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & a+b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a & -a & \cdots & -a \\ 1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix},$$

该行列式为箭形行列式,故可求得 $D_n = \left(1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a}{b_i}\right) \prod\limits_{j=1}^{n} b_j$.

注 ① 将行列式添加一行或一列,使其升阶后的行列式的值不变,这种方法称为"加边法".
② 行列式除主对角线外,第 $i\,(i = 1,2,\cdots,n)$ 行(列) 元素分别与第 $j\,(j \neq i)$ 行(列) 元素有倍数关系或相同,此类行列式的计算可采用"加边法".

(3) 解 按第 n 行展开,用递推法.

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{n+1} a_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + (-1)^{n+n} \cdot x \cdot D_{n-1} = a_{n-1} + xD_{n-1} \\ &= a_{n-1} + a_{n-2}x + x^2 D_{n-2} = \cdots = a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x + a_{n-1}. \end{aligned}$$

(4) 解 三对角行列式,用递推法.

按第 1 列展开,得

$$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}, \tag{①}$$

将 ① 式化为

$$D_n - kD_{n-1} = \mu(D_{n-1} - kD_{n-2}), \tag{②}$$

其中

$$\begin{cases} k + \mu = a, \\ k\mu = bc. \end{cases} \tag{③}$$

令

$$D_{n-i} - kD_{n-i-1} = \Delta_{n-i} \ (i = 0,1,2,\cdots,n-2), \tag{④}$$

则递推 ② 式为 $\Delta_n = \mu\Delta_{n-1}$,反复利用这个递推式,可得

$$\Delta_n=\mu\Delta_{n-1}=\mu^2\Delta_{n-2}=\cdots=\mu^{n-2}\Delta_2, \tag{⑤}$$

将④式代入⑤式的右端,由③式可得

$$\begin{aligned}\Delta_n&=\mu^{n-2}(D_2-kD_1)=\mu^{n-2}(a^2-bc-ka)\\&=\mu^{n-2}[a^2-k\mu-(a-\mu)a]=\mu^{n-2}\cdot\mu(a-k)=\mu^n.\end{aligned}$$

对于④式,若取 $i=0$,则得 $D_n=\mu^n+kD_{n-1}$. 反复利用这个递推公式,得

$$\begin{aligned}D_n&=\mu^n+kD_{n-1}=\mu^n+k(\mu^{n-1}+kD_{n-2})\\&=\mu^n+k\mu^{n-1}+k^2(\mu^{n-2}+kD_{n-3})\\&=\mu^n+k\mu^{n-1}+k^2\mu^{n-2}+k^3D_{n-3}=\cdots\\&=\mu^n+k\mu^{n-1}+k^2\mu^{n-2}+\cdots+k^{n-2}\mu^2+k^{n-1}D_1,\end{aligned}$$

将 $D_1=a=k+\mu$ 代入上式,得

$$D_n=\mu^n+k\mu^{n-1}+k^2\mu^{n-2}+\cdots+k^{n-2}\mu^2+k^{n-1}\mu+k^n,$$

所以

$$D_n=\begin{cases}\dfrac{\mu^{n+1}-k^{n+1}}{\mu-k}, & k\neq\mu,\\(n+1)\mu^n, & k=\mu.\end{cases}$$

由③式,知 μ,k 是一元二次方程 $x^2-ax+bc=0$ 两个根,故

$$\mu=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4bc}}{2},\ k=\frac{a\mp\sqrt{a^2-4bc}}{2}.$$

注 此题推出了一般三对角行列式的结论.

拓展题

解答题

(1) **解** 由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^*$,$\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$,知

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|^2=\big||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}\big|=|\boldsymbol{A}|^3,$$

即 $|\boldsymbol{A}|^2(1-|\boldsymbol{A}|)=0$,故 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{A}|=1$.

又 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,不妨设 $a_{11}\neq0$,由已知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^*$,得 $a_{ji}=A_{ji}$,故

$$|\boldsymbol{A}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2\neq0,$$

于是 $|\boldsymbol{A}|=1$. 由

$$|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=|(-1)(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})|=(-1)^3|-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0,$$

得 $|-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$,故 $\lambda_1=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

同理,由 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$,得 $\lambda_2=1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

由 $1=|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=(-1)\cdot1\cdot\lambda_3$,得 $\lambda_3=-1$.

又 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$ 的特征值分别为 $-1,-3,-1$,故

$$|\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|=(-1)\times(-3)\times(-1)=-3.$$

(2) **证** (Ⅰ) 因为 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,不妨设 $a_{11}\neq0$. 由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^*$,知 $a_{ji}=kA_{ji}$.

将 $|\boldsymbol{A}|$ 按第一行展开,得

$$|\boldsymbol{A}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=\frac{1}{k}(a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2)\neq0,$$

即 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵.

解 (Ⅱ) 由 $\boldsymbol{AA}^*=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$,且

$$\left|\frac{1}{k}\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}\right|=\frac{1}{k^3}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=\frac{1}{k^3}|\boldsymbol{A}|^2,\ \big||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}\big|=|\boldsymbol{A}|^3,$$

可知 $\dfrac{1}{k^3}|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}|^3$,整理得 $|\boldsymbol{A}|^2\left(\dfrac{1}{k^3}-|\boldsymbol{A}|\right)=0$,又由(Ⅰ)知 $|\boldsymbol{A}|\neq0$,故

$$|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{k^3},\ |\boldsymbol{A}^{-1}|=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}=k^3.$$

又由$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$,知

$$|(\boldsymbol{A}^*)^{-1}|=\left|\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}\right|=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|^3}|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|^2}=k^6,$$

故$|\boldsymbol{A}^{-1}+|(\boldsymbol{A}^*)^{-1}|=k^3+k^6$.

(3) 解 由于

$$|\boldsymbol{A}|=1\times(-1)\times2=-2,\ |\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{3-1}=(-2)^2=2^2,$$

故

$$\begin{aligned}\left||\boldsymbol{A}|\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}^*\\-2\boldsymbol{E}&\boldsymbol{A}\end{pmatrix}\right|&=|\boldsymbol{A}|^6\cdot(-1)^9\,|\boldsymbol{A}^*|\cdot|-2\boldsymbol{E}|\\&=(-2)^6\times(-1)\times2^2\times(-2)^3=2^{11}.\end{aligned}$$

(4) 解 由已知,有

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}|&=\begin{vmatrix}2&2&2&2\\1&a_1&a_2&a_3\\1&b_1&b_2&b_3\\1&c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&a_1&a_2&a_3\\1&b_1&b_2&b_3\\1&c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}\\&=2(A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14})=1,\end{aligned}$$

故$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\dfrac{1}{2}$.由行列式的错位展开公式,得

$$\begin{aligned}A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}=0,\\A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}=0,\\A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=0,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}A_{ij}&=(A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14})+(A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24})+\\&\quad(A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34})+(A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44})\\&=\frac{1}{2}+0+0+0=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

注 行列式的错位展开公式:当$i\neq j$时,有

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0.$$

第八章 矩 阵

基础题

一、选择题

(1) B.

解 根据矩阵乘法及初等矩阵，得

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}+a_{23}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}+a_{33}&a_{33}\\a_{11}&a_{12}+a_{13}&a_{13}\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

故选项 B 正确.

(2) D.

解 利用伴随矩阵的公式 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，由 $\boldsymbol{A}$ 可逆，知 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，故

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}.$$

又 $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{E}$，知$(\boldsymbol{A}^{-1})^*=\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$，故$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*=\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$，结论 ① 正确.

由$(k\boldsymbol{A})(k\boldsymbol{A})^*=|k\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，知

$$(k\boldsymbol{A})^*=k^n|\boldsymbol{A}|\cdot(k\boldsymbol{A})^{-1}=k^n|\boldsymbol{A}|\cdot\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}=k^{n-1}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*,$$

故结论 ② 正确.

由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm T}(\boldsymbol{A}^{\mathrm T})^*=|\boldsymbol{A}^{\mathrm T}|\boldsymbol{E}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，知$(\boldsymbol{A}^{\mathrm T})^*=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^{\mathrm T})^{-1}$，由

$$(\boldsymbol{AA}^*)^{\mathrm T}=(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm T}\boldsymbol{A}^{\mathrm T}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E})^{\mathrm T}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E},$$

知$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm T}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^{\mathrm T})^{-1}$，故$(\boldsymbol{A}^{\mathrm T})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm T}$，结论 ③ 正确.

由 $\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}^*|\boldsymbol{E}=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{E}$，知

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}^*)^*&=|\boldsymbol{A}|^{n-1}(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{n-1}(\boldsymbol{A}^{-1})^*\\&=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\cdot|\boldsymbol{A}^{-1}|\cdot(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A},\end{aligned}$$

故结论 ④ 正确. 综上，选项 D 正确.

注 ① 对公式 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，可以将 $\boldsymbol{A}$ 替换成$\boldsymbol{A}^{-1}$，$k\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^*$ 衍生出更多的公式.

② 三种运算“$*$”“-1”“T”是可交换的.

③ 常用结论：$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$，$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm T}=\boldsymbol{B}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}^{\mathrm T}$，$(\boldsymbol{AB})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$.

(3) C.

解

$$[(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^*]^{-1}=[|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}]^{-1}$$

$$=\frac{1}{|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\left(\begin{array}{cc:c}0&0&\frac{1}{4}\\ \hdashline \frac{1}{2}&0&0\\-\frac{3}{4}&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\end{array}\right),$$

由分块矩阵的行列式知$\left|[(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^*]^{-1}\right|=(-1)^{1\times 2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$,故选项 C 正确.

(4)B.

解 同型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

由于在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中,有 3 阶子式$\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\2&k&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix}=1\neq 0$,故 $r(\boldsymbol{A})=3$.

对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 作初等变换,得

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\2&3&k\\3&5&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&1&k-2\\0&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&k-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

故由 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=3$,知 $k\neq 1$. 选项 B 正确.

(5)B.

解 先确定 $\boldsymbol{A}$ 的秩,对 $\boldsymbol{A}$ 作初等变换,有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&a&1\\1&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&1&a\\1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&a\\0&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&a\\0&0&2-\frac{2}{3}a\end{pmatrix}$$

若 $a\neq 3$,则 $\boldsymbol{A}$ 可逆,从而 $2=r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{AB})=1$,矛盾. 故 $a=3$.

从而 $r(\boldsymbol{A})=2$,$r(\boldsymbol{A}^*)=1$,由 $r(\boldsymbol{B})=2$,知 $r(\boldsymbol{B}^*)=1$.

故 $r\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}\right]=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B}^*)=2+1=3$. 选项 B 正确.

由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 及 $\boldsymbol{B}$ 均不可逆,可知

$$r\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\right]\geqslant r(\boldsymbol{A}^*)+r(\boldsymbol{B})=1+2=3,$$

$$r\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\end{pmatrix}\right]\geqslant r(\boldsymbol{A}^*)+r(\boldsymbol{A})=1+2=3,$$

$$r\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}^*\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\right]\geqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})=2+2=4.$$

故排除选项 A,C,D.

注 有关分块矩阵的秩的结论：

① $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$,$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\right]\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.

② 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $r\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}\right]=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{D})$,$r\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}\right]=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{D})$.

③ $r\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\right]=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$,$r\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\right]=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.

④ $r\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}\right]\geqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{D})$,$r\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}\right]\geqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{D})$.

(6)D.

解 对于选项 A,由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$,知 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{A})$,即 $r(\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{C})=m$. 又由 $\boldsymbol{A}$ 是$m\times n$ 矩阵,知 $r(\boldsymbol{A})\leqslant m$,故 $r(\boldsymbol{A})=m$. 可排除选项 A.

对于选项 B，$s=\mathrm{r}(\boldsymbol{C})=\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$，即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\geqslant s$. 而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leqslant s$，故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=s$. 可排除选项 B.

当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$ 时，考虑方程组（Ⅰ）$\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$，（Ⅱ）$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$. 则方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）是同解的，事实上，（Ⅱ）的解显然是（Ⅰ）的解.

若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是（Ⅰ）的解，即 $\boldsymbol{AB\alpha}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B\alpha})=\boldsymbol{0}$，由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$，知 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，从而 $\boldsymbol{B\alpha}=\boldsymbol{0}$.

故 $\boldsymbol{\alpha}$ 是（Ⅱ）的解. 所以，（Ⅰ）与（Ⅱ）同解，从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{C})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$. 选项 D 正确.

由选项 D 正确知，选项 C 不正确.

二、填空题

(1) $3^{n-1}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$.

解 由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$，$k=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=3$，故 $\boldsymbol{A}^n=k^{n-1}\boldsymbol{A}=3^{n-1}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix}2n+1 & 4n & 0\\ -n & -2n+1 & 0\\ 3n & 6n & 1\end{pmatrix}$.

解 由于 $\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，且 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(1,2,0)\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=0$，故 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$.

又因为
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}(1,2,0)=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\ -1 & -2 & 0\\ 3 & 6 & 0\end{pmatrix},$$
所以
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^n&=\boldsymbol{E}^n+\mathrm{C}_n^1\boldsymbol{E}^{n-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+n\boldsymbol{A}\\&=\begin{pmatrix}2n+1 & 4n & 0\\ -n & -2n+1 & 0\\ 3n & 6n & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(3) $\begin{pmatrix}2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\\ 0 & 2^n & 0\\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\end{pmatrix}$.

解 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，先求 $\boldsymbol{A}^2$，找出 $\boldsymbol{A}^n$ 的规律.
$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}=2\boldsymbol{A},$$
即 $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}$，从而 $\boldsymbol{A}^3=2\boldsymbol{A}^2=2^2\boldsymbol{A},\cdots,\boldsymbol{A}^n=2^{n-1}\boldsymbol{A}$，故
$$\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\\ 0 & 2^n & 0\\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\end{pmatrix}.$$

(4) $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

解 由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$,有 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{P}$,一般地,有 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{P}$,所以$\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}^4\boldsymbol{P}$.

由 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,得 $\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,故 $\boldsymbol{B}^4=(\boldsymbol{B}^2)^2=\boldsymbol{E}$,所以 $\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$,于是

$$\boldsymbol{A}^4-2\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

(5) $(-2)^{n-1}$.

解 依题设,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_{i,j}\boldsymbol{A}$,则 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{E}_{i,j}||\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|=-2$,故

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|&=|\boldsymbol{B}^{-1}||\boldsymbol{B}^*||\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|\\&=|\boldsymbol{B}|^{-1}|\boldsymbol{B}|^{n-1}\cdot|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}|^{n-1}=(-2)^{n-1}.\end{aligned}$$

(6) 2.

解 利用初等行变换化 $\boldsymbol{A}$ 为阶梯形,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$.

(7) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{n-1}$.

解 利用可逆矩阵的定义,并注意到 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{O}$,

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{n-1})=\boldsymbol{E},$$

故$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{n-1}$.

注 由 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{O}$,则化零多项式为 x^n.

用多项式除法,即用 x^n 除以 $x-1$,也可求$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$(计算量大).

(8) $\boldsymbol{E}$.

解 由 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{E}$,知 $|\boldsymbol{A}|^n=1$. 又 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$,得

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)^n=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)\cdots(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)=|\boldsymbol{A}|^n\boldsymbol{E}.$$

因 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 可交换,故$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)^n=\boldsymbol{A}^n(\boldsymbol{A}^*)^n=|\boldsymbol{A}|^n\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}$,于是$(\boldsymbol{A}^*)^n=\boldsymbol{E}$.

注 伴随矩阵的常用计算公式:$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

(9) $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})$.

解 利用可逆矩阵的定义.

由 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}$,即 $\boldsymbol{A}\cdot\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$,故

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}).$$

(10) $-\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$.

解 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,知 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,即$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=-2\boldsymbol{E}$,故

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}).$$

注 下列解法是错误的:

由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$,于是

① 当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 时,$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{E}^{-1}=\boldsymbol{E}$;

② 当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 时,$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=(2\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}$.

错误原因在于忽略了矩阵运算与数的运算的区别:由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 不能得出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

(11) -1.

解 依题意,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_{i,j}\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{E}_{i,j}$ 为单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 交换第 i,j 行后所得的初等矩阵,则

$$\boldsymbol{AB}^{-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}_{i,j}\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{AA}^{-1}\boldsymbol{E}_{i,j}^{-1}=\boldsymbol{E}_{i,j}^{-1}=\boldsymbol{E}_{i,j},$$

故 $|\boldsymbol{AB}^{-1}|=|\boldsymbol{E}_{i,j}|=-1$.

(12) $\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.

解 依题设,有$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{交换 }1,2\text{ 行}}\begin{pmatrix}y\\x\\z\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{交换 }1,3\text{ 行}}\begin{pmatrix}z\\x\\y\end{pmatrix}$,故

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_{1,3}\cdot\boldsymbol{E}_{1,2}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

(13) -1 或$\frac{1}{2}$.

解
$$\boldsymbol{AA}^{-1}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{k}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\right)=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{k}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}-\frac{1}{k}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}.$$

而 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=2k^2$,故

$$\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}+\left(-1+\frac{1}{k}-\frac{2k^2}{k}\right)\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E},$$

于是 $-1+\frac{1}{k}-2k=0$,解得 $k=-1$ 或 $k=\frac{1}{2}$.

三、解答题

(1) **解** 由 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$,知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leqslant 3$,由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})>1$,得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant 3-\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leqslant 1$. 而显然 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geqslant 1$,故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$,所以 $\boldsymbol{A}$ 的行向量成比例,

$$\frac{a}{2}=\frac{1}{-1}=\frac{b}{3},\ \frac{2}{4}=\frac{-1}{c}=\frac{3}{6},$$

解得 $a=-2$, $b=-3$, $c=-2$,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-2&1&-3\\4&-2&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}(2,-1,3)\xlongequal{\text{记}}\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}},$$

则 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=9$,于是 $\boldsymbol{A}^{n}=9^{n-1}\boldsymbol{A}=9^{n-1}\begin{pmatrix}2&-1&3\\-2&1&-3\\4&-2&6\end{pmatrix}$.

注 结论:

①$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$($\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为非零列向量);

② $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1 \Rightarrow \boldsymbol{A}^{n}=k^{n-1}\boldsymbol{A}$,其中 $k=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\,(i=1,2,\cdots,n)$,$\lambda_i$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

(2) **解** 由

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{2}&=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{E}+4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=4\boldsymbol{E}+4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}-3\boldsymbol{E}=4\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E},\end{aligned}$$

可知 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})=-3\boldsymbol{E}$,故 $\boldsymbol{A}$ 可逆,且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}}{3}$.

注 结论:设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 n 维列向量,$k_1\neq 0$,$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\neq\dfrac{1}{k_1}$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-k_1\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 可逆,且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}-k_2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}},$$

其中 k_1,k_2 满足 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}$.

本结论见《2026 考研数学线性代数辅导讲义》.

(3) **解** $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$,又 $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{E}$,故 $(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{A}$.

而 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{vmatrix}=2$,对 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 用初等行变换求 $\boldsymbol{A}$,

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\1&1&3&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right),$$

故 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\-1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$,所以 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$.

(4) **解** $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵,将 $\boldsymbol{A}$ 拆成两个矩阵,

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{2}&=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})^{2}=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+3\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}+5\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\&=5\boldsymbol{E}+5\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}-4\boldsymbol{E}=5\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}.\end{aligned}$$

又 $\boldsymbol{A}^{2}-5\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})=-4\boldsymbol{E}$,知

$$A^{-1}=\frac{A-5E}{-4}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}.$$

(5) **解** 考虑到$(A-E)^{-1}$无公式可用,在已知等式两边同时乘以$(A-E)$.

依题意,$(A-E)^{-1}=(B-E)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}-E$,等式两边同时乘以$(A-E)$,得

$$(A-E)(A-E)^{-1}=(A-E)(B^{\mathrm{T}}-E),$$

故$E=AB^{\mathrm{T}}-A-B^{\mathrm{T}}+E$,即$A(B^{\mathrm{T}}-E)=B^{\mathrm{T}}$.

由$|B|\neq 0$,知$|B^{\mathrm{T}}|\neq 0$,故B^{T}可逆,于是

$$A(B^{\mathrm{T}}-E)(B^{\mathrm{T}})^{-1}=B^{\mathrm{T}}\cdot(B^{\mathrm{T}})^{-1}=E,$$

所以$A^{-1}=(B^{\mathrm{T}}-E)(B^{\mathrm{T}})^{-1}=E-(B^{\mathrm{T}})^{-1}$.

注 ① $(A+B)^{-1}\neq A^{-1}+B^{-1}$,$(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$;

② 求$(A+B)^{-1}$也可考虑用E作恒等变形,化“和”为“积”,再利用结论$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

(6) **解** 由于$[(E+B)^2]^{-1}=[(E+B)^{-1}]^2$,且

$$\begin{aligned}(E+B)^{-1}&=[E+(E+A)^{-1}(E-A)]^{-1}\\&=[(E+A)^{-1}(E+A)+(E+A)^{-1}(E-A)]^{-1}\\&=[(E+A)^{-1}(E+A+E-A)]^{-1}=[2(E+A)^{-1}]^{-1}\\&=\frac{1}{2}(E+A)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\2&4&0\\0&4&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&2&3\end{pmatrix},\end{aligned}$$

故$[(E+B)^2]^{-1}=[(E+B)^{-1}]^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&2&3\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&4&0\\2&10&9\end{pmatrix}$.

(7) **解** 求抽象矩阵的逆,常用可逆的定义与$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

$$A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}(E+AB^{-1})=A^{-1}(BB^{-1}+AB^{-1})=A^{-1}(B+A)B^{-1},$$

故由已知条件,知$A^{-1}+B^{-1}$可逆,且

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=[A^{-1}(B+A)B^{-1}]^{-1}=B(A+B)^{-1}A.$$

注 由于$A^{-1}(A+B)B^{-1}=B^{-1}(A+B)A^{-1}$,等式两边同时取逆,故

$$B(A+B)^{-1}A=A(A+B)^{-1}B,$$

即本题的答案还可以写成$A(A+B)^{-1}B$.

(8) **证** 由$AB=BA$,得$A^{-1}(AB)A^{-1}=A^{-1}(BA)A^{-1}$,故

$$A^{-1}(AB)A^{-1}=(A^{-1}A)BA^{-1}=BA^{-1},$$
$$A^{-1}(BA)A^{-1}=A^{-1}B(AA^{-1})=A^{-1}B,$$

于是$A^{-1}B=BA^{-1}$(即A^{-1}与B可交换).

(9) **证** 由已知,有

$$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=A+AB+BA+B=A+B,$$

故
$$AB+BA=O, \tag{①}$$

① 式左乘以 A,得

$$A^2B+ABA=AB+ABA=O, \qquad ②$$

① 式右乘以 A,得

$$ABA+BA^2=ABA+BA=O, \qquad ③$$

由 ②、③ 式可知 $AB=-ABA=BA$.

注 ① 下列解法是错误的:

由 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2=A+2AB+B=A+B$,及

$$(A+B)^2=(B+A)^2=B^2+2BA+A^2=B+2BA+A=A+B,$$

故 $AB=BA=O$.

错误原因是矩阵乘法没有交换律,也没有消去律.

② 由 $AB=BA$ 可得 $(AB)^2=A^2B^2$,但反之不一定成立.

例如 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$,满足 $(AB)^2=A^2B^2$,但 $AB\neq BA$.

(10) 证 只要证明 $|A-E|=0$ 即可. 由 A 是正交矩阵,知 $AA^{\mathrm T}=A^{\mathrm T}A=E$,所以

$$\begin{aligned}|A-E|&=|A(E-A^{\mathrm T})|=|A||E-A^{\mathrm T}|\\&=|A||(E-A)^{\mathrm T}|=|A||E-A|\\&=|-(A-E)|=(-1)^{2n+1}|A-E|=-|A-E|,\end{aligned}$$

故 $|A-E|=0$,所以 $A-E$ 不可逆.

(11) 证 只要证明 $|A+B|=0$ 即可.

由 $A^2=E,B^2=E$,知 $|A^2|=|A|^2=|E|=1$,及

$$|B^2|=|B|^2=|E|=1,$$

故 $|A|=\pm1$,$|B|=\pm1$,又由 $|A|+|B|=0$,可知 $|A|$ 与 $|B|$ 异号.

而
$$\begin{aligned}|A+B|&=|AB^2+A^2B|=|A(B+A)B|\\&=|A||A+B||B|,\end{aligned}$$

由于 $|A||B|=-1$,故 $|A+B|=-|A+B|$,所以 $|A+B|=0$,从而 $A+B$ 不可逆.

(12) 解 由 $AB+E=A^2+B$,可得 $AB-B=A^2-E$,则 $(A-E)B=A^2-E$.

又由 $A-E=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$,可知 $A-E$ 可逆,故

$$\begin{aligned}B&=(A-E)^{-1}(A^2-E)=(A-E)^{-1}(A-E)(A+E)\\&=A+E=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\-1&0&2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

注 此题属于解矩阵方程,这类题可分两类.

将已知矩阵方程化简为下列三者之一:

$$AX=B,\ XA=B,\ AXB=C,$$

① 当 A,B 可逆时,解得 $X=A^{-1}B$,$X=BA^{-1}$,$X=A^{-1}CB^{-1}$.

② 当 A 不可逆时,问题转化为解非齐次线性方程组.

(13) 解 由 $(A^{\mathrm T}B^{-1})^{\mathrm T}-A(B^{\mathrm T}A)^{-1}=(E-B^{-1})^{\mathrm T}$,得

$$(\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}-(\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}},$$

即
$$(\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}+(\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E},$$

因为$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}$,所以有$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$,即 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&1\\2&2\end{pmatrix}$.

(14) **解** 由 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$,得 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{A}$,即$(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{A}$.

由已知,$\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}$ 可逆,故 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})^{-1}(6\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}=6(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})^{-1}$. 又

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&7\end{pmatrix},(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{6}\end{pmatrix},$$

故
$$\boldsymbol{B}=6(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

注 设 a_1,a_2,a_3 均不为零,则

$$\begin{pmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a_1}&0&0\\0&\frac{1}{a_2}&0\\0&0&\frac{1}{a_3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&a_1\\0&a_2&0\\a_3&0&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{a_3}\\0&\frac{1}{a_2}&0\\\frac{1}{a_1}&0&0\end{pmatrix}.$$

(15) **解** $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为初等矩阵,故可逆,由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$,得 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}$,故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}&=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\\&=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-4&3\\2&0&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&3&-4\\1&0&-2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(16) **解** 已知矩阵方程无法利用矩阵运算化简,则令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$,代入等式转化为解方程,有

$$\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix},$$

即
$$\begin{pmatrix}x_1&2x_1+x_2\\x_3&2x_3+x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1+x_3&2x_2+x_4\\3x_1+2x_3&3x_2+2x_4\end{pmatrix},$$

比较两边对应元素,得

$$\begin{cases}x_1=2x_1+x_3,\\2x_1+x_2=2x_2+x_4,\\x_3=3x_1+2x_3,\\2x_3+x_4=3x_2+2x_4,\end{cases}$$

此方程组只有零解 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$,故 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$.

综合题

一、选择题

(1)B.

解 由 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ 知,$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \leqslant 3$.

若 $k = 1$,则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1$,故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \leqslant 2$,所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = 1$ 或 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = 2$,选项 A,C 不正确.

若 $k = -3$,则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 2$,故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \leqslant 3 - \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1$,又 $\boldsymbol{B}$ 是非零矩阵,故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \geqslant 1$,从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = 1$. 故选项 B 正确.

(2)C.

解 由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*) = 1$,知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n - 1 = 3 - 1 = 2$,故 $|\boldsymbol{A}| = 0$. 又

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = (a+2b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-b & 0 \\ 1 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+2b)(a-b)^2 = 0,$$

得 $a + 2b = 0$ 或 $a = b$.

又当 $a = b$ 时,$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1 \neq 2$,故 $a + 2b = 0$(由 a,b 均不为零,可知 $a + 2b = 0$ 已经蕴含 $a \neq b$),故选项 C 正确.

注 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,则

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n \Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n, \\ 1 \Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n-1, \\ 0 \Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) < n-1. \end{cases}$$

(3)A.

解 $\boldsymbol{P}$ 是初等矩阵,$\boldsymbol{P}$ 左乘 $\boldsymbol{A}$,相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 1,3 行交换,故交换偶数次,相当于不变,右乘 $\boldsymbol{A}$ 相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 1,3 列交换,同理交换偶数次,相当于不变,故选项 A 正确.

(4)A.

解 根据"初等变换不改变矩阵的秩"的性质,有

$$r_1 = \mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}\right) = \mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} -\boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}\right) = \mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} -\boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}\right) = \mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) + n,$$

$$r_2 = \mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}\right) = \mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}\right) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + n,$$

$$r_3 = \mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}\right) = \mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}\right) = \mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\right) = n.$$

又 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$,故 $r_2 \geqslant r_1 \geqslant r_3$,选项 A 正确.

注 分块矩阵的初等变换,现行考研大纲未作要求,但近年考试中常出现,有关分块矩阵的初等变换内容见《2026 考研数学线性代数辅导讲义》.

(5)B.

解 对于命题 ①:由 $\boldsymbol{ABC} = \boldsymbol{E}$,知 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}||\boldsymbol{C}| = 1$,故 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 可逆.

等式 $\boldsymbol{ABC} = \boldsymbol{E}$ 两边左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$,得 $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{A}^{-1}$,再右乘 $\boldsymbol{A}$,得 $\boldsymbol{BCA} = \boldsymbol{E}$.

等式 $\boldsymbol{ABC} = \boldsymbol{E}$ 两边右乘 $\boldsymbol{C}^{-1}$,得 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}^{-1}$,再左乘 $\boldsymbol{C}$,得 $\boldsymbol{CAB} = \boldsymbol{E}$.

故 $\boldsymbol{BCA} = \boldsymbol{CAB}$. 命题 ① 正确.

对于命题②：取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均不可逆，但 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 可逆. 故命题②不正确.

对于命题③：由 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均不可逆，知 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=0$. 从而 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=0$，故 $\boldsymbol{AB}$ 必不可逆，命题③正确.

对于命题④：由 $(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{E}$，即 $(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{E}$. 知 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均可逆. 从而 $\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{B}^{-1}$. 故 $\boldsymbol{BABA}=\boldsymbol{E}$. 即 $(\boldsymbol{BA})^2=\boldsymbol{E}$. 命题④正确.

综上所述，选项 B 正确.

二、填空题

(1) $\begin{pmatrix}3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}$.

解 由 $\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{C}^*=|\boldsymbol{C}|\boldsymbol{E}$，得

$$\boldsymbol{C}^*=|\boldsymbol{C}|\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{B}| & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}|\boldsymbol{A}|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}.$$

注 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\\ \boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$（其中 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均可逆）.

(2) $\dfrac{1}{k}$.

解 先说明 $k\neq 0$，由已知，将 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 $2,3,\cdots,n$ 列加到第 1 列，有

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}k&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ k&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ k&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

由 $\boldsymbol{A}$ 可逆，故 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，所以 $k\neq 0$.

将 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{E}$ 写成分块矩阵（以列分块），有

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),\ \boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n),\ \boldsymbol{E}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n),$$

由 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，得

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n),$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{e}_i(i=1,2,\cdots,n)$，于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_n&=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n)\\&=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}k\\k\\ \vdots\\k\end{pmatrix}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\cdots+\boldsymbol{e}_n=\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

即
$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}k\\k\\ \vdots\\k\end{pmatrix}=k(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_n)=\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_n=\dfrac{1}{k}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{k}\\\dfrac{1}{k}\\\vdots\\\dfrac{1}{k}\end{pmatrix}$,即 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的每行元素之和均为$\dfrac{1}{k}$.

注 此题也可作为一个结论,在做选择、填空题时直接运用.

(3) $\begin{cases}4^{k-1}\boldsymbol{A}, & n=2k-1,\\ 4^k\boldsymbol{E}, & n=2k\end{cases}(k=1,2,\cdots)$.

解 找出 $\boldsymbol{A}^n$ 的规律.

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}=4\boldsymbol{E},$$

$$\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}\cdot 4\boldsymbol{E}=4\boldsymbol{A},$$

故 $\boldsymbol{A}^n=\begin{cases}4^{k-1}\boldsymbol{A}, & n=2k-1,\\ 4^k\boldsymbol{E}, & n=2k\end{cases}(k=1,2,\cdots)$.

(4) $\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&-1&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

解 注意到 $\boldsymbol{A}$ 的特殊性,

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{O},$$

故 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{E}$,从而$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}^3)=\boldsymbol{E}$,故

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&-1&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

注 一般地,设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,且 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{E}$,即 $\boldsymbol{E}^k-\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{E}$,故

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1})=\boldsymbol{E},$$

从而$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}$.

进一步,当 k 为偶数时,有 $\boldsymbol{E}-(-\boldsymbol{A})^k=\boldsymbol{E}$,从而可计算$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}$.

三、解答题

(1) 解 利用分块矩阵表达 $\boldsymbol{A}$. 令 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(3,2,1)$,则

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & (\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}\\ (\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha A},$$

$$\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha A}^2,\cdots.$$

又
$$\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}(3,2,1)=\begin{bmatrix}3&2&1\\6&4&2\\9&6&3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(3,2,1)\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=10,$$

故
$$\boldsymbol{A}^n=\begin{cases}10^{k-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 10^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\\ 10^{k-1}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}, & n=2k-1,\\ 10^{k-1}\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}10^{k-1}\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & 10^k\end{pmatrix}, & n=2k\end{cases}\quad (k=1,2,\cdots).$$

(2) 证

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}-4&4&4&-4\\4&-4&-4&4\\4&-4&-4&4\\-4&4&4&-4\end{bmatrix}=-4\boldsymbol{A},$$

即 $\boldsymbol{A}^2+4\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 又

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{A}=-2(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})+3\boldsymbol{E},$$

即$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=3\boldsymbol{E}$,故

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&1&1&-1\\1&2&-1&1\\1&-1&2&1\\-1&1&1&2\end{bmatrix}.$$

(3) 解 用数学归纳法.

当 $n=3$ 时,

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}^3=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&2&1\end{bmatrix},$$

故满足 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$. 假设 $\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{A}^{n-3}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}(n>3)$ 成立,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{n-1})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{n-3}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}\\&=\boldsymbol{A}^{n-2}+(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E},\end{aligned}$$

故对 $n\geqslant 3$,所证等式成立.

由递推关系,得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{100}&=\boldsymbol{A}^{98}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}^{96}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}\\&=\boldsymbol{A}^{96}+2(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})=\cdots=\boldsymbol{A}^2+49(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})\\&=50\boldsymbol{A}^2-49\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\50&50&1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(4) **证** (1) 由 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&-2&-4\\-1&-1&-1\end{vmatrix}=-2\neq 0$,可知 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

(2) 将 $\boldsymbol{A}$ 作一系列初等行变换(相当于左乘初等矩阵),化 $\boldsymbol{A}$ 为单位矩阵.

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-2&-4\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第 1 行加到第 3 行}}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-2&-4\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行}\times\frac{1}{2}\text{ 加到第 1 行}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&-4\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第 2 行}\times\left(-\frac{1}{2}\right)}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 3 行}\times(-2)\text{ 加到第 2 行}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

将上述 4 次初等行变换用初等矩阵表达,得

$$\boldsymbol{E}_{23}(-2)\cdot\boldsymbol{E}_{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\boldsymbol{E}_{12}\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\boldsymbol{E}_{31}(1)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E},$$

其中,$\boldsymbol{E}_{ij}(a)$ 表示第 j 行乘以 a 加到第 i 行上,$\boldsymbol{E}_{k}(b)$ 表示第 k 行乘以 b,故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\left[\boldsymbol{E}_{23}(-2)\cdot\boldsymbol{E}_{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\boldsymbol{E}_{12}\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\boldsymbol{E}_{31}(1)\right]^{-1}\\&=[\boldsymbol{E}_{31}(1)]^{-1}\cdot\left[\boldsymbol{E}_{12}\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}\cdot\left[\boldsymbol{E}_{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}\cdot[\boldsymbol{E}_{23}(-2)]^{-1}\\&=\boldsymbol{E}_{31}(-1)\cdot\boldsymbol{E}_{12}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\boldsymbol{E}_{2}(-2)\cdot\boldsymbol{E}_{23}(2)\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(5) **解** 由 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}$,得$(\boldsymbol{A}^{*}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=-8\boldsymbol{E}$,可验证$(\boldsymbol{A}^{*}-2\boldsymbol{E})$ 可逆,故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=(\boldsymbol{A}^{*}-2\boldsymbol{E})^{-1}(-8\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}^{-1}\\&=-8(\boldsymbol{A}^{*}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=-8[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{*}-2\boldsymbol{E})]^{-1}\\&=-8(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}-2\boldsymbol{A})^{-1}=-8(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})^{-1},\end{aligned}$$

而 $|\boldsymbol{A}|=-2$,故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=-8(-2\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})^{-1}=-8[-2(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})]^{-1}\\&=-8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}=4(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}.\end{aligned}$$

又
$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&-1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{B}=4\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&-1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

注 ①由$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,知$A$可逆,$A^*$也可逆,直接计算$A^*-2E$,证明$A^*-2E$可逆,计算量较大.

可考虑利用A的特征值$\lambda_1=1,\ \lambda_2=-2,\ \lambda_3=1$,故$A^*$的特征值为

$$\frac{|A|}{\lambda_1}=\frac{-2}{1}=-2,\ \frac{|A|}{\lambda_2}=\frac{-2}{-2}=1,\ \frac{|A|}{\lambda_3}=\frac{-2}{1}=-2,$$

A^*-2E的特征值为$-2-2,1-2,-2-2$,故

$$|A^*-2E|=(-4)\times(-1)\times(-4)\neq0,$$

所以A^*-2E可逆.

②验证A^*-2E可逆,也可利用公式$AA^*=|A|E=-2E$,故$A^*=-2A^{-1}$,即

$$A^*-2E=-2A^{-1}-2E=-2(A^{-1}+E)=-2(A^{-1}+E)$$

$$=-2\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]=-2\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$

显然可逆.

(6) 解 记$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$,则$|A|=0$,故$A$不可逆.

令$X=\begin{pmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\\x_3&y_3\end{pmatrix}$,则$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$,$A\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,只要解两个非齐次线性方程组.对增广矩阵作初等行变换,

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&1&0\\2&1&-1&2\\-1&-1&2&-2\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&1&0\\0&1&-3&2\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

解得其通解为$(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=k_1(-1,3,1)^{\mathrm{T}}+(0,2,0)^{\mathrm{T}}$.

同样解得另一个方程组的通解为$(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}=k_2(-1,3,1)^{\mathrm{T}}+(1,-2,0)^{\mathrm{T}}$,故

$$X=\begin{pmatrix}-k_1&1-k_2\\2+3k_1&-2+3k_2\\k_1&k_2\end{pmatrix}\ (k_1,k_2\text{为任意常数}).$$

(7) 证 要证A,B是正交矩阵,只要证$A^{\mathrm{T}}A=E_m,B^{\mathrm{T}}B=E_n$.

依题设,$P^{\mathrm{T}}P=E$,则

$$P^{\mathrm{T}}P=\begin{pmatrix}A&C\\O&B\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}A&C\\O&B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^{\mathrm{T}}&O\\C^{\mathrm{T}}&B^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&C\\O&B\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A^{\mathrm{T}}A&A^{\mathrm{T}}C\\C^{\mathrm{T}}A&C^{\mathrm{T}}C+B^{\mathrm{T}}B\end{pmatrix}=E=\begin{pmatrix}E_m&O\\O&E_n\end{pmatrix},$$

故

$$A^{\mathrm{T}}A=E_m,\ A^{\mathrm{T}}C=O,\ C^{\mathrm{T}}A=O,\ C^{\mathrm{T}}C+B^{\mathrm{T}}B=E_n.$$

由P是正交矩阵,故P可逆,$|P|=|A||B|\neq0$,因此$|A|\neq0$,A可逆,从而A^{T}可逆.由$A^{\mathrm{T}}C=O$知$C=O$,所以$B^{\mathrm{T}}B=E_n$,于是A与B是正交矩阵.

拓展题

解答题

(1) 解 $\boldsymbol{AX}+2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BA}+2\boldsymbol{X}$ 变形为$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$.

由 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$可逆,知 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$,由此可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}^2&=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\\&=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\0&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&2&-4\\0&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\0&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(2) 解 注意到 $B=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\left(1,\frac{1}{2},0\right)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2$ 是一个数,则

$$\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=B\boldsymbol{A}.$$

同理,$\boldsymbol{A}^4=B^3\boldsymbol{A}$. 由 $2B^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{x}+B^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}$,得 $2B^3\boldsymbol{Ax}=B^3\boldsymbol{Ax}+B^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}$,故

$$[(2B^3-B^3)\boldsymbol{A}-B^4\boldsymbol{E}]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\gamma},\text{而 }\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\2&1&0\\1&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix},B=2,$$

于是
$$\begin{pmatrix}-8&4&0\\16&-8&0\\8&4&-16\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix},$$

解此非齐次线性方程组,得 $\boldsymbol{x}=\left(k,2k,k-\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$,$k$ 为任意常数.

第九章　向　量

基础题

一、选择题

(1) A.

解 对于选项 A：由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，知 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，故 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 必能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示. 选项 A 正确.

对于选项 B：若 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，而 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 又能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 就能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，这与 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关矛盾，故 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，所以选项 B 不正确.

同理，选项 C，D 也是错误的.

(2) C.

解 由线性无关的定义知，选项 A，B 不正确.

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，知任意两个向量也线性无关，但反过来不成立，如 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，其中任意两个向量均线性无关，但三个 2 维向量显然线性相关. 选项 D 不正确.

综上可知，选项 C 正确.

注 讨论向量组线性相关性的常用方法.

① 判别 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关的步骤：

(ⅰ) 当 $s>n$ 时，必线性相关；

(ⅱ) 当 $s=n$ 时，行列式 $|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)|=0$；

(ⅲ) 当 $s<n$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)<s$.

② 利用线性相关(无关)的等价说法：

列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关(无关)$\Leftrightarrow$ 方程组 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ 有非零解(只有零解)$\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)<s\,(=s)$.

③ 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的常用方法：

(ⅰ) 定义法：

设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$.

$\Downarrow$ 恒等变形：上式乘以数、向量、矩阵；重组

证 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$.

本定义见《2026 考研数学线性代数辅导讲义》.

(ⅱ) 用行列式或秩.

(ⅲ) 反证法.

(3) B.

解 考虑到选项中每个向量均为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合，可直接利用结论，记

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\ \boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1,$$

则
$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xlongequal{记}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\cdot\boldsymbol{C},$$
由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,及 $|\boldsymbol{C}|=2\neq 0$,即 $\boldsymbol{C}$ 可逆,故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关. 选项 B 正确.

注 ① 结论可用线性无关的定义或秩证明. 见《2026 考研数学线性代数辅导讲义》.

② 作为选择题也可用排除法,即观察出线性相关的选项,加以排除,如选项 A,显然
$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)-(\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0},$$
故线性相关,可排除选项 A.

(4)B.

解 由结论"以少表多,多的相关",命题①正确,而命题③是命题①的逆否命题,故命题③也正确. 如 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$,则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 必线性相关. 选项 B 正确.

(5)D.

解 三条直线交于一点,等价于有唯一的 x,y 满足方程组
$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0,\\a_2x+b_2y+c_2=0,\\a_3x+b_3y+c_3=0,\end{cases}$$
写成向量形式,即有唯一的 x,y 使得下列等式成立:
$$x\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix},$$
即 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+y\boldsymbol{\alpha}_2=-\boldsymbol{\alpha}_3$,所以 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示,且表示法唯一,从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,故 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=2$. 选项 D 正确.

注 选项 C:$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$,只能说明 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示,即三条直线有交点. 但 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$ 可能为 2 或 1,所以不能确定交点只有一个.

(6)C.

解 记 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\mu\boldsymbol{\alpha}_3$,则$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\k&\mu\end{pmatrix}$.

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,则矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 可逆,故 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=r\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\k&\mu\end{pmatrix}\right]=2$,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_2+\mu\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

反之,若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,取 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$,则对任意 k,μ,必有 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+\mu\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,故 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+\mu\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的必要非充分条件. 选项 C 正确.

(7)A.

解 依题设,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的前三个分量组成的向量组线性无关,所以增加分量后仍线性无关. 故选项 A 正确.

(8)B.

解 依题意,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 可互相线性表示,故其秩相同,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 选项 B 正确.

二、填空题

(1)6.

解 对于3个3维向量线性相关性的问题，用行列式或秩. 本题用秩进行计算.

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-1&k\\3&1&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&-5&k+4\\0&-5&10\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&-5&k+4\\0&0&6-k\end{pmatrix},$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<3$，故 $k=6$.

(2) $k(5,6,9)^{\mathrm{T}}, k\neq 0$.

解 设所求向量为 $\boldsymbol{\gamma}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2=-y_1\boldsymbol{\beta}_1-y_2\boldsymbol{\beta}_2$，则

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2=0.$$

对 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$ 作初等行变换化为最简阶梯形，有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\begin{pmatrix}1&2&2&-1\\1&3&3&0\\2&3&5&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&-1\\0&1&1&1\\0&-1&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&-1\\0&1&1&1\\0&0&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\end{pmatrix}.$$

令 $y_2=k\ (k\neq 0)$，则

$$y_1=-2k,\ x_2=k,\ x_1=3k$$

故 $\boldsymbol{\gamma}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2=k(5,6,9)^{\mathrm{T}}\ (k\neq 0)$.

三、解答题

(1) 解 利用结论：列(行)向量组作初等行(列)变换，相关性不变(且向量的位置不变).

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}0&1&-2&-1\\4&1&4&1\\2&0&3&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2&0&3&1\\4&1&4&1\\0&1&-2&-1\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}2&0&3&1\\0&1&-2&-1\\0&1&-2&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2&0&3&1\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=2$，故取 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为一个极大线性无关组，且

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_4=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2.$$

注 由矩阵 $\begin{pmatrix}2&0&3&1\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 得，$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 是错误的.

(2) 解 $\boldsymbol{\beta}$ 是否可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，等价于方程组 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$ 是否有解，即考虑方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\x_2-x_3=b,\\2x_1+3x_2+ax_3=4,\\3x_1+5x_2+x_3=7,\end{cases}\qquad ①$$

对方程组①的增广矩阵作初等行变换化为阶梯形：

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\\3&5&1&7\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\0&1&a-2&2\\0&2&-2&4\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\0&0&a-1&2-b\\0&0&0&4-2b\end{array}\right).$$

(1) 当 $4-2b\neq 0$，即 $b\neq 2$ 时，方程组无解，此时 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(2) 当 $b=2$ 且 $a\neq 1$ 时,$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$,方程组有唯一解$(-1,2,0)^{\mathrm{T}}$,即

$$\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,$$

线性表示唯一.

(3) 当 $b=2$ 且 $a=1$ 时,$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$,方程组有无穷多解.

令 $x_3=t$,则 $x_2=t+2$, $x_1=-1-2t$(t 为任意常数),故

$$\boldsymbol{\beta}=(-1-2t)\boldsymbol{\alpha}_1+(2+t)\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3,$$

线性表示不唯一.

注 此类含参数的向量组的线性表示以及互为线性表示(等价)问题是常考题型.

(3) 解 由 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,知方程组

$$\begin{pmatrix}1&3&9\\2&0&6\\-3&1&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu\\1\\0\end{pmatrix}$$

有解,对增广矩阵进行初等行变换,

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1&3&9&\mu\\2&0&6&1\\-3&1&-7&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&3&9&\mu\\0&-6&-12&1-2\mu\\0&10&20&3\mu\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&3&9&\mu\\0&1&2&\dfrac{2\mu-1}{6}\\0&0&0&\dfrac{3\mu}{10}-\dfrac{2\mu-1}{6}\end{array}\right),$$

故$\dfrac{3\mu}{10}-\dfrac{2\mu-1}{6}=0$,解得 $\mu=5$.

又 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,且 $\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$,故 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$. 由已知

$$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2,$$

得 $|(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)|=\begin{vmatrix}0&k&5\\1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=0$,解得 $k=15$.

注 由$\begin{pmatrix}1&3&9\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$,知 $\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(4) 证 证明向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价的基本方法是定义法,即证明(Ⅰ)与(Ⅱ)可以互相线性表示,而线性表示的问题可转化为解非齐次线性方程组,解方程组一般用初等变换.

记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)$,则

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:cccc}2&0&1&3&1&1&2\\3&1&0&1&1&1&1\\5&2&0&2&1&-1&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:cccc}1&0&0&0&1&3&2\\0&1&0&1&-2&-8&-5\\0&0&1&3&-1&-5&-2\end{array}\right),$$

故 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解,且 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_1&=0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+1\cdot\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\\\boldsymbol{\beta}_2&=1\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+(-2)\boldsymbol{\alpha}_2+(-1)\boldsymbol{\alpha}_3,\\\boldsymbol{\beta}_3&=3\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+(-8)\boldsymbol{\alpha}_2+(-5)\boldsymbol{\alpha}_3,\\\boldsymbol{\beta}_4&=2\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+(-5)\boldsymbol{\alpha}_2+(-2)\boldsymbol{\alpha}_3.\end{aligned}$$

$$(\boldsymbol{B}\,\vdots\,\boldsymbol{A})=\left(\begin{array}{cccc:ccc}3&1&1&2&2&0&1\\1&1&1&1&3&1&0\\2&1&-1&0&5&2&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc:ccc}1&1&1&1&3&1&0\\0&-1&-3&-2&-1&0&0\\0&0&4&3&-5&-3&1\end{array}\right),$$

显然 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{B}\,\vdots\,\boldsymbol{A})=3$,故 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{A}$ 有无穷多解,即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性表示.

综上可知，向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价.

注 证明(Ⅰ)与(Ⅱ)等价，其实只要证明 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解，且 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{A}$ 有解即可.

(5) 证 由已知条件，知每一个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 线性表示.

令 $\boldsymbol{\alpha}_i=a_{i1}\boldsymbol{\beta}_1+a_{i2}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{ik}\boldsymbol{\beta}_k(i=1,2,3,\cdots,k)$，即

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{k1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{k2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1k}&a_{2k}&\cdots&a_{kk}\end{pmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{C}=(a_{ji})_{k\times k}$，则 $k\geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{C})\geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k)=k$，故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{C})=k$，所以 $\boldsymbol{C}$ 可逆，于是

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k)\boldsymbol{C}^{-1}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k),$$

即 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性表示，所以两个向量组等价.

注 用矩阵表达已知条件是线性代数中常用的方法.

(6) 证 依题设，只需证明(Ⅱ)可由(Ⅰ)线性表示.

令 $\mathrm{r}(\text{Ⅰ})=\mathrm{r}(\text{Ⅱ})=r(r\leqslant s,r\leqslant t)$，则不妨设(Ⅰ)与(Ⅱ)的极大线性无关组分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$.

由已知(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表示，而(Ⅱ)可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性表示，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性表示，从而向量组(Ⅲ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 的秩也为 r，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，故它也是(Ⅲ)的一个极大线性无关组，所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，于是向量组(Ⅱ)可由(Ⅰ)线性表示.

综上所述，向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价.

注 设有向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)，则

① $\mathrm{r}(\text{Ⅰ})=\mathrm{r}(\text{Ⅱ})\not\Rightarrow$(Ⅰ)与(Ⅱ)等价;

② 若 $\mathrm{r}(\text{Ⅰ})=\mathrm{r}(\text{Ⅱ})$，且(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表示，或者(Ⅱ)可由(Ⅰ)线性表示 $\Rightarrow$(Ⅰ)与(Ⅱ)等价.

(7) 证 方法一：只要证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关即可，用定义证明.

设
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4(\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4)=\mathbf{0}, \qquad ①$$

由 $\mathrm{r}(\text{Ⅰ})=\mathrm{r}(\text{Ⅱ})=3$，知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，故 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

设 $\boldsymbol{\alpha}_4=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3$，将其代入①式，得

$$(k_1-\lambda_1k_4)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-\lambda_2k_4)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_3-\lambda_3k_4)\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_5=\mathbf{0}.$$

由 $\mathrm{r}(\text{Ⅲ})=4$，知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关，故

$$\begin{cases}k_1\qquad\qquad -\lambda_1k_4=0,\\ \qquad k_2\qquad -\lambda_2k_4=0,\\ \qquad\qquad k_3 -\lambda_3k_4=0,\\ \qquad\qquad\qquad k_4=0,\end{cases}$$

解得 $k_4=k_3=k_2=k_1=0$ 且解唯一，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，即秩为4.

方法二：利用向量组的秩证明.

由 $\mathrm{r}(\text{Ⅱ})=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\mathrm{r}(\text{Ⅰ})=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，知 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

又 $\mathrm{r}(\text{Ⅲ})=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5)=4$，知 $\boldsymbol{\alpha}_5$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，故 $\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 也不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示(否则由 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，可得出 $\boldsymbol{\alpha}_5$ 也能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示)，故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4)=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)+1=3+1=4$.

(8) 证 方法一：由特征值的定义，有 $\boldsymbol{A\alpha}_1=-2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$. 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}, \qquad ①$$

用 $\boldsymbol{A}$ 左乘①式可得

$$-2k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0}. \qquad ②$$

由 ①−②,得 $3k_1\boldsymbol{\alpha}_1-k_3\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$. 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,所以 $k_1=k_3=0$,代入 ① 式得 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$. 又 $\boldsymbol{\alpha}_2\neq\mathbf{0}$($\boldsymbol{\alpha}_2$ 是特征向量),故$k_2=0$,从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

方法二:由
$$\boldsymbol{A\alpha}_1=-2\boldsymbol{\alpha}_1\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1=-3\boldsymbol{\alpha}_1,$$
$$\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0},$$
$$\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2,$$
设
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0},\tag{①}$$
用 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 左乘 ① 式,得 $-3k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_3\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$. 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,知 $k_1=k_3=0$,代入 ① 式,得 $k_2=0$,从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

注 用定义法证明线性无关,选择适当的矩阵乘以定义式,需根据题目的条件而定,但目标是使定义式"变短",从而证明定义式中的所有 $k=0$.

(9) 解 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系所含解向量的个数为 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=4-2=2$. 又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的分量不成比例,知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系.

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化,令
$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,3)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=(-1,1,4,-1)^{\mathrm{T}}-\frac{1}{3}(1,1,2,3)^{\mathrm{T}}=\frac{2}{3}(-2,1,5,-3)^{\mathrm{T}}.$$
将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 单位化,得
$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{15}}(1,1,2,3)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{39}}(-2,1,5,-3)^{\mathrm{T}},$$
故 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$ 为所求.

综合题

一、选择题

(1)C.

解 对于选项 C,用反证法. 假设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性相关,则存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_t$,使得
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t=\mathbf{0},\tag{①}$$
式 ① 两边同乘以 $\boldsymbol{A}$,得
$$\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t)=k_1\boldsymbol{A\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{A\alpha}_t=\mathbf{0},$$
故 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_t$ 线性相关,即(Ⅱ)线性相关,与条件矛盾,所以(Ⅰ)线性无关.

取矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,知选项 A,B 不正确,而选项 D 显然不正确. 故选项 C 正确.

(2)C.

解 由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,知当 $\boldsymbol{B}_{3\times3}$ 可逆时,有 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 线性无关.

对于选项 A,因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,无论 $\boldsymbol{A}_{3\times3}$ 是什么矩阵,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 均线性相关.

对于选项 B,D,无论 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是否相关,均存在 $\boldsymbol{A}_{3\times3},\boldsymbol{B}_{3\times3}$ 使得 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 线性相关,故选项 B,D 不正确. 综上可知,选项 C 正确.

(3)C.

解 两个向量组等价是指这两个向量组可以互相线性表示.

由已知条件 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$,$k_1k_3\neq0$,$k_2$ 是否为零不能确定,故不能确定 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是否可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,所以选项 B,D 排除;同样也不能确定 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是否等价,所以选项 A 不正确.

对于选项 C,由 $k_1k_3\neq0$,知 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,即 $\boldsymbol{\alpha}_1=-\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{k_3}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_3$. 同理,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示,又 $\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1$,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 等价. 选项 C 正确.

(4)D.

解 对于选项 A:在选项 A 的条件下,可得 r(Ⅱ)$\leqslant$r(Ⅰ),不能保证 r(Ⅱ)$=$r(Ⅰ),故不能推得(Ⅱ)线性无关.

对于选项 B:由 $k \geqslant$ r(Ⅱ)$\geqslant$ r(Ⅰ)$= k$,得 r(Ⅱ)$= k$,故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 线性无关,选项 B 的条件是充分条件,但不是必要条件,如(Ⅰ)$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$,(Ⅱ)$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$,均线性无关,但(Ⅰ)不能由(Ⅱ)线性表示.

对于选项 C:由(Ⅰ)与(Ⅱ)等价,即(Ⅰ)与(Ⅱ)可互为线性表示,故选项 C 不是必要条件.

对于选项 D:矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k)$ 与 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k)$ 等价是指,$\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换化为 $\boldsymbol{B}$,故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$. 在选项 D 的条件下,可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$,又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关,故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 线性无关. 反之,若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 线性无关,故 r(Ⅱ)$=$r(Ⅰ)$=k$,即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=k$,所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价. 选项 D 正确.

注 应注意向量组(Ⅰ)、(Ⅱ)等价与矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k)$、$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k)$ 等价的区别:

① 向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价 $\overset{\Rightarrow}{\nLeftarrow}$ r(Ⅰ)$=$r(Ⅱ);

② 同型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

(5)A.

解 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$,由 $\boldsymbol{\beta}_i$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交,知 $\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,3,4)$ 均是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的非零解向量. 由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$,知 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系最多只含一个非零解向量,故

$$1\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)\leqslant n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=4-3=1,$$

从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=1$,故选项 A 正确.

注 ① 列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解 $\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的行向量均正交.

② 列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的解 $\Rightarrow \boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示(线性组合的系数为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在对应向量组下的坐标).

(6)B.

解 对于选项 B:若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解,考虑方程组

$$(\mathrm{I})\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0},\ (\mathrm{II})\begin{cases}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0},\\\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0},\end{cases}(\mathrm{III})\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0},$$

则方程组(Ⅰ)(Ⅱ)(Ⅲ)同解,故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$,即 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价. 反之,若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价,记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\beta}_m\end{pmatrix},$$

即列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}}$ 等价,故存在矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$,使得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}})=(\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}})\boldsymbol{P},$$
$$(\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}})=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Q},$$

所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$. 故由 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$;反之,由 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$. 由此可知,$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解.

对于选项 A,由选项 B 的证明知其显然不正确.

对于选项 C,相当于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$,它是必要条件而非充分条件.

对于选项 D,举反例,如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

显然,$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$,$\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$同解,但$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$与$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$不同解.

(7)D.

解 将$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$按列分块,有

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),\ \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n).$$

由$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BQ}$,得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}q_{11}&q_{12}&\cdots&q_{1n}\\q_{21}&q_{22}&\cdots&q_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\q_{n1}&q_{n2}&\cdots&q_{nn}\end{pmatrix},$$

即向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$线性表示.

又由$\boldsymbol{Q}$可逆,则$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AQ}^{-1}$. 即

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{Q}^{-1},$$

即向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示.

故$\boldsymbol{B}$的列向量组与$\boldsymbol{A}$的列向量组等价. 选项A正确.

类似地,将$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$按行分块,由$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PB}$,可得$\boldsymbol{B}$的行向量组与$\boldsymbol{A}$的行向量组等价. 选项B正确.

当$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBQ}$时,由$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$均为可逆矩阵,知$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$,所以矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$等价. 选项C正确.

排除选项A,B,C. 选D.

例如:取$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,则$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBQ}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,显然$\boldsymbol{B}$的行(列)向量组与$\boldsymbol{A}$的行(列)向量组不等价.

(8)B.

解 当$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$时,方程组$\boldsymbol{ABX}=\mathbf{0}$与$\boldsymbol{BX}=\mathbf{0}$是同解的.

设$\boldsymbol{\alpha}$是$\boldsymbol{BX}=\mathbf{0}$的解,则$\boldsymbol{B\alpha}=\mathbf{0}$,从而$\boldsymbol{AB\alpha}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B\alpha})=\mathbf{0}$,即$\boldsymbol{\alpha}$是$\boldsymbol{ABX}=\mathbf{0}$的解.

设$\boldsymbol{\alpha}$是$\boldsymbol{ABX}=\mathbf{0}$的解,则$\boldsymbol{AB\alpha}=\mathbf{0}$,从而$\boldsymbol{B\alpha}$是$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$的解.

因$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$,知$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$只有零解,故$\boldsymbol{B\alpha}=\mathbf{0}$,即$\boldsymbol{\alpha}$是$\boldsymbol{BX}=\mathbf{0}$的解.

故$\boldsymbol{ABX}=\mathbf{0}$与$\boldsymbol{BX}=\mathbf{0}$是同解的,所以$\boldsymbol{AB}$的行向量组与$\boldsymbol{B}$的行向量组等价.

选项B正确.

二、填空题

-5.

解 由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关$\Leftrightarrow|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=0$. 而

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}1&2&k-1\\k+2&-1&1\\3&1&-1\end{vmatrix}=(k+1)(k+5)=0,$$

解得$k=-1$或$k=-5$.

当$k=-1$时,$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,1,-1)^{\mathrm{T}}$,显然,$\boldsymbol{\alpha}_2$与$\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关,故$k=-5$.

三、解答题

(1) **解** (Ⅰ)对$\boldsymbol{A}$进行初等行变换,得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\2&4&3&-3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\0&0&3&-3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&-3\end{pmatrix}\xlongequal{\text{记}}\boldsymbol{C},$$

显然，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组.

（Ⅱ）对 $\boldsymbol{C}$ 作初等列变换，得

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&-3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B},$$

故 $\boldsymbol{E}_{21}(-1)\boldsymbol{E}_{32}(-2)\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{34}(1)=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{E}_{ij}(a)$ 表示单位矩阵第 j 行（或第 i 列）乘以 a 加到第 i 行（或第 j 列）上，则有

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}_{21}(-1)\boldsymbol{E}_{32}(-2)=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

(2) 解 4 个 3 维向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$ 一定线性相关. 若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，这与题设矛盾，于是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关，从而

$$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{vmatrix}=a-5=0,$$

解得 $a=5$，此时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示.

令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换.

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right),$$

故 $\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1+10\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$.

注 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，相当于方程组

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$$

无解.

若 3 个 3 维列向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关，则方程组必有解（因 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_i)=3$），故矛盾，则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关. 事实上，对 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=m$（即 $\boldsymbol{A}$ 行满秩），则 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 必有解.

(3) 解（Ⅰ）对增广矩阵 $(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})$ 施行初等行变换，有

$$\left(\begin{array}{ccc:cc}1&1&1&-1&1\\0&1&2&2&0\\1&2&a&1&b\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:cc}1&1&1&-1&1\\0&1&2&2&0\\0&1&a-1&2&b-1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:cc}1&1&1&-1&1\\0&1&2&2&0\\0&0&a-3&0&b-1\end{array}\right).$$

当 $a=3$ 时，$b\neq1$ 时，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解，即 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 不能同时由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

（Ⅱ）当 $a\neq3$ 时，对任意 b，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$. 记 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2)$，则 $\boldsymbol{A\eta}_1=\boldsymbol{\beta}_1$ 的解为 $(-3,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A\eta}_2=\boldsymbol{\beta}_2$ 的解为 $\left(1+\dfrac{b-1}{a-3},\dfrac{-2(b-1)}{a-3},\dfrac{b-1}{a-3}\right)^{\mathrm{T}}$，即表达式为

$$\boldsymbol{\beta}_1=-3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_3,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\left(1+\frac{b-1}{a-3}\right)\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{2(b-1)}{a-3}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{b-1}{a-3}\boldsymbol{\alpha}_3.$$

当 $a=3,b=1$ 时，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解，$\boldsymbol{A\eta}_1=\boldsymbol{\beta}_1$ 的解为 $k(1,-2,1)^{\mathrm{T}}+(-2,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A\eta}_2=\boldsymbol{\beta}_2$ 的

解为 $l(1,-2,1)^{\mathrm{T}}+(1,0,0)^{\mathrm{T}}$,故全部解为

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}k-2 & l+1\\ -2k & -2l\\ k+1 & l\end{pmatrix}\ (k,l\text{ 为任意常数}),$$

表达式为 $\boldsymbol{\beta}_1=(k-2)\boldsymbol{\alpha}_1-2k\boldsymbol{\alpha}_2+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_2=(l+1)\boldsymbol{\alpha}_1-2l\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$($k,l$ 为任意常数).

(4) **证** 方法一:用定义证明.

由已知条件,需证明从 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ 中去掉一个后,剩下的 k 个是线性无关的,不失一般性,不妨设去掉 $\boldsymbol{\alpha}_1$,即需证明 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ 线性无关.

设
$$\mu_2\boldsymbol{\alpha}_2+\mu_3\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\mu_k\boldsymbol{\alpha}_k+\mu_{k+1}\boldsymbol{\alpha}_{k+1}=\boldsymbol{0},\qquad ①$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_{k+1}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{\alpha}_k$ 代入 ① 式,整理得

$$\mu_{k+1}\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+(\mu_2+\mu_{k+1}\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(\mu_k+\mu_{k+1}\lambda_k)\boldsymbol{\alpha}_k=\boldsymbol{0},$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关,故 $\mu_{k+1}\lambda_1=\mu_2+\mu_{k+1}\lambda_2=\cdots=\mu_k+\mu_{k+1}\lambda_k=0$.

又 $\lambda_i\neq 0(i=1,2,\cdots,k)$,可得 $\mu_{k+1}=0,\mu_2=0,\cdots,\mu_k=0$,故 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ 线性无关.

方法二:不失一般性,考察向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$,(Ⅱ)$\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$.

由已知条件,(Ⅰ)与(Ⅱ)可互为线性表示,所以 r(Ⅰ)=r(Ⅱ)$=k$,即(Ⅱ)中 k 个向量是线性无关的.

方法三:用反证法证明.

假设 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ 线性相关,而已知 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关,故 $\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性表示,设

$$\boldsymbol{\alpha}_{k+1}=a_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_k\boldsymbol{\alpha}_k,\qquad ②$$

又
$$\boldsymbol{\alpha}_{k+1}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{\alpha}_k.\qquad ③$$

由 ③ − ② 得

$$\boldsymbol{0}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_2-a_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(\lambda_k-a_k)\boldsymbol{\alpha}_k,$$

其中至少有 $\lambda_1\neq 0$.这表明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性相关,与已知条件矛盾,故 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ 线性无关.

(5) **证** (1) 当 $m=n$ 时,利用结论.证明:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m|\neq 0$.

由

$$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^2,$$

知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq 0\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|^2\neq 0\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|\neq 0$.

(2) 当 $m<n$ 时,$\boldsymbol{A}$ 不是方阵,不能取行列式,利用方程组证明.

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\text{ 线性无关}\Leftrightarrow(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\text{ 只有零解}\\&\Longrightarrow\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\text{ 只有零解}\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|\neq\boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|\neq\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\text{ 只有零解}\\&\Longrightarrow\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\text{ 只有零解}\\&\Longrightarrow\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\text{ 只有零解}\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\text{ 线性无关}.\end{aligned}$$

综上所述,命题得证.

(6) **解** (Ⅰ) 令 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$,则 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\x_1+2x_2+3x_3=1,\\x_1+4x_2+9x_3=3.\end{cases}$

对方程组的增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 作初等行变换,得

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&2&3&1\\1&4&9&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&2&0\\0&3&8&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&2&0\\0&0&2&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&2\\0&1&0&-2\\0&0&1&1\end{array}\right),$$

解得唯一解 $x_1=2,x_2=-2,x_3=1$,故 $\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(Ⅱ) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_i=\lambda_i^n\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$,故

$$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}^n(2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=2\lambda_1^n\boldsymbol{\alpha}_1-2\lambda_2^n\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3^n\boldsymbol{\alpha}_3$$

$$=\begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^{n}\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}.$$

(7) 证 (Ⅰ) 用定义法. 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)=\mathbf{0}. \qquad ①$$

① 式两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$,得

$$k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2)=\mathbf{0},$$

即 $k_1\boldsymbol{b}+k_2(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b})=\mathbf{0}$,即 $k_1\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$,因 $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$,可得 $k_1=0$.

将 $k_1=0$ 代入 ① 式,有 $k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)=\mathbf{0}$,而 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\neq\mathbf{0}$,故 $k_2=0$,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

(Ⅱ) 由 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 都是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的非零解,且 $r(\boldsymbol{A})=n-1$,即 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 只有一个线性无关的解,所以 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关,即存在不全为零的 k_1,k_2,使得

$$k_1\boldsymbol{\beta}+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)=\mathbf{0},$$

可知 $k_1\neq0$(若 $k_1=0$,由 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\neq\mathbf{0}$,得 $k_2=0$,与 k_1,k_2 不全为零矛盾),故

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2,$$

所以 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示,即 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关.

(8) 证 令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-3&1\\2&1&-1\\7&0&-2\end{pmatrix},\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix},$$

则已知方程组为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$. 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解,知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{b}(i=1,2,3)$,所以

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\mathbf{0},$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\mathbf{0},$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解.

又 $\boldsymbol{A}$ 有一个子式 $\begin{vmatrix}1&-3\\2&1\end{vmatrix}=7\neq0$,知 $r(\boldsymbol{A})\geqslant2$,且 $|\boldsymbol{A}|=0$,故 $r(\boldsymbol{A})=2$,所以$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 只有一个线性无关的解,故 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

(9) 证 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_3$,且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是非零列向量,知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是不同特征值对应的特征向量,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+k_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}. \qquad ①$$

又

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3, \qquad ②$$
$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3, \qquad ③$$

将 ②、③ 式代入 ① 式,得

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0},$$

即

$$(k_1+k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+2k_2+4k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_1+3k_2+9k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}.$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,知

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0,\\k_1+2k_2+4k_3=0,\\k_1+3k_2+9k_3=0.\end{cases}$$

由于齐次线性方程组系数行列式为范德蒙德行列式且不为零,故只有零解 $k_1=k_2=k_3=0$,从而 $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

(10) 解 (Ⅰ) 对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换,有

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&5\\1&2&2&6\\1&a&2&5a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&5\\0&1&0&1\\0&a-1&0&5a-5\end{pmatrix}.$$

由 $r(A)=2$,知 $a-1=0$ 且 $5a-5=0$,得 $a=1$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知,当 $a=1$ 时,取 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 A 的一个极大线性无关组,

$$G=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&1\end{pmatrix}.$$

由题设,有

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&5\\1&2&2&6\\1&1&2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&1\end{pmatrix}H.$$

解上矩阵方程,作初等行变换,有

$$\left(\begin{array}{cc:cccc}1&1&1&1&2&5\\1&2&1&2&2&6\\1&1&1&1&2&5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc:cccc}1&1&1&1&2&5\\0&1&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc:cccc}1&0&1&0&2&4\\0&1&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

则 $H=\begin{pmatrix}1&0&2&4\\0&1&0&1\end{pmatrix}$,使得 $A=GH$.

注 此题实质是对矩阵作满秩分解:

设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩 $r(A)=r$,则存在列满秩矩阵 $G_{m\times r}$ 和行满秩矩阵 $H_{r\times n}$,使得 $A=GH$.

证 设 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,由 $r(A)=r$,可设 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的一个极大线性无关组. 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$ 线性表示,即

$$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir})\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1n}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k_{r1}&k_{r2}&\cdots&k_{rn}\end{pmatrix}_{r\times n}.$$

记 $G=(\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir})_{m\times r}$,$H=\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1n}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k_{r1}&k_{r2}&\cdots&k_{rn}\end{pmatrix}_{r\times n}$,则 $A=GH$. 显然 $G_{m\times r}$ 是秩为 r 的列满秩矩阵. 又 $r=r(A)\leqslant r(H)\leqslant r$,知 $r(H)=r$. $H_{r\times n}$ 是秩为 r 的行满秩矩阵.

拓展题

解答题

(1) 解 对 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\,\vdots\,\boldsymbol{\alpha})$ 作初等行变换,有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\,\vdots\,\boldsymbol{\alpha})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&3&4&2&0\\1&a+4&6&3&1\\1&2a+5&8&2a+3&3\\2&a+7&10&5&b\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&3&4&2&0\\0&a+1&2&1&1\\0&2a+2&4&2a+1&3\\0&a+1&2&1&b\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 3 & 4 & 2 & 0\\0 & a+1 & 2 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 2a-1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & b-1\end{array}\right).$$

(Ⅰ)当 $a\neq\frac{1}{2}$ 时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是一个极大线性无关组；

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=2$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是一个极大线性无关组.

(Ⅱ)由于 $\boldsymbol{\alpha}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示，即方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}$$

无解，故 $a=\frac{1}{2}$ 或 $b\neq 1$.

(2) 解 (Ⅰ)利用初等行变换，得

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1 & 3 & 9 & 0 & a & b\\2 & 0 & 6 & 3 & 2 & 1\\-3 & 1 & -7 & c & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 3 & 9 & 0 & a & b\\0 & -6 & -12 & 3 & 2-2a & 1-2b\\0 & 10 & 20 & c & 1+3a & 3b\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 3 & 9 & 0 & a & b\\0 & -6 & -12 & 3 & 2-2a & 1-2b\\0 & 0 & 0 & c+5 & \frac{13-a}{3} & \frac{5-b}{3}\end{pmatrix},$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，故 $b=5,a=13$. 又由于 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，故 $c=-5$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)有

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 3 & 9 & 0 & 13 & 5\\0 & -6 & -12 & 3 & -24 & -9\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 3 & 9 & 0 & 13 & 5\\0 & -2 & -4 & 1 & -8 & -3\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\x_2 & y_2 & z_2\\x_3 & y_3 & z_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1 & 3 & 9\\0 & -2 & -4\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，解 $\boldsymbol{B}_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，得

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}-3k_1\\-\frac{1}{2}-2k_1\\k_1\end{pmatrix}.$$

同理可得

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-3k_2 \\ 4-2k_2 \\ k_2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-3k_3 \\ \frac{3}{2}-2k_3 \\ k_3 \end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2}-3k_1 & 1-3k_2 & \frac{1}{2}-3k_3 \\ -\frac{1}{2}-2k_1 & 4-2k_2 & \frac{3}{2}-2k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$,其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

扫描二维码，获取更多免费资料

第十章　线性方程组

基础题

一、选择题

(1)B.

解 $Ax=b$ 的通解为 $Ax=0$ 的通解加上 $Ax=b$ 的一个特解，根据非齐次和齐次线性方程组解的性质与结构，知

$$A\left(\frac{\eta_1-\eta_2}{2}\right)=\frac{1}{2}(A\eta_1-A\eta_2)=0,$$

$$A\left(\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\right)=\frac{1}{2}(A\eta_1+A\eta_2)=b,$$

即 $\frac{1}{2}(\eta_1-\eta_2)$ 是 $Ax=0$ 的解，故排除选项 A，C.

因不能判定 $\eta_1-\eta_2$ 是否与 ξ_1 线性无关，所以不能选选项 D.

事实上，由 $\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)$ 是 $Ax=b$ 的解，且 ξ_1 与 $\xi_1-\xi_2$ 线性无关，所以 $\xi_1,\xi_1-\xi_2$ 是 $Ax=0$ 的基础解系，故选项 B 正确.

注 ① ξ_1 与 $\xi_1-\xi_2$ 线性无关可以从几何上看出，如图 10-1 所示，由于 ξ_1 与 $\xi_1-\xi_2$ 不共线，故线性无关.

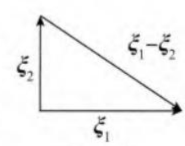


图 10-1

② 也可利用定义证明 ξ_1 与 $\xi_1-\xi_2$ 线性无关. 设 $k_1\xi_1+k_2(\xi_1-\xi_2)=0$，即

$$(k_1+k_2)\xi_1-k_2\xi_2=0.$$

由已知，ξ_1,ξ_2 是 $Ax=0$ 的基础解系，故线性无关，所以 $k_1+k_2=0,-k_2=0$，故 $k_1=k_2=0$，从而 ξ_1 与 $\xi_1-\xi_2$ 线性无关.

③ 一般地，对任意两个线性无关的向量 ξ_1 与 ξ_2，当 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}\neq 0$ 时，线性组合 $a\xi_1+b\xi_2$，$c\xi_1+d\xi_2$ 仍线性无关.

(2)C.

解 由 $AX=0$ 有两个线性无关的解，知 $AX=0$ 的基础解向量的个数 $n-\mathrm{r}(A)\geqslant 2$，即 $\mathrm{r}(A)\leqslant n-2$. 故 $\mathrm{r}(A^*)=0$，从而 $A^*=O$，所以任意 n 维列向量均是 $A^*X=0$ 的解. 因此，$AX=0$ 的解均是 $A^*X=0$ 的解. 选项 C 正确，选项 B 不正确，故选项 A 不正确. 对于选项 D，由 $AX=0$ 的基础解系至少包含两个解向量，知 $AX=0$ 有无穷多个非零解，从而 $AX=0$ 与 $A^*X=0$ 的公共解中有无穷多个非零解. 选项 D 不正确.

(3)A.

解 由 $Ax=0$，得 $A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}(Ax)=0$，故 $Ax=0$ 的解是 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$ 的解.

反之，若 x 是 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$ 的解，令 $Ax=b$，则 $b^{\mathrm{T}}=(Ax)^{\mathrm{T}}=x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$，从而

$$b^{\mathrm{T}}b=x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax=0,$$

于是 b 的各分量的平方和为 0，故 $b=0$，从而 $Ax=0$，因此 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$ 的解是 $Ax=0$ 的解. 选项 A 正确.

注 证明列向量 $b=0$，即证 b 的每个分量为 0，可证 $b^{\mathrm{T}}b=0$，这是证明向量为零向量的一种方法.

(4)C.

解 方程组解的判别,关键是讨论其秩.由已知,对任意n维列向量$\boldsymbol{\alpha}$,有$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$,故$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$的基础解系有$n$个,即$n-r(\boldsymbol{A}^*)=n$,故$r(\boldsymbol{A}^*)=0$,由$r(\boldsymbol{A})$与$r(\boldsymbol{A}^*)$的关系,知$r(\boldsymbol{A})<n-1$,所以$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有$k=n-r(\boldsymbol{A})>n-(n-1)=1$个基础解系,故选项C正确.

(5)C.

解 由$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,知$\boldsymbol{B}$的每一个列向量都是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解.

又$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$,知$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解,从而

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & \lambda^2\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2=0,$$

所以$\lambda=1$.又若$|\boldsymbol{B}|\neq 0$,则$\boldsymbol{B}$可逆,故$\boldsymbol{ABB}^{-1}=\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,与$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$矛盾,所以$|\boldsymbol{B}|=0$.选项C正确.

注 由$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$不能直接推得$|\boldsymbol{B}|\neq 0$,应注意矩阵不为零与行列式不为零的区别.

(6)C.

解 对增广矩阵$\overline{\boldsymbol{A}}$作初等行变换,

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -3 & 1 & b_1\\ 1 & -2 & 1 & b_2\\ 2 & k & 3 & b_3\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & b_2\\ 0 & 1 & -1 & b_1-2b_2\\ 0 & k+4 & 1 & b_3-2b_2\end{array}\right)$$
$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & b_2\\ 0 & 1 & -1 & b_1-2b_2\\ 0 & k+5 & 0 & b_1+b_3-4b_2\end{array}\right),$$

由方程组有解,知$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$.

当$k\neq-5$时,对任意向量$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)^{\mathrm{T}}$,有$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$;

当$k=-5$时,$r(\boldsymbol{A})=2$,当$b_1+b_3-4b_2=0$,即$b_1+b_3=4b_2$时,$r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$.选项C正确.

(7)B.

解 对于选项B,由$r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{A})\leqslant n<m$,而$\boldsymbol{AB}$为$m\times m$矩阵,故必有$|\boldsymbol{AB}|=0$.选项B正确.

(8)D

解 由$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,知$r(\boldsymbol{AB})=m$.又$r(\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{AB})=m$,且$r(\boldsymbol{A})\leqslant m$,知

$$r(\boldsymbol{A})=m.$$

即$\boldsymbol{A}$的行向量组线性无关,从而其延伸组必线性无关.故$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\alpha})=m$.

方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\alpha}$必有解,但有唯一解,还是有无穷多解,不确定.

同理可得$r(\boldsymbol{B})=m$,即$\boldsymbol{B}$的列向量组线性无关,$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$仅有零解.

此时,$r(\boldsymbol{B},\boldsymbol{\beta})$有可能为$m+1$,$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{\beta}$可能无解,从而排除选项A,B,C.

选项D正确.

二、填空题

(1)-1或0.

解 对非齐次线性方程组的增广矩阵$\overline{\boldsymbol{A}}$作初等行变换,

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 3\\ 2 & k+4 & -5 & 6\\ -1 & -2 & k & -3\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & k & -7 & 0\\ 0 & 0 & k+1 & 0\end{array}\right),$$

由方程组有无穷多解,知$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})<3$,故$k=-1$或$k=0$.

(2)-1

解 对$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$作初等行变换,有

$$\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&1&1&0\\2&3&a+2&3&1\\1&a&-2&4&2\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&1&1&0\\0&-1&a&1&1\\0&a-2&-3&3&2\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&1&1&0\\0&1&-a&-1&-1\\0&0&a^2-2a-3&a+1&a\end{array}\right)$$

依题设,知 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}_1)$,且 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}_2)$.

当 $a^2-2a-3=(a+1)(a-3)\neq 0$ 时,即 $a\neq -1$ 或 $a\neq 3$,有

$$r(\boldsymbol{A})=3,\ r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}_1)=3,\ r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}_2)=3,$$

从而 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}_1$ 与 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}_2$ 均有解. 与题设不符合,故

$$a^2-2a-3=0,$$

得 $a=-1$ 或 $a=3$.

当 $a=-1$ 时,$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}_1)=2$,$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}_2)=3$,$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}_1$ 有解且 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}_2$ 无解.

当 $a=3$ 时,$r(\boldsymbol{A})=2$,$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}_1)=3$,$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}_2)=3$,$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}_1$ 无解,$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}_2$ 无解.

综上所述,$a=-1$.

(3) $k_1(0,-1,-3,1)^T+k_2(1,1,1,2)^T+(1,1,-2,0)^T$ (k_1,k_2 为任意常数).

解 由 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$,知

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta},$$

即 $(1,1,-2,0)^T\xlongequal{记}\boldsymbol{\gamma}_1$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解.

同理 $(1,2,1,-1)^T\xlongequal{记}\boldsymbol{\gamma}_2$,$(2,3,2,1)^T\xlongequal{记}\boldsymbol{\gamma}_3$ 均是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解,则

$$\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2=(0,-1,-3,1)^T,$$
$$\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\gamma}_3-\boldsymbol{\gamma}_2=(1,1,1,2)^T$$

是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解,且 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 线性无关,故 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 至少有两个线性无关的解,从而 $4-r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$,即 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$.

又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,知 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\geqslant 2$,从而 $r(\boldsymbol{A})=2$,$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 就是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$k_1(0,-1,-3,1)^T+k_2(1,1,1,2)^T+(1,1,-2,0)^T\ (k_1,k_2\text{ 为任意常数}).$$

三、解答题

(1) 解 对增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 作初等行变换,

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{cccc:c}2&-1&4&-3&-4\\1&0&1&-1&-3\\3&1&1&0&1\\7&0&7&-3&3\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&1&-1&-3\\0&1&-2&1&-2\\0&0&0&2&12\\0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

取 x_3 为自由变量,令 $x_3=0$,得非齐次线性方程组的一个特解为 $\boldsymbol{x}^*=(3,-8,0,6)^T$,令 $x_3=1$,解得 $x_4=0$, $x_2=2$, $x_1=-1$,故 $(-1,2,1,0)^T$ 为对应齐次线性方程组的基础解系,所求通解为

$$k(-1,2,1,0)^T+(3,-8,0,6)^T\ (k\text{ 为任意常数}).$$

(2) 解 已知方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵,可以通过行列式讨论参数 λ,确定其解的情况.

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&\lambda&-1\\\lambda&-1&1\\4&5&-5\end{vmatrix}=(5\lambda+4)(\lambda-1),$$

当 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq -\dfrac{4}{5}$ 时,$|\boldsymbol{A}|\neq 0$,方程组有唯一解.

当 $\lambda=1$ 时，$|\boldsymbol{A}|=0$，对增广矩阵$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})$作初等行变换，

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}2&1&-1&1\\1&-1&1&2\\4&5&-5&-1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&1&2\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

方程组有无穷多解，为 $k(0,1,1)^{\mathrm{T}}+(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$($k$ 为任意常数).

当 $\lambda=-\dfrac{4}{5}$ 时，

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}10&-4&-5&5\\4&5&-5&-10\\4&5&-5&-1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}10&-4&-5&5\\4&5&-5&-10\\0&0&0&9\end{array}\right),$$

此时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=3$，方程组无解.

注 含有参数的线性方程组解的讨论方法：

① $\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，可利用$|\boldsymbol{A}|$讨论参数(当然也可利用初等行变换). 当$|\boldsymbol{A}|\neq0$时，方程组有唯一解，用克拉默法则求其唯一解；当$|\boldsymbol{A}|=0$时，确定参数，再利用增广矩阵施行初等行变换化为阶梯形进行判别，有解时，求出通解(应注意，$|\boldsymbol{A}|=0$ 时，方程组可能无解).

② $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}(m\neq n)$，一般利用初等行变换化增广矩阵为阶梯形，讨论参数，确定其秩，从而求解.

含参数方程组是常考题，要求熟练掌握.

(3) 解 (Ⅰ) 方程组 ① 的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$，可求得基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

方程组 ② 的系数矩阵为 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&-1&1\end{pmatrix}$，解得基础解系为

$$\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}_2=(-1,-1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

(Ⅱ) 求方程组 ① 与 ② 的非零公共解，就是求$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的非零解.

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\1&-1&1&0\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&-2&1&0\\0&0&-1&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\eta}=(-1,1,2,1)^{\mathrm{T}}$，故非零公共解为 $k(-1,1,2,1)^{\mathrm{T}}$(k 是不为零的任意常数).

注 由第(Ⅰ)问已求出方程组 ① 与 ② 的基础解系，可令

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2,$$

即解方程组 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2-l_1\boldsymbol{\beta}_1-l_2\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{0}$，故

$$\begin{cases}-k_1+l_2=0,\\k_1-l_1+l_2=0,\\k_2-l_1=0,\\k_1-l_2=0,\end{cases}$$

解得 $l_1=k_2=2k_1=2l_2$，即

$$\begin{aligned}k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2&=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+2k_1\boldsymbol{\alpha}_2=k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2)\\&=l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2=2l_2\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2\\&=l_2(2\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)=k(-1,1,2,1)^{\mathrm{T}}\ (k\neq0),\end{aligned}$$

其中，记 $k=l_1=k_2=2k_1=2l_2$.

(4) 解 方程组(Ⅰ)的系数矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$,故(Ⅰ)的基础解系为$\boldsymbol{\xi}_1=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\xi}_2=(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$,通解为

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2=(-k_2,k_2,k_1,k_2)^{\mathrm{T}}\ (k_1,k_2\text{ 为任意常数}).$$

由已知,得(Ⅱ)的通解为

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2=(-l_1,2l_1-l_2,2l_1-l_2,l_1)^{\mathrm{T}}\ (l_1,l_2\text{ 为任意常数}),$$

令$(-k_2,k_2,k_1,k_2)^{\mathrm{T}}=(-l_1,2l_1-l_2,2l_1-l_2,l_1)^{\mathrm{T}}$,得

$$l_1=k_2,\ l_2=2k_2-k_2=k_2,\ k_1=k_2.$$

令$k_2=k$,则(Ⅰ)与(Ⅱ)的非零公共解为$k(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$(k为不为零的任意常数).

(5) 解 (Ⅰ)对方程组①的增广矩阵作初等行变换,

$$\overline{\boldsymbol{A}}_1=\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&-1&-2\\0&1&0&-1&-4\\0&-4&-1&6&21\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&-1&-2\\0&1&0&-1&-4\\0&0&1&-2&-5\end{array}\right),$$

解得方程组①的通解为

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=(-2,-4,-5,0)^{\mathrm{T}}+k(1,1,2,1)^{\mathrm{T}}(k\text{ 为任意常数}).$$

(Ⅱ)将方程组①的通解$x_1=-2+k$,$x_2=-4+k$,$x_3=-5+2k$,$x_4=k$代入方程组②的第一个方程,得$(-2+k)+a(-4+k)-(-5+2k)-k=-5$,由$k$的任意性,可得$a=2$.同样将方程组①的通解代入方程组②的第二个方程,得

$$b(-4+k)-(-5+2k)-2k=-11,$$

解得$b=4$.

将方程组①的通解代入方程组②中的第三个方程,得$(-5+2k)-2k=-c+1$,解得$c=6$,故方程组②为

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3-x_4=-5,\\4x_2-x_3-2x_4=-11,\\x_3-2x_4=-5.\end{cases}$$

对其增广矩阵作初等行变换,得

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1&2&-1&-1&-5\\0&4&-1&-2&-11\\0&0&1&-2&-5\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&-1&-2\\0&1&0&-1&-4\\0&0&1&-2&-5\end{array}\right),$$

故方程组②的通解为$(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=(-2,-4,-5,0)^{\mathrm{T}}+k(1,1,2,1)^{\mathrm{T}}$,与方程组①的通解相同.

综上所述,当$a=2,b=4,c=6$时,方程组①与②同解.

(6) 解 由$|\boldsymbol{A}|=0,A_{11}\neq0$,得$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$,故$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=1$,即$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$等价于方程

$$A_{11}x_1+A_{21}x_2+\cdots+A_{n1}x_n=0. \qquad ①$$

因$A_{11}\neq0$,故方程①有下列线性无关的解,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_1&=(-A_{21},A_{11},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\\\boldsymbol{\alpha}_2&=(-A_{31},0,A_{11},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\\&\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_{n-1}&=(-A_{n1},0,\cdots,0,A_{11})^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

解向量个数为$n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=n-1$,故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$是原方程组的基础解系,通解为

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}\ (k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}\text{ 为任意常数}).$$

(7) 解 由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$的通解结构及已知条件,有$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3-1=2$,

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta},\ (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，故

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2)$$
$$\xlongequal[\text{列变换}]{\text{初等}}\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\mathbf{0})=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2,$$

所以 $\boldsymbol{By}=\mathbf{0}$ 有 $4-\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=2$ 个基础解. 又

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0},$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2)=\mathbf{0},$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,$$

故 $\boldsymbol{By}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 的通解为

$$k_1(1,-2,3,0)^{\mathrm{T}}+k_2(1,2,0,-1)^{\mathrm{T}}+(1,-1,0,0)^{\mathrm{T}}\quad(k_1,k_2\text{ 为任意常数}).$$

(8) 解 由已知条件及 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解结构，只需求 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系，而基础解系有 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=4-2=2$ 个，$(0,1,-3,0)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的一个解，于是再求一个与$(0,1,-3,0)^{\mathrm{T}}$ 线性无关的解即可.

注意到 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，事实上，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{A\alpha}_1+\boldsymbol{A\alpha}_2-2\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}=\mathbf{0},$$

且 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3=(4,6,-8,4)^{\mathrm{T}}-2(1,2,-1,1)^{\mathrm{T}}=(2,2,-6,2)^{\mathrm{T}}$，

又$(2,2,-6,2)^{\mathrm{T}}$ 与$(0,1,-3,0)^{\mathrm{T}}$ 线性无关(分量不成比例)，所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$k_1\begin{pmatrix}0\\1\\-3\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\2\\-6\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}\quad(k_1,k_2\text{ 为任意常数}).$$

注 结论：设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 n 个解，当 $k_1+k_2+\cdots+k_n=1$ 时，$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解.

(9) 解 依题设，$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=2$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=1$，知 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，故

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&a&0\\1&1&-1\end{vmatrix}=2(1-a)=0,$$

解得 $a=1$，则

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的通解为 $k(-1,2,1)^{\mathrm{T}}$，k 为任意常数.

综合题

一、选择题

(1) D.

解 由 $r(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}$ 的行秩 $= \boldsymbol{A}$ 的列秩，及 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关，可知 $r(\boldsymbol{A}) = m$.

对于选项 A，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $n \times m$ 矩阵，$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = r(\boldsymbol{A}) = m$，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的列向量组线性无关，故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有零解.

对于选项 B，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，由 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) \leqslant r(\boldsymbol{a}) = m < n$，故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 必有非零解.

对于选项 C，$\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，$r(\boldsymbol{A}) = m$，故 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}_1) = m < n$，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1$ 必有无穷多个解.

对于选项 D，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $n \times m$ 矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}x = \boldsymbol{b}_2$ 有唯一解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \mid \boldsymbol{b}_2) = m$，但 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的列向量只有 m 个线性无关的 n 维向量($m < n$)，它不能表示任一个 n 维向量，故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2$ 可能无解，故选项 D 正确.

(2) C.

解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) < n$.

对于选项 A，由 $r(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) < n \nRightarrow r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$，故排除选项 A.

对于选项 B，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解 $\nRightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解，因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}) < n$，但可能 $r(\boldsymbol{A}) \neq r(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 可能无解.

对于选项 C，设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有两个不同解 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的非零解 $\Rightarrow r(\boldsymbol{A}) < n$，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解，即 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) < n$，故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解. 而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解时，肯定有两个不同解，故选项 C 正确.

对于选项 D，$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解. 这是结论，见《2026 考研数学线性代数辅导讲义》. 而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解 $\nRightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解(可能无解).

(3) A.

解 由已知，$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = n-1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系有 $n - r(\boldsymbol{A}) = 1$ 个向量.

因为 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 都正交，所以 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\beta}_1 = 0$，$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\beta}_2 = 0$，$i = 1, 2, \cdots, n-1$，从而

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_j = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_{n-1}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ j = 1, 2.$$

由此可知 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的两个不同解，故 $k(\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2)$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的通解.

由于 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 可能是零向量，故排除选项 C，D；由于 $\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2$ 也可能是零向量，故排除选项 B. 选项 A 正确.

(4) A.

解 记 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}$，依题设，知方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解，故

$$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}) < 3.$$

由 $\boldsymbol{A}$ 中有二阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$，所以 $r(\boldsymbol{A}) \geqslant 2$，故 $r(\boldsymbol{A}) = 2 = a$.

又

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & b & c & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \dfrac{4}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -\dfrac{1}{3} \\ 0 & 0 & b+c+2 & \dfrac{1}{3}b - \dfrac{8}{3} \end{array}\right).$$

由 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=2$,知 $b+c+2=0,\frac{1}{3}b-\frac{8}{3}=0$,得 $b=8,c=-10$.

选项 A 正确.

(5)D.

解 由已知,$r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=1$,故其特征值为 $2,0,\cdots,0$,实对称矩阵 $\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的特征值为 $-3,1,\cdots,1$,故 $r(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=n$,即 $\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 可逆.

由 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})$,知 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示.

又 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})^{-1}$,知 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性表示,从而 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价. 故 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的行向量组与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的行向量组等价,所以 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 同解. 选项 D 正确.

由选项 D 正确,可排除选项 C. 由于 $\boldsymbol{A}$ 不一定可逆,可排除选项 A,B.

(6)B.

解 选项 B 正确,即命题 ①③ 正确.

对于命题 ①:若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解,即 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$. 即 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的解.

用反证法. 若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解,即 $\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$,但 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$. 设

$$k\boldsymbol{\alpha}+k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\cdots+k_n\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}. \qquad ①$$

① 式两边同时左乘 $\boldsymbol{A}^n$,并将 $\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}^{n+2}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},\cdots$ 代入,得

$$k\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}.$$

由 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$,知 $k=0$.

类似地,① 式两边左乘 $\boldsymbol{A}^{n-1},\boldsymbol{A}^{n-2},\cdots,\boldsymbol{A}$ 可得 $k_1=0,k_2=0,\cdots,k_n=0$. 故 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关,而这 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关,矛盾. 故当 $\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ 时,必有 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$. 即 $\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解必是 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解.

所以 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 同解,命题 ① 正确.

对于命题 ③:若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解,即 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$,则 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^n\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{A}^n)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{A}^n)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$. 即 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^n\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解.

反之,若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^n\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解,即 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^n\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{A}^n)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$. 该式左乘 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$,得

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^n)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}.$$

设 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$,则

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha})&=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2=0\\&\Leftrightarrow b_1=b_2=\cdots=b_n=0,\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$,故 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^n\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解是 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解. 从而 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 与 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^n\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 同解. 命题 ③ 正确.

选项 B 正确.

(7)C.

解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=-\boldsymbol{X}$ 分别变形为 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 与 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$.

考虑方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}$,等式两边左乘 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$,得

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}.$$

又 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$,则内积

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})&=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\\&=-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})=-(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}),\end{aligned}$$

故 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$. 由 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=0$,知 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,即方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 只有零解. 选项 C 正确.

同样,考虑方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=-\boldsymbol{X}$,等式两边左乘 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$,得

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=0.$$

故 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,所以方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

综上所述,选项 A,B,D 均不正确,选项 C 正确.

(8) C.

解 依题设,有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha} &= \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB\alpha}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha}\\ &=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B\alpha})+(\boldsymbol{B\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A\alpha})\\ &=(\boldsymbol{A\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B\alpha})+(\boldsymbol{B\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A\alpha})\\ &=2(\boldsymbol{A\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B\alpha})>0,\end{aligned}$$

即对 $\forall\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$,有$(\boldsymbol{A\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B\alpha})>0$,所以有 $\boldsymbol{A\alpha}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{B\alpha}\neq\boldsymbol{0}$,故 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆,从而有

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\alpha})=n,\ \mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{AB},\boldsymbol{\alpha})=n.$$

故 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\alpha}$ 有唯一解,$\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{\alpha}$ 有唯一解. 选项 C 正确.

注 $(\boldsymbol{A\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B\alpha})$ 为内积$(\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{B\alpha})$.

二、填空题

(1) $(1,1,2,3)^{\mathrm{T}}$.

解 设 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有特解 $\boldsymbol{\alpha}^*=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A\alpha}^* &= (\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\\ &=(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3)x_1+\boldsymbol{\alpha}_1x_2+\boldsymbol{\alpha}_2x_3+\boldsymbol{\alpha}_3x_4\\ &=\boldsymbol{\beta}x_1+(x_2-x_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_3-2x_1)\boldsymbol{\alpha}_2+(x_4-3x_1)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}.\end{aligned}$$

只要取 $x_1=x_2=1,x_3=2x_1=2,x_4=3x_1=3$ 即可,故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有一个特解为$(1,1,2,3)^{\mathrm{T}}$.

(2) $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

解 由已知,$A_{ij}=a_{ij}$,知 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,故

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{31}\\a_{32}\\1\end{pmatrix}.$$

又
$$|\boldsymbol{A}|=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}=a_{31}^2+a_{32}^2+1=1,$$
知 $a_{31}=a_{32}=0$,所以$(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

(3) -15.

解 由已知 $\boldsymbol{AX}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ 的通解为 $k\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}\xlongequal{\text{记}}k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$,即有 $\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A\eta}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

将 $\boldsymbol{\beta}$ 用 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ 线性表示,再计算 $\boldsymbol{A\beta}$.

设 $\boldsymbol{\beta}=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-10\end{pmatrix}$,则

$$\begin{cases}-2k_1+3k_2=5,\\k_1-4k_2=-10,\end{cases}$$

解得 $k_1=2,k_2=3$. 故

$$\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{\xi}+3\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{0}+3\boldsymbol{A\eta}=3\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix},$$

从而 $$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=(5,-10)\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}=5\times9-10\times6=-15.$$

(4) -2.

解 由 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}-3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$,有

$$(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}-3\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}=0(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}-3\boldsymbol{\alpha})$$
$$(1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}=0(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})$$
$$(-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(-\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}=0(-\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})$$

由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关,知 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}-3\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$,$-\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$.

故 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}-3\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda=0$ 的特征向量,也是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 0 的特征向量.

同理,$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda=0$ 的特征向量,也是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 1 的特征向量. $-\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda=0$ 的特征向量,也是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 -3 的特征向量.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}-3\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},-\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})$,则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-3\end{bmatrix},$$

故 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=0+1-3=-2$.

三、解答题

(1) 解 依题设,找出 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解及 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解.

由解的性质,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{b}$,故 $\boldsymbol{A}\left(\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2}{2}\right)=\boldsymbol{b}$,取

$$\boldsymbol{\eta}^*=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2\right)^{\mathrm{T}}$$

为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的特解. 又

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=2\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)=3\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{A}(2\boldsymbol{\alpha}_3+3\boldsymbol{\alpha}_1)=5\boldsymbol{b},$$

故 $$\boldsymbol{A}[3(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-2(\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)]=6\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{A}[(2\boldsymbol{\alpha}_3+3\boldsymbol{\alpha}_1)-(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)]=5\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$

所以 $$\boldsymbol{\eta}_1=3(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-2(\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)=(7,4,-1,6)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\eta}_2=(2\boldsymbol{\alpha}_3+3\boldsymbol{\alpha}_1)-(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)=(12,2,-14,0)^{\mathrm{T}}$$

为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解,且线性无关(不成比例).

又 $r(\boldsymbol{A})=n-2$,故 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$k_1(7,4,-1,6)^{\mathrm{T}}+k_2(12,2,-14,0)^{\mathrm{T}}+\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2\right)^{\mathrm{T}}\ (k_1,k_2\text{ 为任意常数}).$$

(2) 证 (Ⅰ)由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的解的结构,知 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$,并有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{bmatrix}1\\2\\2\\1\end{bmatrix}=\boldsymbol{\beta},\ (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{bmatrix}1\\-2\\4\\0\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

即

$$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta},\qquad ①$$
$$\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}.\qquad ②$$

由 ① 式知 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)$,又由 ② 式知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相

关,并且 $r(\boldsymbol{A})=3$,故 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)=2$.

解 (Ⅱ) 由 $(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$,知 $(0,-1,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 的一个解. 又由于

$$(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}4\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=4\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0},$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2\\-4\\0\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},$$

且 $(4,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$ 与 $(2,-4,0,1)^{\mathrm{T}}$ 线性无关,故 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 的通解为

$$(0,-1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_1(4,-2,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(2,-4,0,1)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_1,k_2 为任意常数.

(3) 解 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系等价,知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 必是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解,又 $r(\boldsymbol{A})=1$,知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有 $n-r(\boldsymbol{A})=4-1=3$ 个线性无关的解向量,故

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3,$$

其极大线性无关组是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

对 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 作初等行变换,有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\2&-1&-1&a\\0&1&a&-3\\2&a&5&-5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&1&-3&a-4\\0&0&a+3&1-a\\0&0&0&(1-a)(a-4)\end{pmatrix}.$$

当 $a=-3$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是一个极大线性无关组,故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$k_1(1,2,0,2)^{\mathrm{T}}+k_2(1,1,-1,3)^{\mathrm{T}}+k_3(2,-3,-3,-5)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

当 $a=1$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是一个极大线性无关组,故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$k_1(1,2,0,2)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,-1,1,1)^{\mathrm{T}}+k_3(1,-1,1,5)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

当 $a=4$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是一个极大线性无关组,故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$k_1(1,2,0,2)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,-1,1,4)^{\mathrm{T}}+k_3(1,-1,4,5)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

(4) 解 求抽象方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解,首先要讨论秩,从而确定解的情况.

由已知,$\boldsymbol{b}=(a_{13},a_{23},a_{33})^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 中的第 3 列,且 $a_{ij}=A_{ij}$,故

$$|\boldsymbol{A}|=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}=a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2>0\ (\text{因 } a_{33}\neq 0),$$

所以 $r(\boldsymbol{A})=3$,即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$. 而 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$,故

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix}0\\0\\|\boldsymbol{A}|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(5) 证 只要证明 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})$.

记 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$,则

$$\begin{aligned} r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}) &= r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \mid \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}) \\ &= r[(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n) \mid \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}] \\ &= r[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \mid \boldsymbol{b})] \leqslant r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}). \end{aligned}$$

又 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}) \geqslant r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$,故 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}) = r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$,所以方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 必有解.

(6) 证 (Ⅰ) 依题设,$(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的特解,$(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$,$(2,1,2)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系,故

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

所以 $\lambda_1 = 3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量.

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} = \boldsymbol{0} = 0\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}, \boldsymbol{A}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \boldsymbol{0} = 0\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},$$

故 $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,$\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,2,-2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3 = (2,1,2)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量. 而

$$|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3| = \begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 2 & 1\\1 & -2 & 2\end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为三个线性无关的3维列向量,即 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 可作为 $\mathbf{R}^3$ 的一组基,所以任意3维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

解 (Ⅱ) 由(Ⅰ)可设 $\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3$,即

$$x_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},$$

解方程组

$$\begin{cases}x_1 + x_2 + 2x_3 = 1,\\x_1 + 2x_2 + x_3 = 2,\\x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1,\end{cases}$$

得唯一解 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = \left(1, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}$,故

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} &= \boldsymbol{A}(x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3) \\ &= x_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = 3x_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(7) 证 由 $|\boldsymbol{A}| = 0$ 且 $A_{ij} \neq 0$,知 $r(\boldsymbol{A}) = n-1$,故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有一个线性无关的解向量. 又

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{i1}\\ \vdots\\ A_{ij}\\ \vdots\\ A_{in}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ |\boldsymbol{A}|\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的通解为 $k(A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{in})^{\mathrm{T}}$,$k$ 为任意常数.

(8) 解 (Ⅰ) 依题设

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&k\\0&1&1\end{pmatrix},$$

由 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\alpha}_4$ 有无穷多解,知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})<3$. 而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,故

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}\left[\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&k\\0&1&1\end{pmatrix}\right]<3,$$

从而$\begin{vmatrix}1&0&-1\\-1&1&k\\0&1&1\end{vmatrix}=0$,得 $k=2$.

(Ⅱ) 由已知,得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,知$\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$,解此非齐次线性方程组,得通解为

$$(1,2,0)+k_1(1,-1,1)^{\mathrm{T}}\quad(k_1\text{ 为任意常数}).$$

(9) **解** (Ⅰ) 由已知,有

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4-a&1&-2\\1&4-a&-2\\1&1&1-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1-a\\1&4-a&-2\\4-a&1&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1-a\\0&3-a&a-3\\0&a-3&-(a-3)(a-2)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1-a\\0&3-a&a-3\\0&0&(a-3)(3-a)\end{pmatrix}.$$

由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$,得 $a=3$.

(Ⅱ) 由$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$,$(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\beta}$,得 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}=2(\boldsymbol{A\alpha}-\boldsymbol{\alpha})$,即$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$,故 $\boldsymbol{\alpha}$ 为方程组$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的非零解.

由(Ⅰ)知,$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&2\\-1&0&2\\-1&-1&3\end{pmatrix}$,计算可得

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^2=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-1&-1&2\\-1&-1&2\end{pmatrix}^2=\boldsymbol{O}.$$

故 $\boldsymbol{\alpha}$ 为任意非零列向量. 记

$$\boldsymbol{\alpha}=(k_1,k_2,k_3)^{\mathrm{T}}\quad(k_1,k_2,k_3\text{ 为不同时为零的常数}),$$

$$\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-1&-1&2\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=(2k_3-k_2-k_1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{\alpha}=(k_1,k_2,k_3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(2k_3-k_2-k_1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,其中 k_1,k_2,k_3 不同时为零且 $k_1+k_2\neq 2k_3$.

(10) 解 (Ⅰ) 由 $\boldsymbol{A}$ 有 2 阶非零子式 $\begin{vmatrix}-1 & 0\\-1 & 1\end{vmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}$ 是 2×3 矩阵，知 $r(\boldsymbol{A})=2$，从而 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有 $3-r(\boldsymbol{A})=3-2=1$ 个基础解.

由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解. 但这两个方程组不同解，知 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中至少有两个解向量，故 $r(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})\leqslant 3-2=1$. 又 $\boldsymbol{B}$ 是非零矩阵，故 $r(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{B})\geqslant 1$，即 $r(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=1$.

由 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & b\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & -1 & b\\0 & 0 & 2+b\end{pmatrix}$，知 $b=-2$.

由 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\-1 & 1 & a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\0 & 1 & a-1\end{pmatrix}$

得 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解为 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(1,1-a,1)^{\mathrm{T}}$. 将其代入 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，即 $-x_1-x_2-2x_3=0$，得 $a=4$.

(Ⅱ) 由题设，知方程组 $\begin{cases}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}\end{cases}$ 有非零解. 从而知 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}<3$，对 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$ 作初等行变换，有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\-1 & 1 & a\\-1 & -1 & b\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\0 & 1 & a-1\\0 & 0 & a+b-2\\0 & 0 & 4-a\end{bmatrix},$$

故 $a+b-2=0,4-a=0$. 解得 $a=4,b=-2$.

当 $a=4,b=-2$ 时，有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\to\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\0 & 1 & 3\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

解得 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=k(1,-3,1)^{\mathrm{T}}(k\neq0)$ 为全部非零公共解.

(11) 解 (Ⅰ) 对 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\alpha})$ 作初等行变换，有

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\alpha})=\left[\begin{array}{cccc:c}2 & 0 & 0 & 2 & 2\\1 & 1 & 0 & 3 & 2\\0 & 1 & 3 & 5 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & 0 & 1 & 1\\1 & 1 & 0 & 3 & 2\\0 & 1 & 3 & 5 & 1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 2 & 1\\0 & 1 & 3 & 5 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 2 & 1\\0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right].$$

令 $x_4=1$，得 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $(-1,-2,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $x_4=0$，得 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\alpha}$ 的一个特解为 $(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$.

故 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\alpha}$ 的通解为

$$k\begin{bmatrix}-1\\-2\\-1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k+1\\-2k+1\\-k\\k\end{bmatrix}.$$

计算

$$\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}-k+1\\-2k+1\\-k\\k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\0 & 2 & 0 & 4\\0 & -1 & a-1 & a-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-k+1\\-2k+1\\-k\\k\end{bmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-k+1-k+2k\\2(-2k+1)+4k\\-(-2k+1)-(a-1)k+(a-3)k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\alpha}$ 的解均是 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\alpha}$ 的解均是 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解. 但 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{\beta}$ 不同解. 故 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\alpha}$ 的解集是 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解集的真子集. 从而 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解集是 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解集的真子集.

由(Ⅰ)知, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})<3$. 又 B 有 2 阶非零子式 $\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}$. 所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\geqslant 2$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=2$.

对 $\boldsymbol{B}$ 作初等行变换, 有

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&2&0&4\\0&-1&a-1&a-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&0&2\\0&-1&a-1&a-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&0&2\\0&0&a-1&a-1\end{pmatrix}.$$

由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=2$, 知 $a-1=0$, 即 $a=1$.

(12) 解 (Ⅰ) 由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=0$ 的解, 知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 与 $\begin{cases}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0},\\\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=0\end{cases}$ 同解.

故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$, 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$, 对 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$ 作初等行变换, 有

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}a&1&1&b\\0&a-1&0&1\\1&1&a&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&a&1\\0&a-1&0&1\\a&1&1&b\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&a&1\\0&a-1&0&1\\0&1-a&1-a^2&b-a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&a&1\\0&a-1&0&1\\0&0&1-a^2&b-a+1\end{array}\right).$$

当 $a=1$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=2$, 故 $a=1$ 舍去.

当 $a=-1$ 时, $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&1\\0&-2&0&1\\0&0&0&b+2\end{array}\right)$, 故 $b=-2$, 有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=2$.

综上所述, $a=-1$, $b=-2$.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&-2&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$, 则

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-1&-1\\0&\lambda+2&0\\-1&-1&\lambda+1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+2)^2=0$, 得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\lambda_3=-2$.

由 $0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&2&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 得 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

由 $-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\0&0&0\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 得 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}$.

拓展题

解答题

(1) 解 $\boldsymbol{A}$ 中有 6 个未知参数,不能用初等行变换求解,利用特征向量的定义

$$\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}\ (\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}).$$

由已知,有

$$\boldsymbol{A\alpha}_1=\begin{pmatrix}1&-2&3\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},$$

得 $\lambda_1=0$,即 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{0}$. 同理

$$\boldsymbol{A\alpha}_2=\begin{pmatrix}1&-2&3\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\lambda_2\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},$$

得 $\lambda_2=0$,即 $\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{0}$.

$$\boldsymbol{A\alpha}_3=\begin{pmatrix}1&-2&3\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}=\lambda_3\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix},$$

得 $\lambda_3=1$,即 $\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_3$.

由于 $\boldsymbol{A}\sim\mathrm{diag}(0,0,1)$,故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$. 又 $3-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3-1=2$,$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有两个基础解,故所求通解为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,其中 k_1,k_2 为任意常数.

(2) 解 (Ⅰ)$\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 的列向量为两两正交的单位向量,故

$$\begin{cases}2a-\sqrt{2}+2\sqrt{2}c=0,\\1-2b-2=0,\\2a+2\sqrt{2}b-2\sqrt{2}c=0,\end{cases}$$

解得 $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,$b=-\dfrac{1}{2}$,$c=0$,此时 $\boldsymbol{A}$ 的列向量为单位向量.

(Ⅱ)当 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵时,

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&\sqrt{2}&1\\-1&\sqrt{2}&-1\\\sqrt{2}&0&-\sqrt{2}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&\sqrt{2}\\\sqrt{2}&\sqrt{2}&0\\1&-1&-\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

第十一章 相似矩阵

基础题

一、选择题

(1)B.

解 $\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}=3(A^{-1})^2$,由已知$A$有特征值$\lambda=2$,故$A^{-1}$有特征值$\frac{1}{2}$,$(A^{-1})^2$有特征值$\frac{1}{4}$,故所求特征值为$\frac{3}{4}$. 选项 B 正确.

注 有关特征值、特征向量的结论:

A	A^n	$A+kE$	$f(A)$	A^{-1}	A^*	$P^{-1}AP$	A^T
λ	λ^n	$\lambda+k$	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\lvert A\rvert}{\lambda}(\lvert A\rvert\neq 0)$	λ	λ
α	α	α	α	α	α	$P^{-1}\alpha$	/

其中 $f(\lambda)$ 为多项式. 以上结论可用特征值、特征向量的定义 $A\alpha=\lambda\alpha\ (\alpha\neq 0)$ 进行验证.

本结论见《2026 考研数学线性代数辅导讲义》.

(2)C.

解 因实对称矩阵必相似于由特征值组成的对角矩阵,即 $\mathrm{diag}(0,1,2,3)$,且有相同的秩,即 $r(A)=r(\mathrm{diag}(0,1,2,3))=3$. 选项 C 正确.

(3)A.

解 判别 A,B 与对角矩阵C是否相似,利用矩阵相似于对角矩阵的充分条件或充分必要条件.

由 $|\lambda E-A|=0$,可得 A 的特征值为 $2,2,1$. 又 $2E-A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$,知 $r(2E-A)=1$,即$(2E-A)x=0$,特征值 2 对应两个线性无关的特征向量,所以 $A\sim C$.

由 $|\lambda E-B|=0$,可得 B 的特征值为 $2,2,1$. 又

$$2E-B=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

其秩为 2,即$(2E-B)x=0$,特征值 2 只对应一个线性无关的特征向量,所以B不能相似于C. 选项 A 正确.

(4)D.

解 对于选项 D,由于

$$|\lambda E-D|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&0\\0&\lambda&-3\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1)=0,$$

所以 D 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=1$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=0$,有

$$0E-D=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\0&0&-3\\0&0&0\end{pmatrix},$$

可知 $r(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D})=2$,故 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 只对应 $3-r(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D})=3-2=1$ 个特征向量,所以 $\boldsymbol{D}$ 不能相似于对角矩阵. 选项 D 正确.

对于选项 A:显然 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,故必相似于对角矩阵.

对于选项 B:由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=0$,得 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$,即 $\boldsymbol{B}$ 有三个不同特征值,故必相似于对角矩阵.

对于选项 C:由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}|=0$,得 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=3$,对于 $\lambda_1=\lambda_2=0$,

$$r(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C})=r\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1&-2&-3\end{pmatrix}\right]=1,$$

故 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 有两个线性无关的特征向量,所以 $\boldsymbol{C}$ 相似于对角矩阵.

(5) B.

解 由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$,故 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|\neq 0$ 或 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=0$,即 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 同时可逆或不可逆. 故选项 B 正确.

(6) A.

解 $\boldsymbol{A}$ 为抽象矩阵,用定义验证.

由已知,有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_3$,故

$$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_1=1\boldsymbol{\alpha}_1,$$
$$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_2=1\boldsymbol{\alpha}_2,$$
$$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_3=0\boldsymbol{\alpha}_3,$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的特征向量. 选项 A 正确.

同理可验证选项 B,C,D 不正确.

注 注意定义 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 中 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$,即特征向量一定不能是零向量.

(7) C.

解 由已知,$\lambda=1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三重特征值,故 $|\boldsymbol{A}|=1\times1\times1=1$, $|\boldsymbol{A}^{-1}|=1$,又

$$f(0)=|-\boldsymbol{A}|-|\boldsymbol{A}^{-1}|=(-1)^3|\boldsymbol{A}|-|\boldsymbol{A}^{-1}|=-|\boldsymbol{A}|-|\boldsymbol{A}^{-1}|=-2,$$
$$f(1)=|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|-|\boldsymbol{A}^{-1}|=0-1=-1.$$

由拉格朗日中值定理,知至少存在一点 $x_0\in(0,1)$,使得

$$f'(x_0)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{-1-(-2)}{1-0}=1.$$

故选项 C 正确.

(8) D.

解 对于选项 A:由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 对应的特征向量,知 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$ 满足:

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

故选项 A 正确.

对于选项 B:若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 对应的特征向量,则 $k\boldsymbol{\alpha}(k\neq0)$ 仍是特征值 λ 对应的特征向量. 选项 B 正确.

对于选项 C:若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 对应的特征向量,则 $k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}$($k_1,k_2$ 为不同时为零的常数)仍是特征值 λ 对应的特征向量. 选项 C 正确.

对于选项 D:由 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 及 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是不同特征值对应的特征向量,知 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$ 不再是 $\boldsymbol{A}$ 的

特征向量. 选项 D 错误.

选 D.

二、填空题

(1) -1.

解 由 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$,有 $\sum_{i=1}^{3} a_{ii} = \sum_{i=1}^{3} b_{ii}$,知 $1+1+1=-1+5+a$,得 $a=-1$.

(2) $|\boldsymbol{A}|$.

解 由 $|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}|=|\lambda \boldsymbol{E}-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}|=|(\lambda-|\boldsymbol{A}|)\boldsymbol{E}|=0$,知 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda=|\boldsymbol{A}|$.

(3) -1.

解 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一个特征值,$\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$ 为对应的特征向量,则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$,故

$$(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}=\lambda^2\boldsymbol{\alpha}+2\lambda\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}=(\lambda^2+2\lambda+1)\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},$$

由 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$ 知 $\lambda^2+2\lambda+1=0$,故 $\lambda=-1$.

注 也可有如下解法:

由已知得 $|\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|^2=0$,故 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$,即 $|(-1)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$,所以 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda=-1$.

(4) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

解 设 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,可知 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_3=0$,即 $x_1+x_2-x_3=0$,解得 $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,-2\boldsymbol{\xi}_3)$,得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,-2\boldsymbol{\xi}_3)(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)^{-1}\\&=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(5) $0,-3$.

解 由 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$,知 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$,即

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda-a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & -4 \\ 0 & 2 & \lambda-b \end{vmatrix},$$

$$(\lambda-2)(\lambda^2-a\lambda-1)=(\lambda-2)[\lambda^2-(3+b)\lambda+3b+8],$$

比较 λ 的同次幂系数,得 $\begin{cases} a=3+b, \\ -1=3b+8, \end{cases}$ 解得 $a=0,b=-3$.

注 由 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$,知 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$,$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})$,得 $\begin{cases} -2=2(3b+8), \\ 2+a=2+3+b, \end{cases}$ 解得 $a=0,b=-3$.

(6) $-2,6$.

解 依题设,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda\boldsymbol{\alpha}_1$,故 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$,即

$$\begin{cases} 3-4-3=\lambda, \\ a+4+6=-2\lambda, \\ 3-2b-3=3\lambda, \end{cases}$$

解得 $a=-2,b=6,\lambda=-4$.

三、解答题

(1) 解 (Ⅰ) 由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-5&-2&-2\\\lambda-5&\lambda-1&-2\\\lambda-5&-2&\lambda-1\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-5)\begin{vmatrix}1&-2&-2\\1&\lambda-1&-2\\1&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)\begin{vmatrix}1&-2&-2\\0&\lambda+1&0\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-5)(\lambda+1)^2,$$

可得 A 的特征值 $\lambda_1=5,\lambda_2=\lambda_3=-1$.

对于 $\lambda_1=5$,解方程组 $(5E-A)x=0$,

$$5E-A=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{见注②}}\begin{pmatrix}-2&-2&4\\-2&4&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

解得 $\alpha_1=(1,1,1)^T$,即 $k_1\alpha_1$(k_1 是任意非零常数)是 $\lambda_1=5$ 对应的全部特征向量.

对于 $\lambda_2=\lambda_3=-1$,

$$(-1)E-A=\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

解得 $\alpha_2=(-1,1,0)^T,\alpha_3=(-1,0,1)^T$,即 $k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$(k_2,k_3 是不同时为零的任意常数)是 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 对应的全部特征向量.

(Ⅱ) 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

(Ⅲ) 由(Ⅱ)知 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 为二重特征值,对其特征向量 $\alpha_2=(-1,1,0)^T,\alpha_3=(-1,0,1)^T$ 正交化,令

$$\beta_2=\alpha_2=(-1,1,0)^T,$$
$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=(-1,0,1)^T-\frac{1}{2}(-1,1,0)^T$$
$$=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)^T=\frac{1}{2}(-1,-1,2)^T.$$

再对 α_1,β_2,β_3 单位化,得

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T,\ \gamma_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T,\ \gamma_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)^T,$$

令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$,则 Q 为正交矩阵,使得

$$Q^{-1}AQ=\Lambda=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

注 ① 此题属于基础题,计算 $|\lambda E-A|$ 时,先化简再计算.

② 考虑到三行不成比例,且 $|5E-A|=0$,故 $r(5E-A)<3$,初等行变换后至少有一行元素全为 0,所以可以将其中任意一行写成(0,0,0),放到最后一行,这个小技巧希望读者能掌握.

(2) 解 (Ⅰ)A 为实对称矩阵,B 为对角矩阵,而实对称矩阵必相似于对角矩阵,且与其相似的对角矩

阵的对角线元素必为其特征值，故只要判别 $\boldsymbol{B}$ 的特征值 3,0,0 是否为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值即可.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^2(\lambda-3)=0$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 3,0,0，故 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

由 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$；

由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

（Ⅱ）$\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，故 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵. 又

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2),$$
$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2),$$

知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都有三个不同特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=-1,\lambda_3=1$，因此 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，$(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，可分别求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{AP}_1=\mathrm{diag}(2,-1,1)$.

同理可求得 $\boldsymbol{B}$ 属于 $\lambda_1=2,\lambda_2=-1,\lambda_3=1$ 的特征向量分别为

$$\boldsymbol{\beta}_1=(0,0,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}_2=(0,1,2)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}_3=(1,0,0)^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{P}_2=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，则 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{BP}_2=\mathrm{diag}(2,-1,1)$，故 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{AP}_1=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{BP}_2$，即

$$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}).$$

令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\1&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

注 ① 判别两个同阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是否相似，可先利用矩阵相似的必要条件：$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$，$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$，$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\sim\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$，$\lambda$ 为实数.（特别地，λ 为特征值也成立）

② 看 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是否相似于同一个对角矩阵.

③ 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是同阶实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值及重数.

(3) 解（Ⅰ）已知 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$，确定 $\boldsymbol{A}$ 中的参数 a,b，利用定义 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，得

$$\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

比较等式两边对应元素，得 $\lambda=-1,a=-3,b=0$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$，则

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-2\\-5&\lambda+3&-3\\1&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3,$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的三重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$. 由

$$\mathrm{r}(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\mathrm{r}\left[\begin{pmatrix}-3&1&-2\\-5&2&-3\\1&0&1\end{pmatrix}\right]=2,$$

可知三重特征值 -1 只对应一个线性无关的特征向量，故 $\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角矩阵.

(4) 解 由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$，知 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量，$\lambda=2$ 是二重特征值，应该对应有两个线性无关的特征向量，故 $\mathrm{r}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=3-2=1$，即

$$\mathrm{r}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\mathrm{r}\left[\begin{pmatrix}1&1&-1\\-x&-2&-y\\3&3&-3\end{pmatrix}\right]=\mathrm{r}\left[\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&x-2&-x-y\\0&0&0\end{pmatrix}\right]=1,$$

所以 $x=2,y=-2$，故 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{pmatrix}$.

又 $\boldsymbol{A}$ 的另一个特征值 λ_3 满足 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2+2+\lambda_3=\sum\limits_{i=1}^{3}a_{ii}=10$，故 $\lambda_3=6$.

对应于 $\lambda_1=\lambda_2=2$，由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$；

对应于 $\lambda_3=6$，由 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(2,2,6)$.

(5) 解 (Ⅰ) 由已知，有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}. \qquad ①$$

记 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$，由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，记 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{C}$ 可逆.

由 ① 式，知 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CB}$，即 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$，因此 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值. 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\-1&\lambda-2&-2\\-1&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)=0,$$

得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 1,1,4，即为 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

(Ⅱ) 先求 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量.

对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$，由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，可解得基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=(-2,0,1)^{\mathrm{T}}$；

对应于 $\lambda_3=4$，由 $(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，可解得基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)$，则 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$，于是 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{ACP}_1=\boldsymbol{\Lambda}$，即 $(\boldsymbol{CP}_1)^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{CP}_1)=\boldsymbol{\Lambda}$.

令

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{CP}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}=(-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3),$$

则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

又由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$，则 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\sim\boldsymbol{\Lambda}-2\boldsymbol{E}$，故

$$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{\Lambda}-2\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{vmatrix}=2.$$

(6) 解 (Ⅰ) 由

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 0 & -2\\ -a & \lambda-1 & -1\\ -1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0,$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-2$.

因 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量，所以对应二重特征值 1，$\boldsymbol{A}$ 应有两个线性无关的特征向量，故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$. 而

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ -a & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & a+1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

故 $a+1=0$，即 $a=-1$.

（Ⅱ）对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$，由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$；

对应于 $\lambda_3=-2$，由 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -2\end{pmatrix}$.

(7) 解（Ⅰ）由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 知，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值，而由 $|\mu\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=0$，可得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\mu_1=\mu_2=0$，$\mu_3=14$，故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=14$.

由已知，二重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关. 设 $\lambda_3=14$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，故

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1=0,\\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x_1+x_2=0,\\ 2x_2+x_3=0,\end{cases}$$

解得 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$.

综上所述，$\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 对应的特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$（$k_1,k_2$ 不同时为 0），特征值 $\lambda_3=14$ 对应的特征向量为 $k_3\boldsymbol{\alpha}_3(k_3\neq 0)$.

（Ⅱ）令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 14\end{pmatrix}.$$

(8) 解 由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=b,\lambda_3=c$. 又

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & 1\\ -1 & \lambda-5 & -1\\ -4 & -12 & \lambda-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -a & 1\\ 0 & \lambda-5 & -1\\ 2-\lambda & -12 & \lambda-6\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-2)(\lambda^2-10\lambda+13-a),$$

二重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=b$ 有两种情况：$b=2$ 或 $b\neq 2$.

当 $b=2$ 时，由 b 是二重特征值，则 $\lambda^2-10\lambda+13-a$ 会有因式 $\lambda-2$，故可得 $a=-3$.

又 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，知 $\sum\limits_{i=1}^{3}a_{ii}=\sum\limits_{i=1}^{3}b_{ii}$，即 $1+5+6=2b+c$，故 $c=8$，且此时有

$$\mathrm{r}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\mathrm{r}\left[\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ -1 & -3 & -1\\ -4 & -12 & -4\end{pmatrix}\right]=1,$$

即 $\lambda=2$ 有两个线性无关的特征向量，使得 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，所以 $a=-3,b=2,c=8$.

若 $b \neq 2$,由 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,故 $c = 2$,又由

$$1+5+6 = b+b+c = 2b+2,$$

知 $b = 5$,此时 $\lambda^2 - 10\lambda + 13 - a = (\lambda-5)^2$,即得 $a = -12$.

而

$$\mathrm{r}(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}\left[\begin{pmatrix} 4 & 12 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -12 & -1 \end{pmatrix}\right] = 2 \neq 1,$$

即 $\lambda_1 = \lambda_2 = b = 5$,只有一个线性无关特征向量,因此 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不相似.

综上所述,$a = -3, b = 2, c = 8$.

(9) 解 (Ⅰ)设 $\lambda_3 = -1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$,由实对称矩阵不同特征值对应的特征向量必正交,可知

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 = 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

解得 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (-1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$. 故 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_3 = -1$ 的特征向量为 $k\boldsymbol{\alpha}_3 (k \neq 0)$.

(Ⅱ)令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$,故

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(10) 解 (Ⅰ)由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,知 $\boldsymbol{A}$ 必相似于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,由 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$ 知,$\boldsymbol{A}$ 的特征值的取值是 0 与 1. 又 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = r$,故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\Lambda}) = r$,即有

$$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ \ddots \\ 1 \end{matrix}}\right\} r\text{ 个},$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda = 1$ 的重数为 r,$\lambda = 0$ 的重数为 $n-r$,故 $3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda = 2$ 的重数为 r,$\lambda = 3$ 的重数为 $n-r$,所以 $|3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = 2^r \cdot 3^{n-r}$.

(Ⅱ)由 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$,知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 0 与 1,但没有 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵的条件,所以要检验 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

由 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$,知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) \leqslant n$. 又

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{E}) = n,$$

故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = n$,即有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n-r$.

对应于 $\lambda = 1$,有 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = n-r$,故 $\boldsymbol{A}$ 有 r 个线性无关的特征向量,分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$;

对应于 $\lambda = 0$,有 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = r$,故 $\boldsymbol{A}$ 有 $n-r$ 个线性无关的特征向量,分别为 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \boldsymbol{\alpha}_{r+2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$,所以 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$,使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} r\text{个} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \boldsymbol{\Lambda},$$

可得 $3E - A \sim 3E - \Lambda$，所以 $|3E - A| = |3E - \Lambda| = 2^r \cdot 3^{n-r}$.

注 n 阶方阵A 满足$A^2 = A$，求A 的特征值. 由定义，设λ 是A 的任一个特征值，α 是对应的特征向量，即有 $A\alpha = \lambda\alpha\ (\alpha \neq 0)$，故 $A^2\alpha = \lambda A\alpha = \lambda^2\alpha$，即

$$(A^2 - A)\alpha = (\lambda^2 - \lambda)\alpha = 0,$$

而 $\alpha \neq 0$，故 $\lambda^2 - \lambda = 0$，得 $\lambda = 0, \lambda = 1$，即 A 的特征值的取值只能为 0 或 1，但有多少个特征值取 0 或 1，不能确定，还需要其他条件才能确定，事实上满足 $A^2 = A$ 的矩阵不唯一，如$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$都满足 $A^2 = A$.

(11) 解（Ⅰ）由 $A \sim \Lambda$，知 $|A| = |\Lambda|$，$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(\Lambda)$，即

$$\begin{cases} -72b = -24(a-8), \\ 6 + a = 10 + b, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = 2, \\ b = -2. \end{cases}$$

（Ⅱ）由 $A \sim \Lambda$，知 A 的特征值$\lambda_1 = \lambda_2 = 6, \lambda_3 = \lambda_4 = -2$.

由$(6E - A)x = 0$，解得 $\alpha_1 = (1,0,1,0)^T$，$\alpha_2 = (0,1,0,0)^T$.

由$(-2E - A)x = 0$，解得 $\alpha_3 = (1,0,-1,0)^T$，$\alpha_4 = (0,0,0,1)^T$.

将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 正交单位化，得

$$\beta_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T,\ \beta_2 = (0,1,0,0)^T,\ \beta_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T,\ \beta_4 = (0,0,0,1)^T.$$

令 $P = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$，则 $P^{-1}AP = \Lambda$.

(12) 证（Ⅰ）由 A 可逆，且 $A \sim B$，知 B 可逆，$|A| = |B|$.

又 $AA^* = |A|E, BB^* = |B|E$，知 $A^* = |A|A^{-1}, B^* = |B|B^{-1}$.

而 $A \sim B$，知存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = B$，故 $B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$，所以

$$B^* = |B|B^{-1} = P^{-1}|A|A^{-1}P = P^{-1}A^*P,$$

即 $A^* \sim B^*$.

（Ⅱ）因 $A \sim B$，所以存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = B$，即 $AP = PB$，故

$$AP = PB \cdot (PP^{-1}) = P(BP)P^{-1},$$

所以 $AP \sim BP$.

(13) 解（Ⅰ）先求 A 的特征值，由 $A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i\ (i = 1,2,3)$ 有

$$A\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$A\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \lambda_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$A\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1&1&1\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

解得 $\lambda_1=3,\lambda_2=2,\lambda_3=1$.

令 $\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(3,2,1)$. 故

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&1&3\end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的特征值 $\mu_1=3,\mu_2=2,\mu_3=1$. 下面求 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征向量.

由 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{\beta}_1=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{\beta}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

由 $(1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{\beta}_3=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}_2=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{\Lambda}$,故

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(3,2,1),$$

即 $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,于是 $(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 令

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(14) 解 (Ⅰ) 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\1-a&\lambda-1&-a-1\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$ 得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$. 由 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量,知 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 对应两个线性无关的特征向量,从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$,故由

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1-a&0&-a-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&-2a\\0&0&0\end{pmatrix},\text{ 得 } a=0.$$

由 $(1\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

由 $(-1\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(1,1,-1)=\boldsymbol{\Lambda}$.

(Ⅱ)求可逆矩阵 Q,使得 $AQ=B$,相当于解矩阵方程 $AX=B$,对 (A,B) 作初等行变换,有

$$(A,B)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&0&1&1&0&0\\-1&1&1&0&1&0\\1&0&0&-1&0&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-1&0&-1\\0&1&0&-2&1&-1\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right).$$

$X=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\-2&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$,且 $|X|=1\neq0$,故所求可逆矩阵为

$$Q=X=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\-2&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

(15) **解** (Ⅰ)对 (A,b) 作初等行变换,有

$$(A,b)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&a&1\\1&a&1&1\\a&1&1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&0&(a+2)(1-a)&-2-a\end{array}\right).$$

当 $a=1$ 时,$r(A)=1$,$r(A,b)=2$,$AX=b$ 无解.

当 $a=-2$ 时,$r(A)=r(A,b)=2<3$,$AX=b$ 有无穷多解.此时

$$(A,b)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

故 $AX=b$ 的通解为 $k(1,1,1)^{T}+(1,0,0)^{T}$ (k 为任意常数).

(Ⅱ)由(Ⅰ)知,$A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}$,由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&2\\-1&\lambda+2&-1\\2&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)=0,$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=3,\lambda_3=-3$.

由 $(0E-A)X=\mathbf{0}$,得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{T}$.

由 $(3E-A)X=\mathbf{0}$,得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1)^{T}$.

由 $(-3E-A)X=\mathbf{0}$,得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-2,1)^{T}$.

由于 A 有 3 个不同特征值,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 已正交,只需单位化,得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{T},\ \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^{T},\ \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)^{T}.$$

令 $Q=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$,则 Q 为正交矩阵,且

$$Q^{-1}AQ=Q^{T}AQ=\Lambda=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}.$$

综合题

一、选择题

(1) D.

解 利用矩阵相似的定义.由 $BA=EBA=A^{-1}ABA=A^{-1}(AB)A$,知 $AB\sim BA$.

由 $A^{-1}\sim B^{-1}$ 知,存在可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}A^{-1}P=B^{-1}$,两边同时求逆,得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}, \qquad ①$$

故 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$. ① 式两边同时取转置,得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$,即 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$,故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\sim\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

又由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}\cdot\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^2$,可知 $\boldsymbol{A}^2\sim\boldsymbol{B}^2$.

综上所述,选项 D 正确.

(2) D.

解 由于 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,所以 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵. 又

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^2(\lambda-2)(\lambda-4)=0,$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=2$, $\lambda_4=4$. 而 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$,故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值也是

$$\lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_3=2,\ \lambda_4=4,$$

且 $\boldsymbol{B}$ 也相似于对角矩阵,故

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=4-2=2,$$
$$\mathrm{r}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})=\mathrm{r}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=4-1=3.$$

由于 1 不是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值,所以 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|\neq 0$,故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=4$,所以选项 D 正确.

注 ① 由 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$,知二重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 对应两个线性无关的特征向量,故

$$\mathrm{r}(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=4-2=2.$$

由 $\lambda_3=2$ 是单根,故对应一个特征向量,故 $\mathrm{r}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=4-1=3$.

② n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$ 的有关定理(一个充分条件,两个充分必要条件):

(i) 充分条件:$\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值 $\Rightarrow\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$;

(ii) 充分必要条件:$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量;

(iii) 充分必要条件:$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的 k 重特征值 λ_k 对应 k 个线性无关的特征向量,即 $\mathrm{r}(\lambda_k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n-k$.

这三个基本定理必须熟练掌握.

(3) C.

解 对于选项 A,由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 可得特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=-1$,故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似(因 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同特征值且与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的特征值相同). 但 $\boldsymbol{A}$ 不是实对称矩阵,而 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是实对称矩阵,故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 不合同.

对于选项 B,由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=0$ 可得特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=-5$,与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的特征值不同,所以 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 不相似,排除选项 B.

对于选项 C,由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}|=0$ 可得特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=1$,故 $\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似,且实对称矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的正、负惯性指数与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的正、负惯性指数分别相等,所以选项 C 正确.

对于选项 D,由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D}|=0$ 可得特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=-2$,与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的特征值不同,故与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 不相似(或根据迹不同也可知不相似);$\boldsymbol{D}$ 的正惯性指数为 2,与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的正惯性指数不同,故 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 也不合同.

(4) A.

解 记已知条件矩阵及选项 A,B,C,D 的矩阵分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$. 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_1|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_2|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_3|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_4|=(\lambda-1)^3,$$

可知五个矩阵的特征值均为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$.

由 $1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$,知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$,故三重特征值 1 只有一个线性无关的特征向量,所以 $\boldsymbol{A}$ 不相似于对角矩阵. 同理,$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 都不相似于对角矩阵.

作为选择题,可用两个矩阵相似的必要条件,利用排除法.

由 $1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$,知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_1)=2$;

由 $1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，知 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_2)=1$；

由 $1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，知 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_3)=1$；

由 $1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，知 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_4)=1$.

故只有 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_1)=r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$，而 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$ 与 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_2)$，$r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_3)$，$r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_4)$ 均不相等，所以 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_2$，$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_3$，$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_4$ 均不相似，故选项 A 正确.

注 结论：

①$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\Rightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$；

②$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\Rightarrow r(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})$.

(5)D.

解 依题设，知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=-\boldsymbol{\alpha}_2$，则

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{\alpha}_2)=-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2.$$

从而

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2.$$

由已知，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，故 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\neq\boldsymbol{0}$. 所以，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征向量. 选项 D 正确.

对于选项 A：若 $k=0$，则 $k\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

对于选项 B：用反证法证明. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，其特征值为 λ，则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$. 又

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1-(-\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda\boldsymbol{\alpha}_1-\lambda\boldsymbol{\alpha}_2$，即 $(1-\lambda)\boldsymbol{\alpha}_1+(1+\lambda)\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$.

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，知 $1-\lambda=0$，且 $1+\lambda=0$，矛盾. 所以，$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

同理可知，选项 C 不正确.

(6)B.

解 由 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}$，$\lambda_1=2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是其对应的特征向量.

又 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，且 $r(\boldsymbol{A})=1$，知

$$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(2,0,0),$$

即 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值. 令其对应的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=-x_1+x_2+x_3=0,$$

解得 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$. 故有

$$(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\beta}_1=-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{0},\ (0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\beta}_2=-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{0}$，又 $3-r(\boldsymbol{A})=2$，所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. 选项 B 正确.

由于选项 A，C，D 中存在与 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 不正交的向量，故排除.

(7)C.

解 由已知，有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\xlongequal{记}\boldsymbol{B}.$$

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-1&0\\0&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3=0$,知 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$,也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,且 $|\boldsymbol{A}|=1$,从而 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$,即 $\mu_1=\mu_2=\mu_3=1$. 故 $A_{11}+A_{22}+A_{33}=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^*)=\mu_1+\mu_2+\mu_3=3$. 选项 C 正确.

二、填空题

(1) -4.

解 由 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$,知 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$,故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AP}&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha},3\boldsymbol{A\alpha}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha})\\&=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha})\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}=\boldsymbol{PB},\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}$,则

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|&=|\boldsymbol{PBP}^{-1}+\boldsymbol{PP}^{-1}|=|\boldsymbol{P}|\cdot|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}|\cdot|\boldsymbol{P}^{-1}|\\&=|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{vmatrix}=-4.\end{aligned}$$

(2) $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

解 由 $r(\boldsymbol{A})=1$,$\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,故 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$,且 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=0$.

设 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 正交,即

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=-x_1+x_2+x_3=0,$$

解得 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,知 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

(3) 1.

解 由已知,$\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同特征值,故 $\boldsymbol{A}$ 必相似于对角矩阵,即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

由于

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}&=\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}^2)\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{P}-2\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}\\&=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^3-2(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^2\\&=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&8\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xlongequal{记}\boldsymbol{C},\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似,从而 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{C})=1$.

(4) $2^{k(n-1)}$.

解 由已知,有

$$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{cases}1, & i=j,\\0, & i\neq j\end{cases}\quad(i,j=1,2,\cdots,k),$$

则
$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2&=(\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_k\boldsymbol{\alpha}_k^{\mathrm{T}})^2\\&=\boldsymbol{\alpha}_1(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1)\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}_2(\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_k(\boldsymbol{\alpha}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_k)\boldsymbol{\alpha}_k^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_k\boldsymbol{\alpha}_k^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A},\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}.\ \boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_k^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\xlongequal{\text{记}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=k$，故 $\boldsymbol{A}$ 有 k 重特征值 1，$n-k$ 重特征值 0. 从而 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 有 k 重特征值 2，有 $n-k$ 重特征值 1. 故
$$|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^*|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|^{n-1}=(2^k)^{n-1}=2^{k(n-1)}.$$

三、解答题

(1) **解** 由 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，知
$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&4&k\\1&k&1\end{vmatrix}=-(k-2)^2=0,$$
解得 $k=2$. 由
$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-1\\-2&\lambda-4&-2\\-1&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-6)=0,$$
得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=6$.

由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$；

由 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$.

对二重根 0 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化，令
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_1&=\boldsymbol{\alpha}_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}},\\\boldsymbol{\beta}_2&=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}-\frac{2}{5}(-2,1,0)^{\mathrm{T}}\\&=\frac{1}{5}(-1,-2,5)^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$
单位化，得
$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt5}(-2,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{30}}(-1,-2,5)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt6}(1,2,1)^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}$ 为所求正交矩阵，使得
$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&6\end{pmatrix}.$$

(2) **解** (Ⅰ) 由已知，有
$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_3)\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,-4\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-4&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

记 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-4&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，故 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$. 又由于

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 4 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+2)=0,$$

得 $\boldsymbol{C}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$,也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值.

(Ⅱ)求 $\boldsymbol{C}$ 的特征向量.

对应于 $\lambda_1=1$,由 $(1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$;

对应于 $\lambda_2=2$,由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{\xi}_2=\left(0,-\dfrac{1}{2},1\right)^{\mathrm{T}}$;

对应于 $\lambda_3=-2$,由 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{\xi}_3=\left(0,\dfrac{1}{2},1\right)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$,则

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(1,2,-2). \qquad ①$$

将 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$ 代入 ① 式,得 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{\Lambda}$,即 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1)^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1)=\boldsymbol{\Lambda}$. 令

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\right),$$

则 $\boldsymbol{P}$ 为所求可逆矩阵,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

(3) **证** (Ⅰ)用定义证明. 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}, \qquad ①$$

由已知条件,有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2,\\ &\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3,\\ &\qquad\vdots\\ &\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{\alpha}_2=\cdots=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\boldsymbol{\alpha}_n,\\ &\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}_2=\cdots=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

用 $\boldsymbol{A}^{n-1}$ 左乘 ① 式可得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$,因 $\boldsymbol{\alpha}_n\neq\boldsymbol{0}$,得 $k_1=0$.

依次用 $\boldsymbol{A}^{n-2},\boldsymbol{A}^{n-3},\cdots,\boldsymbol{A}$ 左乘 ① 式可得

$$k_2=k_3=\cdots=k_{n-1}=0,$$

代入 ① 式可得 $k_n=0$,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

解 (Ⅱ) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{0})$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & 1 & 0\end{pmatrix},$$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,由(Ⅰ)知 $\boldsymbol{P}$ 可逆,则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

(4) 证 (Ⅰ) 用定义证明. 设

$$k_1\boldsymbol{\beta}+k_2\boldsymbol{A\beta}+k_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}, \tag{①}$$

由已知有
$$\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3,$$
$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}=\lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2^2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3^2\boldsymbol{\alpha}_3.$$

将 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 及以上两式代入 ① 式,整理得

$$(k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是不同特征值对应的特征向量,故它们线性无关,故

$$\begin{cases}k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2=0,\\ k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2=0,\\ k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2=0,\end{cases}$$

其系数行列式 $\begin{vmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\\1&\lambda_3&\lambda_3^2\end{vmatrix}\neq 0$,所以 $k_1=k_2=k_3=0$,故 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

解 (Ⅱ) 由 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A\beta}$,有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta})\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta})$,故 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$,其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,即 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$,所以 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 相似,

故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})$. 而

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\mathrm{r}\left[\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\right]=2,$$

所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2$.

(5) 解 (Ⅰ) 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$,得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=\lambda_4=-1$.

由 $\boldsymbol{A}$ 有 4 个线性无关的特征向量,知二重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=\lambda_4=-1$ 分别对应有两个线性无关的特征向量,故

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\mathrm{r}\left[\begin{pmatrix}0&-a&0&-2\\0&0&-2&0\\0&0&2&-b\\0&0&0&2\end{pmatrix}\right]=2,$$

得 $a=0$,同理,由 $\mathrm{r}(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$,得 $b=0$.

对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$,由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0,0)^{\mathrm{T}}$;

对应于 $\lambda_3=\lambda_4=-1$,由 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,0,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(0,1,-1,0)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$,则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\mathrm{diag}(1,1,-1,-1).$$

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&0&2\\0&1&2&0\\\hdashline 0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{array}\right)\xlongequal{\text{分块}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_2&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{O}&-\boldsymbol{E}_2\end{pmatrix},$$

故
$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{E}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{E}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{E},$$
其中 $\boldsymbol{E}$ 为 4 阶单位矩阵,所以 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)^{-1}=\boldsymbol{E}^{-1}=\boldsymbol{E}$.

(6) 解 (Ⅰ) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)=\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{bmatrix}$.

用定义,设 $\boldsymbol{A}$ 的任一个特征值为 λ,对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}$,则
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}. \tag{①}$$
① 式两边左乘 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$,得 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}$. 当 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$ 时,有 $\lambda=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$;当 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$ 时,由 ① 式知 $\lambda=0$,故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda=0$ 或 $\lambda=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$.

(Ⅱ) 当 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i=0$ 时,由(Ⅰ)知,$\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda=0$(n 重根),因 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0}$,故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{O}$. 于是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$,但对应 $\lambda=0$(n 重根) 的线性无关的特征向量满足 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,只有 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$ 个基础解系,即只有 $n-1$ 个线性无关的特征向量,故 $\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角矩阵.

当 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\neq0$ 时,对应于 $\lambda=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$,由 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$,以及
$$(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0},$$
知对应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{\alpha}$;对应于 $\lambda=0$,由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$,故有
$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0. \tag{②}$$
因 $\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0}$,不妨设 $b_1\neq0$,解方程 ② 得线性无关的特征向量为
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}_2&=(b_2,-b_1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\\ \boldsymbol{\xi}_3&=(b_3,0,-b_1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\\ &\vdots\\ \boldsymbol{\xi}_n&=(b_n,0,\cdots,0,-b_1)^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$
令
$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n)=\begin{bmatrix}a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n\\ a_2 & -b_1 & 0 & \cdots & 0\\ a_3 & 0 & -b_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & -b_1\end{bmatrix},$$
使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{bmatrix}$.

注 ① 此题 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$,显然 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$,故 $\boldsymbol{A}^2=k\boldsymbol{A}$,其中 $k=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$,即
$$\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{A}.$$
设 $\boldsymbol{A}$ 的任一个特征值为 λ,则 $\boldsymbol{A}^2-(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda^2-(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\lambda$.

而 $\boldsymbol{A}^2-(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,故 $\lambda^2-(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\lambda=0$,从而 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda=0,\lambda=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$(这实际上是秩为 1 的矩阵特征值的结论).

② 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值、特征向量的常用方法：

（ⅰ）当 $\boldsymbol{A}$ 是具体矩阵时，用公式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0,(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

（ⅱ）当 $\boldsymbol{A}$ 是抽象矩阵时，用定义 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}\,(\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0})$.

(7) 解（Ⅰ）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a-1&&&\\&a-1&&\\&&\ddots&\\&&&a-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}\xlongequal{\text{记}}(a-1)\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$.

由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=1$，$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=0$，得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为

$$\lambda_1=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=n,\ \lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0,$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $n+(a-1),0+(a-1),\cdots,0+(a-1)$.

下面求 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量.

由 $(n\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$；由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得

$$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,-1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n=(1,0,0,\cdots,-1)^{\mathrm{T}},$$

由特征值、特征向量的性质，知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\mathrm{diag}(n+(a-1),a-1,\cdots,a-1)$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$，故 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\Lambda}|=(n+a-1)(a-1)^{n-1}$，所以

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\begin{cases}n, & a\neq 1-n\text{ 且 }a\neq 1,\\ n-1, & a=1-n,\\ 1, & a=1,\end{cases}$$

故

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & a\neq 1-n\text{ 且 }a\neq 1,\\ 1, & a=1-n,\\ 0, & a=1.\end{cases}$$

注 ① 设 $\boldsymbol{B\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}\,(\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0})$，$\boldsymbol{A}=(a-1)\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A\alpha}&=[(a-1)\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}]\boldsymbol{\alpha}=(a-1)\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{B\alpha}\\&=(a-1)\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\alpha}=(a-1+\lambda)\boldsymbol{\alpha},\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应特征值 $a-1+\lambda$ 的特征向量.

事实上，一般地，设 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}\,(\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0})$，$f(x)$ 为多项式，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征向量.

② 此题直接求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量较烦琐，将 $\boldsymbol{A}$ 写成 $\boldsymbol{A}=(a-1)\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$，利用 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=1$ 求 $\boldsymbol{B}$ 的特征值和特征向量较方便. 秩为 1 的矩阵的特征值和特征向量有结论，见《2026 考研数学线性代数辅导讲义》.

(8) 解（Ⅰ）设 $\lambda_3=-1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 两两正交，故

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=k-1-k(k+1)+2=0, & ①\\ \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=x_1+(k+1)x_2+2x_3=0, & ②\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=(k-1)x_1-kx_2+x_3=0. & ③\end{cases}$$

由方程 ① 解得 $k=1$ 或 $k=-1$.

当 $k=1$ 时，由方程 ②、③ 解得 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-4,1,1)^{\mathrm{T}}$，且

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}=(2,-5,3)^{\mathrm{T}}.$$

又由已知 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\beta}=\lambda_0\boldsymbol{\beta}$，两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$，得 $\boldsymbol{AA}^*\boldsymbol{\beta}=\lambda_0\boldsymbol{A\beta}$，$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\beta}=\lambda_0\boldsymbol{A\beta}$，即

$$A\boldsymbol{\beta}=\frac{|A|}{\lambda_0}\boldsymbol{\beta}=-\frac{2}{\lambda_0}\boldsymbol{\beta}\quad(|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-2),$$

故 $\boldsymbol{\beta}$ 应是 A 的特征向量,但 $\boldsymbol{\beta}$ 与 A 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 任一个都不共线,即 $\boldsymbol{\beta}$ 不是 A 的特征向量,所以 $k=1$ 不符合题意,舍去.

当 $k=-1$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2)^{\mathrm{T}}$,且

$$\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,1,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_3=(-2,-5,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}=(2,5,-1)^{\mathrm{T}},$$

故 $A\boldsymbol{\alpha}_3=\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_3$. 两边同时左乘 A^*,得 $A^*A\boldsymbol{\alpha}_3=-A^*\boldsymbol{\alpha}_3$,即 $|A|\boldsymbol{\alpha}_3=-A^*\boldsymbol{\alpha}_3$,又 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\beta}$,$|A|=-2$,故 $-2(-\boldsymbol{\beta})=-A^*(-\boldsymbol{\beta})$,即 $A^*\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\beta}$,所以 $\lambda_0=2,k=-1$.

(Ⅱ) $$A=P\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&-1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\0&1&-5\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\0&1&-5\\2&1&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{7}{5}&-1&-\frac{1}{5}\\-1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{5}&\frac{1}{2}&\frac{11}{10}\end{pmatrix},$$

故 $(A^{-1})^*=\dfrac{A}{|A|}=-\dfrac{1}{2}A$.

(9) **证** (Ⅰ) 由 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$,知 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}}=0$,即 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为单位正交列向量. 由已知

$$A\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta},$$
$$A\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha},$$

则
$$A(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\ A(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=-(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}).$$

由已知,$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为单位正交列向量,所以 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关,故

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0},\ \boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}.$$

所以 $1,-1$ 是 A 的特征值. 又

$$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})+\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=1+1=2,$$

故 A 不可逆,所以 0 是 A 的特征值,即 A 有三个不同的特征值 $1,-1,0$,从而

$$A\sim\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}.$$

解 (Ⅱ) 由 $A\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0},\boldsymbol{\gamma}\neq\mathbf{0}$,知 $\boldsymbol{\gamma}$ 是特征值 0 对应的特征向量,所以 $0,1,-1$ 分别对应的特征向量为 $\boldsymbol{\gamma}$,$2(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})$,$\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}$,故 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$.

注 ① 若 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 是 A 的特征向量,则 $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})(k\neq0)$ 也是 A 的特征向量.

② 由 $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$,可得

$$A^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=A,$$

故 A 是实对称矩阵,所以 $A\sim\Lambda$.

(10) **解** (Ⅰ) 由 $BA=\begin{pmatrix}1&2a_{12}&2a_{13}\\1&2a_{22}&2a_{23}\\1&2a_{32}&2a_{33}\end{pmatrix}$,得

$$B\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix},$$

所以 B 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2,\lambda_1=1$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，由 B 为实对称矩阵，故 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1=0$，即 $x_1+x_2+x_3=0$，解得

$$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

故 B 的对应 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的特征向量为 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，其中 k_2,k_3 为不全为 0 的任意常数.

（Ⅱ）对 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交化，令

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},$$

再单位化，得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

令 $Q=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$，则 Q 为正交矩阵，使得

$$Q^{-1}BQ=Q^{\mathrm{T}}BQ=\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}.$$

(11) **解**（Ⅰ）记 $A=\begin{pmatrix}-a&1-a&1\\0&a&0\\1&1-a&-a\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\0&1&-1\\a&a&-a\end{pmatrix}$.

当 $a\neq0$ 时，知 $\mathrm{r}(B)=2$，由向量组（ⅰ）与（ⅱ）等价，知 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)=2$，故

$$|A|=\begin{vmatrix}-a&1-a&1\\0&a&0\\1&1-a&-a\end{vmatrix}=a(a^2-1)=0,$$

得 $a=\pm1$.

当 $a=1$ 时，对 $(A\mid B)$ 和 $(B\mid A)$ 作初等行变换，有

$$(A\mid B)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&0&1&-1&-1&1\\0&1&0&0&1&-1\\1&0&-1&1&1&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&0&1&-1&-1&1\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

故 B 的列向量组可由 A 的列向量组线性表示.

$$(B\mid A)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&-1&1&-1&0&1\\0&1&-1&0&1&0\\1&1&-1&1&0&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&-1&1&-1&0&1\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

故 A 的列向量组可由 B 的列向量组线性表示，从而向量组（ⅰ）与（ⅱ）等价.

当 $a=-1$ 时，有

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&1&-1&-1&1\\0&-1&0&0&1&-1\\1&2&1&-1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&1&-1&-1&1\\0&-1&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

故 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示.

$$(\boldsymbol{B}\mid\boldsymbol{A})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}-1&-1&1&1&2&1\\0&1&-1&0&-1&0\\-1&-1&1&1&2&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}-1&-1&1&1&2&1\\0&1&-1&0&-1&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性表示,从而向量组(ⅰ)与(ⅱ)等价.

综上所述,$a=\pm1$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知,当 $a=1$ 时,$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$ 是实对称矩阵,故存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1&0&-1\\0&\lambda-1&0\\-1&0&\lambda+1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda+2)$,知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=-2$.

由 $0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,得 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

由 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&0&0\\-1&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,得 $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$.

由 $-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-3&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,得 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化,得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(0,1,-2)$.

当 $a=-1$ 时,$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&0\\1&2&1\end{pmatrix}$ 不是实对称矩阵,故不存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$.

综上所述,当 $a=1$ 时,存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$.

(12) 解(Ⅰ)对 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$ 作初等行变换,有

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}a&0&1&1\\0&-a&0&1\\1&0&a&a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&a&a\\0&-a&0&1\\a&0&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&a&a\\0&-a&0&1\\0&0&1-a^2&1-a^2\end{array}\right).$$

由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解,知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})<3$. 故 $1-a^2=0,a=\pm1$.

当 $a=1$ 时,
$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&1&1\\0&-1&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

解得 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的全部解为 $k_1(-1,0,1)^{\mathrm{T}}+(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$($k_1$ 为任意常数).

当 $a=-1$ 时，

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-1\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

解得 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的全部解为 $k_2(1,0,1)^{\mathrm{T}}+(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$($k_2$ 为任意常数).

(Ⅱ) 当 $a=1$ 时，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

由 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=1,\operatorname{tr}\boldsymbol{B}=-3$,知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不相似.

当 $a=-1$ 时，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1&0&-1\\0&\lambda-1&0\\-1&0&\lambda+1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda+2),$$

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-1&0\\-1&\lambda+1&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda+2),$$

可知,实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值:0,1,-2.

故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可正交相似于同一对角矩阵,从而 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$. 下面求 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量.

由 $0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,得 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

由 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&0&0\\-1&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,得 $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$.

由 $-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-3&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,得 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化,得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{Q}_1=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{AQ}_1=\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(0,1,-2)$.

由 $0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,得 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$.

由 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,得 $\boldsymbol{\beta}_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

由 $-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\\0&0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,得 $\boldsymbol{\beta}_3=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$.

将$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 单位化,得

$$\boldsymbol{\xi}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{Q}_2=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(0,1,-2)$.

故 $\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2,\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1}=\boldsymbol{B}$,即$(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1})=\boldsymbol{B}$,令 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1}$,则

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B},$$

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&1\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

(13) **证** (Ⅰ)$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是抽象矩阵,用特征值、特征向量的定义证明.

设λ 是$\boldsymbol{AB}$ 的任一个特征值,$\boldsymbol{\xi}$ 为$\boldsymbol{AB}$ 对应的特征向量,则 $\boldsymbol{AB\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$,两边同时左乘 $\boldsymbol{B}$,得

$$\boldsymbol{BAB\xi}=\boldsymbol{BA}(\boldsymbol{B\xi})=\lambda\boldsymbol{B\xi}. \qquad ①$$

若 $\boldsymbol{B\xi}\neq\boldsymbol{0}$,① 式表明$\lambda$ 是$\boldsymbol{BA}$ 的特征值,$\boldsymbol{B\xi}$ 为对应的特征向量;

若 $\boldsymbol{B\xi}=\boldsymbol{0}$,则有 $\lambda\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{AB\xi}=\boldsymbol{0}$. 因为 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$,故 $\lambda=0$,即 $\boldsymbol{AB}$ 有特征值 0,从而 $|\boldsymbol{AB}|=0$. 又因为 $|\boldsymbol{BA}|=|\boldsymbol{AB}|=0$,即 $|0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}|=0$,故 $\boldsymbol{BA}$ 也有特征值 0.

综上所述,$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的特征值.

(Ⅱ) 由 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同特征值,知 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$,即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,得

$$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP})=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}), \qquad ②$$

令 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=(C_{ij})_{n\times n}$,代入 ② 式可得

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}&\cdots&C_{1n}\\C_{21}&C_{22}&\cdots&C_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\C_{n1}&C_{n2}&\cdots&C_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}&\cdots&C_{1n}\\C_{21}&C_{22}&\cdots&C_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\C_{n1}&C_{n2}&\cdots&C_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix},$$

比较等式两边元素,得 $\lambda_iC_{ij}=C_{ij}\lambda_j(i,j=1,2,\cdots,n)$.

当 $i\neq j$ 时,有$(\lambda_i-\lambda_j)C_{ij}=0$,而 $\lambda_i\neq\lambda_j$ 故 $C_{ij}=0$,即

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\begin{pmatrix}C_{11}&&&\\&C_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&C_{nn}\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{B}$ 相似于对角矩阵.

(14) 证 令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，由已知，有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},$$

故
$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$$
$$=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}.$$

(15) 证 (Ⅰ) 只需证明 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|\neq 0$，即可得 $\lambda_i\neq -1$. 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，知

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}-\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E},$$

即 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆，因而 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|\neq 0$，所以 -1 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，即 $\lambda_i\neq -1(i=1,2,3)$.

(Ⅱ) 由可逆的定义，知 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

令 $\boldsymbol{A\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i\neq\boldsymbol{0}(i=1,2,3)$，由 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值，知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 可逆，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}$.

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，可知 $\boldsymbol{AB\alpha}_i=\boldsymbol{BA\alpha}_i=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A\alpha}_i)=\lambda_i\boldsymbol{B\alpha}_i(i=1,2,3)$.

若 $\boldsymbol{B\alpha}_i\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{B\alpha}_i$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_i 对应的特征向量. 而 λ_i 为单根，即知其只有一个线性无关的特征向量，因此有 $\boldsymbol{B\alpha}_i=\mu_i\boldsymbol{\alpha}_i$，知 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 关于 μ_i 的特征向量；

若 $\boldsymbol{B\alpha}_i=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{B\alpha}_i=0\boldsymbol{\alpha}_i$，知 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是 $\boldsymbol{B}$ 关于 $\lambda=0$ 的特征向量，因此均有 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量，所以 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}\mu_1&&\\&\mu_2&\\&&\mu_3\end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

综上所述，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可同时相似于对角矩阵.

(16) 证 (Ⅰ) 用反证法证明. 假设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha}$ 线性相关，则存在不全为零的常数 k_1,k_2，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0}.$$

显然 $k_2\neq 0$(若 $k_2=0$，则 $k_1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，由 $\boldsymbol{\alpha}$ 为非零向量，知 $k_1=0$)，则有 $\boldsymbol{A\alpha}=-\dfrac{k_1}{k_2}\boldsymbol{\alpha}$，这与 $\boldsymbol{\alpha}$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量矛盾，故 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha}$ 线性无关.

解 (Ⅱ) 由于

$$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})=(\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A\alpha},8\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{A\alpha})$$
$$=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})\begin{pmatrix}0&8\\1&2\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&8\\1&2\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0&8\\1&2\end{pmatrix}\xlongequal{\text{记}}\boldsymbol{B}$. 又由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda&-8\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda-8=(\lambda+2)(\lambda-4)=0,$$

得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=4$，同时 $-2,4$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同特征值，故 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵.

(17) 解 (Ⅰ) 由已知,$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&1\\0&a-1&0\\1&1&a\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解,故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})<3$.

由 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&1&1\\0&a-1&0\\1&1&a\end{vmatrix}=(a+1)(a-1)^2=0$,得 $a=1$ 或 $a=-1$.

当 $a=1$ 时,

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&b\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{array}\right).$$

由于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=2$,故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 无解.

当 $a=-1$ 时,

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}-1&1&1&b\\0&-2&0&1\\1&1&-1&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&-b-\frac{1}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&b+2\end{array}\right).$$

由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$,知 $b=-2$,故 $a=-1,b=-2$.

由$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right)$,解得

$$x_1=k+\frac{3}{2},\ x_2=-\frac{1}{2},\ x_3=k\ (k\text{ 为任意常数}).$$

故 $\boldsymbol{\beta}=\left(k+\frac{3}{2}\right)\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&-2&0\\1&1&-1\end{pmatrix},\ |\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-1&-1\\0&\lambda+2&0\\-1&-1&\lambda+1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+2)^2=0.$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=-2$.

由 $0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&2&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,得 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

由 $-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\0&0&0\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,得 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}_2=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$.

(18) 解 (Ⅰ) 由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,知

$$\begin{cases}\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}),\\|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|,\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}5=a+5,\\3=4a+c.\end{cases}$$

解得 $a=0,c=3$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-3)=0$,得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=3$.

由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,知 $\boldsymbol{A}$ 必相似于对角矩阵,故 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & b & 3\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 4\end{pmatrix}$ 也可对角化,且 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的特征值为 $\mu_1=\mu_2=1,\mu_3=3$. 由

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=\mathrm{r}\left(\begin{pmatrix}1 & -b & -3\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}\right)=1,$$

知 $b=-2$. 综上所述,$a=0,b=-2,c=3$.

(Ⅱ) 由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

由 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$.

由 $\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\mathrm{diag}(1,1,3)$.

由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得特征向量 $\boldsymbol{\beta}_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(3,0,1)^{\mathrm{T}}$.

由 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得特征向量 $\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}_2=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,则 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\mathrm{diag}(1,1,3)$.

故 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2$,即 $(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})=\boldsymbol{B}$.

令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

为所求可逆矩阵.

(Ⅲ) 由 $|\boldsymbol{A}|=1\times1\times3=3$,知 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为

$$\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1}=3,\ \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_2}=3,\ \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_3}=1,$$

故 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*)$ 的特征值为 $0,0,2$,于是 $\mathrm{r}(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*)=1$,从而方程组 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 有两个基础解.

由 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=3\boldsymbol{X}$,知 $\boldsymbol{X}$ 可取 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值 3 对应的特征向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}},$$

即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 1 对应的特征向量,故所求通解为

$$k_1(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(0,0,1)^{\mathrm{T}}\quad(k_1,k_2\text{ 为任意常数}).$$

(19) 解 (Ⅰ) 对 $\boldsymbol{B}$ 作初等行变换,有

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & k\\ -1 & 1 & 1-k\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & k\\ 0 & 0 & 1-k\end{pmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{B}$ 不可逆,知 $k=1,\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=2$,故 $|\boldsymbol{B}|=0$.

由 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^*=|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}^*)\leqslant3$,从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}^*)\leqslant1$.

当 $k=1$ 时,$\boldsymbol{B}$ 中有二阶子式 $\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\neq 0$,即 $\boldsymbol{B}^*$ 中至少有一个元素 $B_{11}=-1\neq 0$,从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}^*)\geqslant 1$,故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}^*)=1$.

(Ⅱ) 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}$,即 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$;又 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=2$,知 $\boldsymbol{B}$ 的列向量是 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解,且至少有两个线性无关的解,故 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda=1$,且至少为二重特征值.

对 $\boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$ 两边同时取转置,得

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}^*)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O},$$

知 $(\boldsymbol{B}^*)^{\mathrm{T}}$ 的列向量是 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解;又 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}^*)=1$,故 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda=-1$,且至少有一个线性无关的解.

所以 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量,从而 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵.

由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}^*)=2+1=3$,知 $\lambda=1$ 是二重特征值,$\lambda=-1$ 是单特征值.

$\lambda=1$ 对应的特征向量可取 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列与第 2 列,即 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

由 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$,可求得代数余子式 $B_{11}=-1,B_{21}=0,B_{31}=-1$.

取 $(\boldsymbol{B}^*)^{\mathrm{T}}$ 的第 1 列,即 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,-1)^{\mathrm{T}}$ 为 $\lambda=-1$ 的特征向量.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&0&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

从而 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}^2=\boldsymbol{E}$. 故 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{PEP}^{-1}=\boldsymbol{E}$.

拓展题

解答题

(1) 解 (Ⅰ) 令 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值,则 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$.

由 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,有 $(\lambda^2-2\lambda)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$,故 $\lambda=0$ 或 $\lambda=2$.

又由于 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$,故 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=2$.

由已知,$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$,故 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 对应的特征向量.

令 $\boldsymbol{\alpha}_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 是 $\lambda_3=2$ 对应的特征向量,则由实对称矩阵不同特征值对应的特征向量必正交,有

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=x_1+x_2=0,\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=x_1+x_3=0,\end{cases}$$

解得 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

$$\text{令 }\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},\text{则 }\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}.$$

(Ⅱ) 由(Ⅰ) 可求得

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-1&2\\-1&1&1\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}=\dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

(2) 解 由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的迹,即

$$k+3+(-6)=1+2+(-1),$$

解得 $k=5$. 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -2\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 0 & -4 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)=0,$$

得 $\boldsymbol{B}$ 的三个不同特征值分别为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-1$,由此可知,$\boldsymbol{B}$ 相似于对角矩阵.

由 $(1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$;

由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=(8,3,4)^{\mathrm{T}}$;

由 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}$.

又由于 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,故 $1,2,-1$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

由 $(1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得特征向量 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$;

由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得特征向量 $\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$;

由 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得特征向量 $\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,-3)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}_2=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,则 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}$.

综上可得 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1$,即 $(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1})=\boldsymbol{B}$,故 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$,其中

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 8 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 4 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{8}{3} & 0\\ 1 & -\frac{11}{3} & 1\\ -1 & \frac{1}{3} & 2\end{pmatrix}.$$

(3) 解 由已知,$\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\begin{pmatrix}a_{n-1}\\ b_{n-1}\end{pmatrix}$. 由 $\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$,有 $\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n-1}\\ b_{n-1}\end{pmatrix}$,所以 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$.

要求 $\boldsymbol{A}^n$,先求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.

由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ 1 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-3)=0,$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$.

由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0$,得 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=(2,1)^{\mathrm{T}}$.

由 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0$,得 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$,故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$,可得

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n+1}-3^n & -2^{n+1}+2\cdot 3^n\\ 2^n-3^n & -2^n+2\cdot 3^n\end{pmatrix}.$$

依题设,有

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & -2^{n+1} + 2 \cdot 3^n \\ 2^n - 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 3^{n+1} \\ 2^{n+1} - 3^{n+1} \end{pmatrix},$$

即 $a_n = 2^{n+2} - 3^{n+1}, b_n = 2^{n+1} - 3^{n+1}$,从而

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} - 3^{n+1}}{2^{n+2} - 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1}{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1} = 1.$$

第十二章　二次型

基础题

一、选择题

(1)B.

解 由 $f=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,知选项 B 正确.

(2)B.

解 用配方法解.

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=2x_1^2-2x_1(x_2+x_3)+\frac{1}{2}(x_2+x_3)^2+\frac{3}{2}x_2^2+\frac{3}{2}x_3^2-3x_2x_3\\&=2\left(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{2}(x_2^2-2x_2x_3+x_3^2)\\&=2\left(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{2}(x_2-x_3)^2.\end{aligned}$$

令 $\begin{cases}y_1=x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3,\\y_2=x_2-x_3,\\y_3=x_3,\end{cases}$ 则标准形为 $f=2y_1^2+\frac{3}{2}y_2^2$. 选项 B 正确.

注 ① 下列做法是错误的:

令 $\begin{cases}y_1=x_1-x_2,\\y_2=x_2-x_3,\\y_3=x_3-x_1,\end{cases}$ 则标准形为 $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

错误原因是矩阵 $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & -1\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 是不可逆的,线性变换要求可逆. 由于二次型的秩为 2,所以标准形中没有 y_3 项.

② 此题也可将平方项展开,写出二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$,求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值得标准形,注意标准形不唯一.

(3)B.

解 依题意,$\boldsymbol{A}$ 的二次型 $f=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2$ 在可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下化为

$$f=2y_1^2+3y_2^2+y_3^2,$$

故该变换为

$$\begin{cases}x_1=0y_1+0y_2+y_3,\\x_2=y_1+0y_2+0y_3,\\x_3=0y_1+y_2+0y_3,\end{cases}$$

即$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$,故 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$. 选项 B 正确.

注 ① $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\xrightarrow[\boldsymbol{P}\text{可逆}]{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$,$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同,$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 称为合同变换.

② $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的正、负惯性指数分别相等,即 $p_{\boldsymbol{A}}=p_{\boldsymbol{B}}$,$q_{\boldsymbol{A}}=q_{\boldsymbol{B}}$.

(4) A.

解 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列与第 j 列、第 i 行与第 j 行交换,相当于右乘、左乘初等矩阵,即

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_{i,j}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{i,j},$$

又 $\boldsymbol{E}_{i,j}^{-1}=\boldsymbol{E}_{i,j}$,$\boldsymbol{E}_{i,j}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}_{i,j}$,故 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_{i,j}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{i,j}=\boldsymbol{E}_{i,j}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{i,j}=\boldsymbol{E}_{i,j}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{i,j}$,所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价、相似且合同. 选项 A 正确.

(5) A.

解 判定规范形,只要确定二次型的秩及正、负惯性指数,可以通过求二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值来确定.

f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}$,由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^2(\lambda-9)=0$,得 $\lambda_1=9$,$\lambda_2=\lambda_3=0$,所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$,正惯性指数 $p=1$,负惯性指数 $q=0$,故选项 A 正确.

(6) D.

解 对于选项 A:$\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

由于 $\boldsymbol{P}$ 由 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量构成,所以 $\boldsymbol{P}$ 不唯一,排除选项 A.

对于选项 B:$\boldsymbol{Q}$ 由 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量经正交单位化后构成,故 $\boldsymbol{Q}$ 不唯一,排除选项 B.

对于选项 C:若 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵,则存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$,即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{A}^2$,但 $\boldsymbol{A}$ 不唯一. 例如,$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}$,则

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}.$$

记 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}$,$\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}$,则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}_1^2$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}_2^2$,故 $\boldsymbol{A}$ 不唯一.

对于选项 D:当 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵时,$\boldsymbol{B}$ 的特征值全大于零,则存在唯一正定矩阵 $\boldsymbol{A}$,使得 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}$.

选项 D 正确.

(7) D.

解 当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶实对称矩阵时,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的正、负惯性指数.

由 $p_{\boldsymbol{A}}+q_{\boldsymbol{A}}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$,$p_{\boldsymbol{B}}+q_{\boldsymbol{B}}=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$,知选项 D 正确.

对于选项 A,B,C:取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$,则有 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$. 即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同,但 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,1;$\boldsymbol{B}$ 的特征值为 4,1.

$(1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量,但不是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量,$|\boldsymbol{A}|=1$,$|\boldsymbol{B}|=4$. 可排除选项 A,B,C.

注 ① 当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶实对称矩阵时,有

$$\boldsymbol{A}\text{ 与 }\boldsymbol{B}\text{ 相似}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\text{ 与 }\boldsymbol{B}\text{ 有相同的特征值}.$$

② 当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶矩阵时,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的必要条件而非充分条件. 如:$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$.

但由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\neq\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$,知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不相似.

(8) D.

解 选项 A 中的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 没有可逆的条件. 故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$ 不能得到 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 合同，即 $\boldsymbol{A}$ 不一定正定.

选项 B 是 $\boldsymbol{A}$ 正定的必要条件但不是充分条件. 由 $\mathrm{r}(f)=p+q\leqslant n$，当 $q=0$ 时，有 $\mathrm{r}(f)=p\leqslant n$. 此时可能 $p<n$，因而 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 不一定是正定二次型，从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不一定是正定矩阵，如 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2$.

选项 C 是充分条件，但不是必要条件.

由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$，知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 相似，故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 1，$\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于零时，$\boldsymbol{A}$ 就是正定矩阵. 特征值全为 1 是不必要的.

选项 D，由于 $\boldsymbol{A}$ 正定 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}^{-1}$ 正定 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}^*$ 正定，而 $\boldsymbol{A}^*$ 正定 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}^*$ 合同于 $\boldsymbol{E}$. 所以，选项 D 正确.

(9) A.

解 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$，对二次型 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 用配方法求矩阵 $\boldsymbol{C}$.

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}&=x_1^2-x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3\\&=(x_1^2+4x_1x_2+4x_2^2)-4x_2^2+4x_2x_3-x_3^2\\&=(x_1+2x_2)^2-(2x_2-x_3)^2.\end{aligned}$$

令 $\begin{cases}y_1=x_1+2x_2,\\y_2=2x_2-x_3,\\y_3=x_3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=y_1-y_2-y_3,\\x_2=\dfrac{1}{2}(y_2+y_3),\\x_3=y_3.\end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$. 所求可逆矩阵

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

选项 A 正确.

二、填空题

(1) $-2<a<1$.

解 二次型 f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&-1\\a&4&2\\-1&2&4\end{pmatrix},$$

由已知，$\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式分别为

$$\begin{aligned}&\Delta_1=1>0,\\&\Delta_2=\begin{vmatrix}1&a\\a&4\end{vmatrix}=4-a^2>0,\\&\Delta_3=\begin{vmatrix}1&a&-1\\a&4&2\\-1&2&4\end{vmatrix}=-4(a-1)(a+2)>0,\end{aligned}$$

解得 $-2<a<2$ 且 $-2<a<1$，故 $-2<a<1$.

(2) 9.

解 依题设，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-2,8,0$.

由 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}$，故 $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$，所以

$$\boldsymbol{B}^{-1}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}.$$

而 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为

$$-2+1=-1,\ 8+1=9,\ 0+1=1.$$

故 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^{-1}+2\boldsymbol{E})=-1+9+1=9$.

注 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,其特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$.

三、解答题

(1) 解 (Ⅰ) 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$,由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\2&4&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10)=0,$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=10$.

对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$,由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,解得 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,2,1)^{\mathrm{T}}$;

对应于 $\lambda_3=10$,由 $(10\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,解得 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$.

由 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 已正交,将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化,得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{3}(2,1,2)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{3}(-2,2,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{3}(1,2,-2)^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵,$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 为正交变换,标准形为 $f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$.

(Ⅱ) 用配方法解.

$$\begin{aligned}f&=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3\\&=2x_1^2+4x_1(x_2-x_3)+5x_2^2+5x_3^2-8x_2x_3\\&=2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2-(x_2-x_3)^2]+5x_2^2+5x_3^2-8x_2x_3\\&=2[(x_1+x_2-x_3)^2-(x_2-x_3)^2]+5x_2^2+5x_3^2-8x_2x_3\\&=2(x_1+x_2-x_3)^2-2(x_2-x_3)^2+5x_2^2+5x_3^2-8x_2x_3\\&=2(x_1+x_2-x_3)^2+3x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3\\&=2(x_1+x_2-x_3)^2+3\left[x_2^2-\frac{4}{3}x_2x_3+\left(\frac{2}{3}x_3\right)^2-\left(\frac{2}{3}x_3\right)^2\right]+3x_3^2\\&=2(x_1+x_2-x_3)^2+3\left(x_2-\frac{2}{3}x_3\right)^2+\frac{5}{3}x_3^2.\end{aligned}$$

令$\begin{cases}y_1=x_1+x_2-x_3,\\y_2=x_2-\dfrac{2}{3}x_3,\\y_3=x_3,\end{cases}$ 矩阵$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-\dfrac{2}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}$可逆,则 $f=2y_1^2+3y_2^2+\frac{5}{3}y_3^2$.

注 配方法:“一次一个字母”,即一次配方解决一个字母且线性变换要求可逆.

(2) 解 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$,则

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+9-a^2).$$

由已知正交变换下的标准形为 $y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$,故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=5,$$

所以 $|1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$,即 $4-a^2=0$,得 $a=2(a>0)$.

对应于 $\lambda_1=1$,由 $(1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$;

对应于 $\lambda_2=2$,由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$;

对应于 $\lambda_3=5$,由 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$.

显然 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 已两两正交,单位化得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^{\mathrm{T}},$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 为所求正交变换.

(3) **证** (充分性) 对 $\forall\,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$(因 $\boldsymbol{P}$ 可逆，$\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解)，

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})>0.$$

由二次型正定的定义，知 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是正定的，故 $\boldsymbol{A}$ 正定.

(必要性) 由 $\boldsymbol{A}$ 正定，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，且存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},$$

取 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$.

注 此题可作为判别 $\boldsymbol{A}$ 是否正定的一个结论.

(4) **解** (Ⅰ) 由已知，有

$$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

故 $\lambda_1=3,\lambda_2=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\xi}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 分别为其特征向量.

由 $r(\boldsymbol{A})=2$，有 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=3\times(-1)\times\lambda_3=0$，得 $\lambda_3=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 令 $\lambda_3=0$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，其不同特征值对应的特征向量必正交，故

$$\begin{cases}\boldsymbol{\xi}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_1=x_1+2x_2+x_3=0,\\\boldsymbol{\xi}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_2=x_1-x_2+x_3=0.\end{cases}$$

解得 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$. 则由

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1&0\\6&1&0\\3&-1&0\end{pmatrix}$$

得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-1&0\\6&1&0\\3&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&8&1\\8&10&8\\1&8&1\end{pmatrix}.$$

(Ⅱ) 将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 单位化，得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$ 为正交变换.

$$X^TAX \xlongequal{X=QY} 3y_1^2-y_2^2+0\cdot y_3^2,\text{其中}\ Y=(y_1,y_2,y_3)^T.$$

故

$$X^T(A+E)X \xlongequal{X=QY} 3y_1^2-y_2^2+0\cdot y_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2=4y_1^2+0\cdot y_2^2+y_3^2.$$

当 $X^T(A+E)X=0$ 时,有 $y_1=0,y_2=c,y_3=0$(c 为任意常数).

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=X=QY=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{2}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt3}&0\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\c\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}c\\-\frac{1}{\sqrt3}c\\\frac{1}{\sqrt3}c\end{pmatrix},$$

即 $(x_1,x_2,x_3)^T=c\left(\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)^T$ 为所求全部解.

(5) 解 (Ⅰ) 依题设,$f(x_1,x_2,x_3)=0$,当且仅当

$$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_2-x_3=0,\\x_1+ax_3=0.\end{cases}$$

对上方程组的系数矩阵作初等行变换,有

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\1&0&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\0&-1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\0&0&a-1\end{pmatrix}.$$

当 $a\neq1$ 时,$f(x_1,x_2,x_3)=0$ 只有零解 $(0,0,0)^T$.

当 $a=1$ 时,$f(x_1,x_2,x_3)=0$ 有非零解,且通解为 $k(-1,1,1)^T$(k 为任意常数).

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知,当 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 有非零解时,有 $a=1$.

此时 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$,其矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}.$$

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-1&\lambda-2&1\\-1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)^2$,得 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=3$.

对于 $\lambda_1=0$,由 $(0E-A)X=\mathbf{0}$,得特征向量 $\alpha_1=(-1,1,1)^T$.

对于 $\lambda_2=\lambda_3=3$,由 $(3E-A)X=\mathbf{0}$,得特征向量

$$\alpha_2=(1,1,0)^T,\ \alpha_3=\frac{1}{2}(1,-1,2)^T\ \ (\alpha_2,\alpha_3\ \text{已正交}).$$

将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化,得

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt3}(-1,1,1)^T,\ \gamma_2=\frac{1}{\sqrt2}(1,1,0)^T,\ \gamma_3=\frac{1}{\sqrt6}(1,-1,2)^T.$$

令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$,则 $X=QY$ 为所求的一个正交变换,标准形为

$$0y_1^2+3y_2^2+3y_3^2=3y_2^2+3y_3^2.$$

(Ⅲ) 当 $a\neq1$ 时,由(Ⅰ)知 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 只有零解.

即 $\forall\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，有 $f(x_1,x_2,x_3)>0$，故 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为正定二次型，其规范形为 $z_1^2+z_2^2+z_3^2$.

当 $a=1$ 时，由(Ⅱ)知 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0,3,3，故 $\mathrm{r}(f)=2$，正惯性指数为 2，负惯性指数为 0. 所以，$f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形为 $z_2^2+z_3^2$.

(6) 解 (Ⅰ) 由 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\mathbf{0}=0\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

故 $\lambda_3=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\beta}_3=(1,2,-1)^{\mathrm{T}}$ 是其特征向量.

令 $\lambda_1=\lambda_2=1$，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$. 由 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，知 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_3=0$，即 $x_1+2x_2-x_3=0$. 解得 $\boldsymbol{\beta}_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，为 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 对应的特征向量.

将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 正交化，得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\beta}_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\beta}_2-\frac{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{5}(1,2,5)^{\mathrm{T}}.$$

将 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 单位化，得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt5}(-2,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{30}}(1,2,5)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt6}(1,2,-1)^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$ 为所求正交变换，标准形为 $y_1^2+y_2^2$.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知，$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{-1}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{\mathrm{T}}$，故

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt{30}}&\frac{2}{\sqrt6}\\0&\frac{5}{\sqrt{30}}&-\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}&0\\\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{2}{\sqrt{30}}&\frac{5}{\sqrt{30}}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{2}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac56&-\frac13&\frac16\\-\frac13&\frac13&\frac13\\\frac16&\frac13&\frac56\end{pmatrix}.$$

由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=1$，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 有两个线性无关的解，$|\boldsymbol{A}|=0$.

由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，知 $\boldsymbol{A}$ 的列向量中线性无关的 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的两个基础解.

故所求通解为 $k_1\left(\frac56,-\frac13,\frac16\right)^{\mathrm{T}}+k_2\left(-\frac13,\frac13,\frac13\right)^{\mathrm{T}}$ (k_1,k_2 为任意常数).

(7) 解 (Ⅰ) 由 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{A\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}$，知 $\lambda_1=2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 又 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$，$\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，故

$$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

即 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，设其特征向量为 $\boldsymbol{\beta}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，由 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值对应的特征向量必正交，知 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=-x_1+x_2+x_3=0$. 解得基础解系为

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,2)^{\mathrm{T}}.$$

满足 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\beta}_1=\mathbf{0}$，$(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{A\beta}_1=\mathbf{0}$，$\boldsymbol{A\beta}_2=\mathbf{0}$，故 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的通解为

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2=k_1(1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(1,-1,2)^{\mathrm{T}}\ (k_1,k_2\text{ 为任意常数}).$$

(Ⅱ) 将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 单位化,得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$. 故

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

(Ⅲ) 由(Ⅱ)知 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\xlongequal{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}}2y_1^2+0y_2^2+0y_3^2=0$.

令 $y_1=0,y_2=c_1,y_3=c_2$(c_1,c_2 为任意常数),则

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{c_1}{\sqrt{2}}+\frac{c_2}{\sqrt{6}}\\ \frac{c_1}{\sqrt{2}}-\frac{c_2}{\sqrt{6}}\\ \frac{2c_2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$ 的全部解.

(8) 解 (Ⅰ) 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同,知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$,因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leqslant 2$,所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant 2$.

又 $|\boldsymbol{A}|$ 中有 2 阶子式 $\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}\neq 0$,知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geqslant 2$,故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$,从而 $|\boldsymbol{A}|=0$.

由 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&-1\\1&-1&a-1\end{vmatrix}=4a-8=0$,得 $a=2$.

当 $a=2$ 时,有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&-1\\1&-1&1\end{pmatrix},$$

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-1\\0&\lambda-2&1\\-1&1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-3).$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=3$.

由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同,知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的正、负惯性指数. 故 $b>0$,即 $b\in(0,+\infty)$.

(Ⅱ) 由 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$,知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值,故 $b=2$. 下面求 $\boldsymbol{A}$ 的特

征向量.

由 $0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&-1\\0&-2&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,得 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,2)^{\mathrm{T}}$.

由 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,得 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$.

由 $3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\-1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,得 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化,得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵,使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$.

综合题

一、选择题

(1)A.

解 求正、负惯性指数,可通过标准形(规范形)或特征值得到,已知二次型 f 中没有平方项,先作可逆线性变换产生平方项,再化为标准形或求其矩阵的特征值.

令$\begin{cases}x_1=y_1+y_2,\\x_2=y_1-y_2,\\x_3=y_3,\end{cases}$矩阵$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$可逆,则

$$f=(y_1+y_2)(y_1-y_2)+(y_1-y_2)y_3=y_1^2-y_2^2+y_1y_3-y_2y_3.$$

用配方法化为标准形,得

$$f=\left(y_1+\frac{1}{2}y_3\right)^2-\left(y_2+\frac{1}{2}y_3\right)^2,$$

令$\begin{cases}z_1=y_1+\dfrac{1}{2}y_3,\\z_2=y_2+\dfrac{1}{2}y_3,\\z_3=y_3,\end{cases}$矩阵$\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$可逆,故二次型为 $f=z_1^2-z_2^2$,所以 $p=1,q=1$. 选项 A 正确.

(2)C.

解 首先,④ 是必要条件.

若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同,则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$,故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$,且正、负惯性指数不变,即 $p_{\boldsymbol{A}}=p_{\boldsymbol{B}}$,反之,若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$,且 $p_{\boldsymbol{A}}=p_{\boldsymbol{B}}$,由于

$$p_{\boldsymbol{A}}+q_{\boldsymbol{A}}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\ p_{\boldsymbol{B}}+q_{\boldsymbol{B}}=\mathrm{r}(\boldsymbol{B}),$$

故 $q_{\boldsymbol{A}}=q_{\boldsymbol{B}}$,所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同.

③ 是充分条件,不是必要条件. 故选项 C 正确.

注 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$,称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同,定义中并没有要求 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵,但当 $\boldsymbol{A}$ 是实对称阵时,由 $(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$,即 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$,故 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$,说明 $\boldsymbol{B}$ 也是实对称矩阵. 一

般情况下,只讨论对称矩阵的正、负惯性指数.

(3) A.

解 由正定二次型的定义,知 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 正定的充分必要条件是对任意 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0$,其中当且仅当方程组 ① 只有零解时等号成立.

$$\begin{cases}x_1+a_1x_2=0,\\ x_2+a_2x_3=0,\\ \qquad\vdots\\ x_n+a_nx_1=0.\end{cases} \tag{①}$$

方程组 ① 只有零解的充分必要条件是其系数行列式不为零,即

$$\begin{vmatrix}1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n\neq 0,$$

因此,当 $1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n\neq 0$ 时,对任意不全为 0 的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0,$$

故正定,选项 A 正确.

注 按第 1 列展开计算行列式.

(4) A.

解 用排除法解. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均不是对称矩阵,$\boldsymbol{D}$ 是对称矩阵,故矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均与 $\boldsymbol{D}$ 不合同,排除选项 B,C,D,只有选项 A 正确. 下面说明选项 A 正确.

考虑矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$,可以看出,交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 1,2 行,再交换第 1,2 列可得 $\boldsymbol{C}$,即

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

故

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}.$$

由合同的定义知,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 合同.

下面证明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似. 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2,$$

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1\\ 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2,$$

知,矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的二重特征值 $\lambda=1$.

又

$$\mathrm{r}(1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\mathrm{r}\left[\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right]=1,$$

$$\mathrm{r}(1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=\mathrm{r}\left[\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]=1,$$

故 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的二重特征值 $\lambda=1$ 只有一个线性无关的特征向量,从而 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均不相似于对角矩阵.

利用相似的定义,看是否存在可逆阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$,即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$,得方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} x_1+x_3=0, \\ x_1-x_2-x_4=0, \\ x_2+x_3+x_4=0, \end{cases}$$

求其一个基础解. 取 $x_3=-1,x_4=1$,则 $x_1=1,x_2=0$,故可取 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 可逆(不唯一),使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$. 所以选项 A 正确.

注 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同,则存在可逆阵 $\boldsymbol{C}$,使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$,如果 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,则

$$(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}.$$

即

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}.$$

从而 $\boldsymbol{B}$ 也是实对称矩阵,即若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 中有一个矩阵是实对称矩阵,则另一个矩阵必为实对称矩阵.

(5)D.

解 确定 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 的规范形,只要确定其正、负惯性指数,通过 $\boldsymbol{A}$ 的特征值可以得到正、负惯性指数.

$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$,两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$,得 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}^*$. 由 $|\boldsymbol{A}|=2$,知 $|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}$,即 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$.

设 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值为 λ,则 $\lambda^2-\lambda-2=0$,故 $\boldsymbol{A}$ 可能的特征值为 $-1,2$. 由 $|\boldsymbol{A}|=2$,知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能为 $-1,-1,2$,所以 $p=1,q=2$,选项 D 正确.

(6)B.

解 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3),$$

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -4 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3),$$

知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=3$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,所以 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(-1,3)$;$\boldsymbol{B}$ 有不同的特征值,知 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(-1,3)$,故 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,即必存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$. 选项 B 正确.

对于选项 A:$\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,必存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}_1$,使得 $\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{AQ}_1=\boldsymbol{\Lambda}$;$\boldsymbol{B}$ 不是实对称矩阵,则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_1$,使得 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{BP}_1=\boldsymbol{\Lambda}$,则 $\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{AQ}_1=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{BP}_1$,即

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{AQ}_1\boldsymbol{P}_1^{-1}=\boldsymbol{B},(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{P}_1^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{P}_1^{-1})=\boldsymbol{B}.$$

令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{P}_1^{-1}$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$,但 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{P}_1^{-1}$ 不是正交矩阵. 选项 A 不正确.

对于选项 C:$\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,$\boldsymbol{B}$ 不是实对称矩阵,故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不合同. 选项 C 不正确.

对于选项 D:$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1,3$,正惯性指数 $p=1$,负惯性指数 $q=1$,故 $\boldsymbol{A}$ 不合同单位阵 $\boldsymbol{E}$,即 $\boldsymbol{A}$ 不是正定矩阵. 选项 D 不正确.

注 ① 仅实对称矩阵才能利用正交矩阵相似于对角矩阵,当 $\boldsymbol{A}$ 不是实对称矩阵时,不同特征值对应的特征向量没有正交性(是线性无关),即使 Schmidt 正交化,$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1$,记 $k=-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}$. 由 $(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)\neq 0$,知 $k\neq 0$,则 $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_1$ 已不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量(因 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值的特征向量之和不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量),此时不能正交相似于对角矩阵.

② 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵,则

$$\boldsymbol{A}\text{ 正定}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\ (\boldsymbol{P}\text{ 为 }n\text{ 阶可逆矩阵})$$
$$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\text{ 合同于单位矩阵}.$$

(7)C.

解 依题设,$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=0,\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0,\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0$,知$\boldsymbol{A}$的三个特征向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是两两正交的向量.设其对应的特征值分别为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$.将$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$单位化后,记为$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$.令$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$,则$\boldsymbol{Q}$为正交矩阵,使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3),$$

故$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{-1}$.从而

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{Q}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{A}\ (\text{因为 }\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}),$$

所以$\boldsymbol{A}$是对称矩阵,选项C正确.

由于不能确定特征值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$中是否有0特征值,所以$\boldsymbol{A}$不一定可逆,从而$\boldsymbol{A}$不一定是正交矩阵与正定矩阵(因为正交矩阵与正定矩阵均可逆),故排除选项A,B,D.

注 设$\boldsymbol{A}$是n阶实矩阵,则

$$\boldsymbol{A}\text{ 有 }n\text{ 个两两正交的实特征向量}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\text{ 是实对称矩阵}.$$

(8)A.

解 依题设,对$\forall\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$,有$|\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}|<|\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}|$,而$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}>\boldsymbol{0}$,故

$$-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}<\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}<\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}.$$

由$-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}<\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$,知$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}>0$.又$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$是2阶实对称矩阵,故$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$是正定矩阵.

同理,由$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}<\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$,知$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}>0$,故$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$是正定矩阵.

又$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}a+1&a-1\\a-1&a\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1-a&1-a\\1-a&2-a\end{pmatrix}$,故

$$\begin{cases}a+1>0,\\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=3a-1>0,\end{cases}\quad\begin{cases}1-a>0,\\|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=1-a>0.\end{cases}$$

即$a>\dfrac{1}{3}$且$a<1$,$a\in\left(\dfrac{1}{3},1\right)$.选项A正确.

(9)A.

解

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2)&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{X})^2+(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{X})^2=(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1)(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})+(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2)(\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})\\&=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}(1,2)\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}(a,1)\boldsymbol{X}\\&=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1+a^2&2+a\\2+a&5\end{pmatrix}\boldsymbol{X}.\end{aligned}$$

故f的矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1+a^2&2+a\\2+a&5\end{pmatrix}$.由已知,$g$的矩阵为$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b&b\\b&b\end{pmatrix}$.

依题意,$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$合同,知$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=1$,且$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$有相同的正、负惯性指数,故

$$|\boldsymbol{A}|=(2a-1)^2=0,\ \text{得 }a=\frac{1}{2}.$$

当$a=\dfrac{1}{2}$时,由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-\dfrac{5}{4}&-\dfrac{5}{2}\\-\dfrac{5}{2}&\lambda-5\end{vmatrix}=\lambda\left[\lambda-\left(\frac{5}{4}+5\right)\right]=0,$$

得$\lambda_1=0,\lambda_2=\dfrac{25}{4}>0$.

又

$$|\mu\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\mu-b&-b\\-b&\mu-b\end{vmatrix}=\mu(\mu-2b)=0,\ \text{得}\mu_1=0,\ \mu_2=2b>0.$$

故 $a=\dfrac{1}{2},b>0$. 选项 A 正确.

(10)D.

解 由 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$,知$(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}$,故矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 有非零特征值 1.

又 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha})\leqslant 1$,且 $\boldsymbol{\alpha}$ 为非零列向量,故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=1$.

由于 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 为实对称矩阵,故存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

从而
$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$,从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=1$. 排除选项 A,C.

由

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{Q}&=\frac{1}{|\boldsymbol{Q}|}\boldsymbol{Q}^*\boldsymbol{A}^*|\boldsymbol{Q}|(\boldsymbol{Q}^*)^{-1}=\boldsymbol{Q}^*\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{Q}^{-1})^*=(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})^*\\&=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

知 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}$ 在正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$ 下的标准形为 y_1^2. 选项 D 正确.

(11)C.

解 依题设,对 $\forall\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$,有$|\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}|<|\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}|$. 而 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}>0$,故

$$-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}<\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}<\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}.$$

由 $-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}<\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$,知 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}>0$. 又 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为 2 阶实对称矩阵,故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵.

同理,由$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}<\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$,知 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}>0$,故 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\\\boldsymbol{X}_2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\\\boldsymbol{X}_2\end{pmatrix}&=(\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\\\boldsymbol{X}_2\end{pmatrix}\\&=\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}_2.\end{aligned}$$

当 $\boldsymbol{X}_1\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{X}_2\neq\boldsymbol{0}$时,$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}_2>0$,从而 4 阶实对称矩阵$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\end{pmatrix}$正定. 所以,二次型的规范形为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2$,选项 C 正确.

(12)C.

解 由 $|\boldsymbol{A}|=3,\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}$,有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})=-\boldsymbol{A}^2+4\boldsymbol{A},$$

故 $3\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{A}^2+4\boldsymbol{A}$,即$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E}$.

于是 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵,又$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$ 是实对称矩阵,从而$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$ 是正定矩阵,故二次型$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}$ 的规范形为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$. 选项 C 正确.

注 结论:设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 正定 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$.

二、填空题

(1)$y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

解 求规范形的关键是确定正、负惯性指数.

由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同,知 $p_{\boldsymbol{A}}=p_{\boldsymbol{B}},q_{\boldsymbol{A}}=q_{\boldsymbol{B}}$. 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda&-3\\0&-3&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-9)=0,$$

得$\boldsymbol{B}$的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=-3$,故$p_{\boldsymbol{B}}=2,q_{\boldsymbol{B}}=1$,即有$p_{\boldsymbol{A}}=2,q_{\boldsymbol{A}}=1$,所以$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$的规范形为$y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

(2)n.

解 由已知,$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有唯一解,故$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$只有零解.即$\forall\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,有$\boldsymbol{Ax}\neq\boldsymbol{0}$,故

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{Ax})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax})>0,$$

所以二次型正定,于是二次型的正惯性指数为n.

注 由$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$知,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$是对称矩阵.

(3)$-y_1^2-y_2^2+y_3^2$.

解 由$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$经正交变换下的标准形,知$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$,且

$$|\boldsymbol{A}|=1\times1\times(-1)=-1.$$

又$\boldsymbol{A}^*$的特征值为

$$\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1}=-1,\ \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_2}=-1,\ \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_3}=1,$$

故$p_{\boldsymbol{A}^*}=1,q_{\boldsymbol{A}^*}=2$,所以$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}$的规范形为$-y_1^2-y_2^2+y_3^2$.

注 ① $\boldsymbol{A}$是可逆实对称矩阵,则$\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}^*$都是实对称矩阵.

② 讨论正、负惯性指数时,应掌握惯性定理:二次型f经可逆线性变换,其正、负惯性指数不变,且$p+q=\mathrm{r}(f)$,其秩$\mathrm{r}(f)$也不变.

(4) 10.

解 由已知,$|\boldsymbol{A}|=2\times3\times4=24$,$\boldsymbol{A}^*$的特征值为

$$\frac{|\boldsymbol{A}|}{2}=12,\ \frac{|\boldsymbol{A}|}{3}=8,\ \frac{|\boldsymbol{A}|}{4}=6.$$

由$\boldsymbol{A}$为实对称矩阵,知存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$,使得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix},\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}12&0&0\\0&8&0\\0&0&6\end{pmatrix}.$$

故
$$\begin{aligned}|\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}|&=|\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}|\\&\xlongequal{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}}|(12-2)y_1^2+(8-3)y_2^2+(6-4)y_3^2|\\&=|10y_1^2+5y_2^2+2y_3^2|\leqslant10(y_1^2+y_2^2+y_3^2)=10\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}.\end{aligned}$$

又$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\xlongequal{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QY}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$,故当$|\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}|\leqslant a\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$时,有

$$|\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}|\leqslant a\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}.$$

故a的最小取值为10.

三、解答题

(1) **解** (Ⅰ)二次型的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-a\\1&a&-1\\-a&-1&1\end{pmatrix}$.由已知$p+q=2=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$,故

$$|\boldsymbol{A}|=-(a-1)^2(a+2)=0,$$

解得$a=1$或$a=-2$.

当$a=1$时,$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$,不符合题意,故$a=-2$,所以$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&-2&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，二次型为

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3,$$

由配方法，得

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2+2x_1(x_2+2x_3)+(x_2+2x_3)^2-(x_2+2x_3)^2-2x_2^2+x_3^2-2x_2x_3\\&=(x_1+x_2+2x_3)^2-3x_2^2-6x_2x_3-3x_3^2\\&=(x_1+x_2+2x_3)^2-3(x_2^2+2x_2x_3+x_3^2)\\&=(x_1+x_2+2x_3)^2-3(x_2+x_3)^2.\end{aligned}$$

令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_2+2x_3,\\y_2=x_2+x_3,\\y_3=x_3,\end{cases}$ 即 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{C}$ 可逆，故

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

即 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 为所求可逆变换，所以

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\xrightarrow{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}.$$

令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{-1}$，则 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 标准形为 $y_1^2-3y_2^2$.

注 用配方法求可逆线性变换(不是正交变换)是常用方法.

(2) 解（Ⅰ）由已知 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=4\boldsymbol{\alpha}$，等式两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$，得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=4\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$，即

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\alpha}=4\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\tag{①}$$

故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{4}\boldsymbol{\alpha}$. 又

$$\sum_{i=1}^{3}a_{ii}=1=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2+2+\lambda_3,$$

得 $\lambda_3=-3$，于是有 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-12$.

由 ① 式得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=-3\boldsymbol{\alpha}$，$\lambda_3=-3$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-2)^{\mathrm{T}}$.

由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，令 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0$，即

$$x_1-2x_3=0,\text{解得 }\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2,\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3)$，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2,\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3)(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}\\&=\begin{pmatrix}0&4&-3\\2&0&0\\0&2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&1\\1&0&0\\0&1&-2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\2&0&-2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

（Ⅱ）由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 已正交，所以只需将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化，得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$，为正交矩阵，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 为所求正交变换，标准形为 $2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$.

(3) 解 (Ⅰ) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$$=(n-1)x_1^2+(n-1)x_2^2+\cdots+(n-1)x_n^2-2x_1x_2-2x_1x_3-\cdots-2x_1x_n-2x_2x_3-\cdots-2x_2x_n-\cdots-2x_{n-1}x_n,$$

故二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}n-1&-1&-1&\cdots&-1&-1\\-1&n-1&-1&\cdots&-1&-1\\-1&-1&n-1&\cdots&-1&-1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\-1&-1&-1&\cdots&n-1&-1\\-1&-1&-1&\cdots&-1&n-1\end{pmatrix},$$

注意到 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 0，利用初等变换得

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}n-1&-1&-1&\cdots&-1&0\\-1&n-1&-1&\cdots&-1&0\\-1&-1&n-1&\cdots&-1&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\-1&-1&-1&\cdots&n-1&0\\-1&-1&-1&\cdots&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}n&0&0&\cdots&0&0\\0&n&0&\cdots&0&0\\0&0&n&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&n&0\\0&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$.

(Ⅱ) 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，解得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=n,\ \lambda_n=0,$$

对 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=n$，解 $(n\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\begin{pmatrix}-1\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix},$$

对 $\lambda_n=0$，解 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_n=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

由 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=n>0,\ \lambda_n=0,$$

故二次型的正惯性指数为 $n-1$.

注 $\boldsymbol{A}=n\boldsymbol{E}+\begin{pmatrix}-1&-1&\cdots&-1&-1\\-1&-1&\cdots&-1&-1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\-1&-1&\cdots&-1&-1\end{pmatrix}\overset{\text{记}}{=}n\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$，其中 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=1$.

求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值、特征向量时，可利用秩为 1 的矩阵的特征值、特征向量的结论，见《2026 考研数学线性代数辅导讲义》.

(4) 解（Ⅰ）由已知，齐次线性方程组有非零解，故其系数行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} k+3 & 1 & 2 \\ 2k & k-1 & 1 \\ k-3 & -3 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 1 & 2 \\ k & k-1 & 1 \\ 0 & -3 & k \end{vmatrix} = k(k+1)(k-3)=0,$$

解得 $k=0,-1$ 或 3.

又由于 $\boldsymbol{A}$ 正定，故 $a_{ii}>0$（正定的必要条件），所以 $k=3$，由

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & -2 \\ -1 & \lambda-3 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda-9 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-10),$$

可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=4,\lambda_3=10$，全大于 0，故 $k=3$ 为所求.

（Ⅱ）因 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，故存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为标准形，于是 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$，所以

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=y_1^2+4y_2^2+10y_3^2\leqslant 10(y_1^2+y_2^2+y_3^2)=10\times 1=10,$$

即最大值为 10.

(5) 解（Ⅰ）设 λ_2 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，得 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n=0$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_n=(1,0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$，即 $x_1+x_n=0$. 解此方程，得 λ_2 对应的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_{n-2}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\begin{pmatrix}-1\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix},$$

显然，$\lambda_1=1$ 与 λ_2 对应的 $n-1$ 个特征向量已两两正交，则单位化得正交矩阵

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_2,\cdots,\lambda_2,1)$，于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\lambda_2) & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2}(1-\lambda_2) \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \frac{1}{2}(1-\lambda_2) & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2}(1+\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

（Ⅱ）由于 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 正定的充要条件是其特征值全大于 0，故 $\lambda_2>0$.

注 证明矩阵是正定矩阵，应先验证其是对称矩阵.

(6) 证（必要性）因 $\boldsymbol{A}$ 可逆，取 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$，由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，有

$$AB + B^{T}A = AA^{-1} + (A^{-1})^{T}A = E + E = 2E.$$

显然 $AB + B^{T}A$ 是正定的.

(充分性) 由已知 $AB + B^{T}A$ 正定,根据正定的定义,对 $\forall x \neq 0$,有

$$x^{T}(AB + B^{T}A)x > 0.$$

而

$$\begin{aligned} x^{T}(AB + B^{T}A)x &= x^{T}ABx + x^{T}B^{T}Ax = x^{T}A(Bx) + (Bx)^{T}Ax \\ &= 2x^{T}ABx = 2(Ax)^{T}Bx, \end{aligned}$$

即对 $\forall x \neq 0$,有 $2(Ax)^{T}Bx > 0$,故 $Ax \neq 0$,所以 A 可逆.

(7) 解 (Ⅰ) f 与 g 对应的矩阵分别为 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & -a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$,$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$.

由已知,$r(A) = r(B)$,$a \neq 0$,知 $r(B) = 2$,从而

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & -a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = -a(a^2 - 1) = 0, \text{得 } a = \pm 1.$$

当 $a = 1$ 时,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

显然,$\operatorname{tr}(A) = 1$,$\operatorname{tr}(B) = -1$,知 A 与 B 不相似.

由 $|\lambda E - A| = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$,得 A 的特征值为 $0,-1,2$;

$|\lambda E - B| = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$,得 B 的特征值为 $0,1,-2$,

可知 A,B 有相同的正、负惯性指数,所以 A 与 B 合同,于是存在可逆线性变换 $x = Py$ 将 f 化为 g.

用配方法求 P.

当 $a = 1$ 时,$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 = (x_1 + x_3)^2 - x_2^2$.

令 $\begin{cases} z_1 = x_1 + x_3, \\ z_2 = x_2, \\ z_3 = x_3, \end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,有

$$g(y_1,y_2,y_3) = -y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 + 2y_1y_2 = -(y_1 - y_2)^2 + y_3^2.$$

令 $\begin{cases} z_1 = y_3, \\ z_2 = y_1 - y_2, \\ z_3 = y_2, \end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,则

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

故

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

所以 $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(Ⅱ) 当 $a = -1$ 时,$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

由
$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1&0&-1\\0&\lambda-1&0\\-1&0&\lambda+1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda+2),$$
$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-1&0\\-1&\lambda+1&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda+2),$$
知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值 $0,1,-2$，而 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为实对称矩阵，故分别存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2$，使得
$$\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(0,1,-2)=\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2,$$
即
$$\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1}=(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1})=\boldsymbol{B}.$$
记 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2^{-1}$，则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$.

从而 $f(x_1,x_2,x_3)$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化为 $g(y_1,y_2,y_3)$.

注 ① 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵，则
$$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\text{ 有相同的特征值}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}.$$
② 设 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2$ 均为正交矩阵，则 $\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{E},\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{E}$，故
$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1})=(\boldsymbol{Q}_2^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1}=(\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{Q}_2^{-1}=\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2^{-1}=\boldsymbol{E}.$$
从而 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1}$ 是正交矩阵.

③ 存在可逆(非正交)线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$（$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为实对称矩阵），相当于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同但不相似，用配方法求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

(8) 解 (Ⅰ) 由已知，f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&0&1\\0&a&-1\\1&-1&a-1\end{pmatrix}$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a&0&-1\\0&\lambda-a&1\\-1&1&\lambda-(a-1)\end{vmatrix}=[\lambda-(a+1)](\lambda-a)[\lambda-(a-2)]$，知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=a+1,\lambda_2=a,\lambda_3=a-2$，且互不相等，

由 $(a+1)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\-1&1&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得 $\lambda_1=a+1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

由 $a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得 $\lambda_2=a$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$.

由 $(a-2)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&-1\\0&-2&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得 $\lambda_3=a-2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,2)^{\mathrm{T}}$.

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化，得
$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，所求正交变换为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，标准形为 $(a+1)y_1^2+ay_2^2+$

$(a-2)y_3^2$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知

$$A\sim\begin{pmatrix}a+1&0&0\\0&a&0\\0&0&a-2\end{pmatrix},\ aE-A\sim\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix},\ (aE-A)^2\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&4\end{pmatrix},$$

故 $x^{\mathrm T}(aE-A)^2x\xlongequal{x=Qy}y_1^2+0\cdot y_2^2+4y_3^2=0$,从而

$$y_1=0,\ y_3=0,\ y_2=C\ (C\text{ 为任意常数}),$$

$$x=Qy=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\C\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{C}{\sqrt2}\\\frac{C}{\sqrt2}\\0\end{pmatrix},$$

所求全部解为$(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm T}=C\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},0\right)^{\mathrm T}$.

(9) **解** 由已知 $A=\begin{pmatrix}a&1&b\\1&a&1\\b&1&a\end{pmatrix}\sim\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$,则 $a+a+a=1+1+4$,得 $a=2$.

由 $|1E-A|=\begin{vmatrix}-1&-1&-b\\-1&-1&-1\\-b&-1&-1\end{vmatrix}=(b-1)(1-b)=0$,得 $b=1$. 故

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix},$$

其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=4$.

对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$,由$(E-A)x=0$,解得特征向量为 $\alpha_1=(-1,1,0)^{\mathrm T},\alpha_2=(-1,-1,2)^{\mathrm T}$(已正交).

对应于 $\lambda_3=4$. 由$(4E-A)x=0$,解得特征向量为 $\alpha_3=(1,1,1)^{\mathrm T}$.

将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化,得

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt2}(-1,1,0)^{\mathrm T},\ \gamma_2=\frac{1}{\sqrt6}(-1,-1,2)^{\mathrm T},\ \gamma_3=\frac{1}{\sqrt3}(1,1,1)^{\mathrm T},$$

所求正交矩阵 $Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$.

(Ⅱ)由 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=4$,知 $|A|=1\times1\times4=4$. 可得 A^* 的特征值分别为

$$\mu_1=\frac{|A|}{\lambda_1}=4,\ \mu_2=\frac{|A|}{\lambda_2}=4,\ \mu_3=\frac{|A|}{\lambda_3}=1.$$

故 $A+A^*$ 的特征值为 5,5,5,且知 $A+A^*$ 是正定矩阵,则

$$Q^{-1}(A+A^*)Q=\Lambda=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}$$

$$B^2 = A + A^* = Q\Lambda Q^{-1} = Q\begin{pmatrix}\sqrt{5} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{5} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{5}\end{pmatrix}Q^{-1}Q\begin{pmatrix}\sqrt{5} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{5} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{5}\end{pmatrix}Q^{-1}$$

故 $B = Q\begin{pmatrix}\sqrt{5} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{5} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{5}\end{pmatrix}Q^{-1} = Q(\sqrt{5}E)Q^{\mathrm{T}} = \sqrt{5}EQQ^{\mathrm{T}} = \sqrt{5}E$. 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

注 ① 当 $|A| \neq 0$ 时,设 α 是 A 的特征值 λ 对应的特征向量,即 $A\alpha = \lambda\alpha$,可得 $A^*A\alpha = \lambda A^*\alpha$,故 $|A|\alpha = \lambda A^*\alpha$,即 $A^*\alpha = \dfrac{|A|}{\lambda}\alpha$,说明 α 是 A^* 关于特征值 $\dfrac{|A|}{\lambda}$ 的特征向量. 此题中的正交矩阵 Q,使得 $Q^{-1}A^*Q = \mathrm{diag}(4,4,1)$.

② (Ⅰ) 中求 b 时,若利用 $A \sim \Lambda$,有 $|A| = |\Lambda| = 4$,即

$$|A| = \begin{vmatrix}2 & 1 & b\\ 1 & 2 & 1\\ b & 1 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3+b & 1 & b\\ 4 & 2 & 1\\ 3+b & 1 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3+b & 1 & b\\ 4 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2-b\end{vmatrix} = (2-b)(2+2b)$$

故 $(2-b)(2+2b) = 4$, $2b(1-b) = 0$,解得 $b = 0$ 或 $b = 1$. 需将 $b = 0$, $b = 1$ 代入 A 检验是否保证 $\lambda = 1$ 是 A 的特征值. 此题 $b = 0$ 代入 A 中,可验证 $\lambda = 1$ 不是 A 的特征值,故 $b = 0$ 舍去,取 $b = 1$. 其原因为 $|A| = |\Lambda|$,是 $A \sim \Lambda$ 的必要条件而非充分条件.

(10) 解 (Ⅰ) 依题设,$AX = 0$ 的基础解系为

$$\xi_1 = (-1,1,0)^{\mathrm{T}},\ \xi_2 = (2,0,1)^{\mathrm{T}},$$

故 ξ_1, ξ_2 是 A 的特征值 $\lambda = 0$ 的两个线性无关的特征向量.

由 $\eta = (1,1,-2)^{\mathrm{T}}$ 是 $AX = b$ 的解,即

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = b = \begin{pmatrix}6\\6\\-12\end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},$$

知 $\xi_3 = \eta = (1,1,-2)^{\mathrm{T}}$ 是特征值 6 的特征向量.

令 $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$,则 P 可逆,使得 $P^{-1}AP = \Lambda$,故

$$A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix}0 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 6\\ 0 & 0 & -12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{pmatrix}.$$

(Ⅱ) 由(Ⅰ) 知 $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{pmatrix}$ 的列向量组的一个极大线性无关组为 $\alpha = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

显然,$\mathrm{r}(A) = 1$,故 $A^2 = P\Lambda^2P^{-1} = 6A = 6\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}(6,6,-12)$.

取 $\beta = (6,6,-12)$,则 $A^2 = \alpha\beta$.

(Ⅲ) 用配方法,将 $f(x_1,x_2,x_3) = X^{\mathrm{T}}AX$ 化为标准形:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&1&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$
$$=x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$$
$$=x_1^2+2x_1(x_2-2x_3)+(x_2-2x_3)^2-(x_2-2x_3)^2+x_2^2+4x_3^2-4x_2x_3$$
$$=(x_1+x_2-2x_3)^2.$$

由 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=0$,知 $x_1+x_2-2x_3=0$,解得 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$.

故 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=0$ 的全部解为 $C_1(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+C_2(2,0,1)^{\mathrm{T}}$, C_1,C_2 为任意常数.

(11) **解** (Ⅰ) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 与 $g(y_1,y_2,y_3)$ 对应的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&a\\0&a&2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&b&0\\-1&0&2\end{pmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$ 为正交变换,知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,故有

$$1+2+2=2+b+2,\ 得\ b=1.$$

又 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$,即

$$\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&a\\0&a&2\end{vmatrix}=4-a^2=3,\ 得\ a=1(a>0).$$

(Ⅱ) 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda-2&-1\\0&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-3)$,得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=3$.

由 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$,得特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$(已正交).

由 $3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$,得特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$.

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化,得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{Q}_1=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{AQ}_1=\mathrm{diag}(1,1,3)$.

由 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,得 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$(已正交).

由 $3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,得 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

将 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 单位化,得

$$\boldsymbol{\xi}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{Q}_2=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{BQ}_2=\mathrm{diag}(1,1,3)$.

由 $\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{AQ}_1=\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{BQ}_2$,得 $(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1})=\boldsymbol{B}$.

$$\text{令 } \boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{Q}$ 为所求正交矩阵.

(12) **解**（Ⅰ）令 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_3$,用配方法,得

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_3)^2+x_2^2+x_3^2.$$

令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_3,\\y_2=x_2,\\y_3=x_3,\end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,故

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}.$$

所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）及 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,知 $\boldsymbol{D}\xlongequal{\text{记}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 也是实对称矩阵,且

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

下面求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(0,1,1)=\boldsymbol{\Lambda}$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D}|=\lambda(\lambda-1)^2=0$,得 $\boldsymbol{D}$ 的特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=1$.

由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

由 $(1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$.

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是单位正交向量,令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\mathrm{diag}(0,1,1).$$

令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$（可逆）,则

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\mathrm{diag}(0,1,1),$$

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}.$$

(13) 解 (Ⅰ) 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&a\end{pmatrix}$.

依题设,知 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=2$,所以 $|\boldsymbol{A}|=2(a-1)=0$,得 $a=1$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-2&0\\-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2=0$,得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$,由

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

知其特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$(已正交).

对于 $\lambda_3=0$,由

$$0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-2&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

知其特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化,得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_2)$,则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QZ}$ 为正交变换,标准形为 $2z_1^2+2z_3^2$.

令 $\begin{cases}z_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1,\\ z_2=y_2,\\ z_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_3,\end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$,记作 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{Y}$,则

$$f(x_1,x_2,x_3)\xlongequal{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QP}_1\boldsymbol{Y}}y_1^2+y_3^2.$$

所求可逆矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{QP}_1=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

(Ⅱ) 当 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=1$ 时,

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\xlongequal{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QZ}}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QZ}=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{EZ}=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}=z_1^2+z_2^2+z_3^2=1,$$

故

$$f(x_1,x_2,x_3)\xlongequal{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QZ}}2z_1^2+2z_3^2=2(z_1^2+z_2^2+z_3^2)-2z_2^2\leqslant 2\times1-0=2.$$

即 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的最大值为 2,此时 $z_2=0$.

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\0\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}z_3\\z_1\\\frac{1}{\sqrt{2}}z_3\end{pmatrix}.$$

当 $x_1=x_2>0$ 时，即$\frac{1}{\sqrt{2}}z_3=z_1$，得 $z_3=\sqrt{2}z_1$.

由 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=1$，得 $z_1^2=\frac{1}{3}$，由已知取 $z_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$，故

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

为所求最大值点.

注 ①考虑到(Ⅱ)求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的最大值，(Ⅰ)先求正交变换将 f 化为标准形，再用可逆线性变换化为 $y_1^2+y_3^2$，注意 $\boldsymbol{Q}$ 的列向量排列顺序.

②(Ⅰ)也可用配方法，$\boldsymbol{P}$ 不唯一，(Ⅱ)用正交变换. 注意正交变换保持几何图形不变. 求 f 的最值，用正交变换.

(14) 解 (Ⅰ)由$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-2&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}$，有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-2&-1\\1&0&-1\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,-1$，对应的特征向量分别为

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}_2=(-1,2,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

由 $|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&2&1\\1&0&1\end{vmatrix}=1\neq0$，知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

所以 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(1,-1,-1)$.

令 $\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，则 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{\Lambda}$，$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{\Lambda}^2=\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}_1^{-1}=\boldsymbol{E}$.

所以 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ 是正定二次型.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知，$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{\Lambda}$，等式两边取转置，有

$$\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_1^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1.$$

上式两边左乘$(\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}})^{-1}$，右乘 $\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}$，得

$$(\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_1^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}},$$

即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}})$. 令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&1\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&1\\-2&5&1\\1&1&2\end{pmatrix}.$$

(15) **解** (Ⅰ) 依题设，$\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解，故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

而 $\boldsymbol{B}$ 中有二阶子式 $\begin{vmatrix}-1&0\\-1&1\end{vmatrix}\neq 0$，知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=2$，所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=2$，从而行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$.

由 $|\boldsymbol{AB}|=\begin{vmatrix}-a&0&a^2\\1-a&a&-a+a^2\\1&0&-a\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}-a&a^2\\1&-a\end{vmatrix}=a(a^2-a^2)$，知对任意 a，$|\boldsymbol{AB}|=0$.

当 $a=0$ 时，$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=1$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=2$，故 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 不同解.

当 $a\neq 0$ 时，$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}-a&0&a^2\\1-a&a&-a+a^2\\1&0&-a\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-a\\1-a&a&-a+a^2\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-a\\-a&a&a^2\\0&0&0\end{pmatrix}$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-a\\-1&1&a\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-a\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0&a\\-1&1&a\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-a\\0&1&0\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解. 所以，a 的取值范围为 $a\neq 0$.

(Ⅱ) 当 $\boldsymbol{AB}$ 为实对称矩阵时，由(Ⅰ)知，$a=1$. 此时 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}|=\begin{vmatrix}\lambda+1&0&-1\\0&\lambda-1&0\\-1&0&\lambda+1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda+2)=0$，得 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=1$，$\lambda_3=-2$.

由 $0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

由 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&0&0\\-1&0&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$.

由 $-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-3&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化，得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$ 为正交变换，标准形为 $y_2^2-2y_3^2$.

拓展题

解答题

(1) **解** 令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$ 则 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}$，故

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= 2y_1^2 - 2y_2^2 + 7y_1y_3 + y_2y_3 \\ &= 2\left(y_1 + \frac{7}{4}y_3\right)^2 - 2\left(y_2 - \frac{1}{4}y_3\right)^2 - 6y_3^2. \end{aligned}$$

再令 $\begin{cases} z_1 = y_1 + \dfrac{7}{4}y_3, \\ z_2 = y_2 - \dfrac{1}{4}y_3, \\ z_3 = y_3, \end{cases}$ 则 $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{7}{4} \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{z}$，故可得标准形为 $f = 2z_1^2 - 2z_2^2 - 6z_3^2$，所用可逆线性变换为

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{7}{4} \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\dfrac{3}{2} \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{z},$$

二次型的秩为 3，正、负惯性指数分别为 1 和 2.

(2) **解**（Ⅰ）由二次型在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $-y_1^2 + 2y_2^2 + ay_3^2$，知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = a$. 又由 $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = (-1) \times 2 \times a = -4$，得 $a = 2$.

（Ⅱ）由正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的第 1 列为 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}$，可知特征值 $\lambda_1 = -1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$.
令 $\boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ 是 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 对应的特征向量，则由

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

解得 $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,-1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, -1\right)^{\mathrm{T}}$ 是 $\lambda_2 = \lambda_3$ 对应的特征向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 正交.

将 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化，得

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^{\mathrm{T}},$$

则 $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3)$ 为所求的正交矩阵.

(3) **解**（Ⅰ）由 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵，知 $\boldsymbol{Q}$ 的列向量是两两正交的单位向量，故有

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1, \\ \left(\dfrac{c}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1, \\ \left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1, \end{cases}$$

解得 $b = 1, c = \sqrt{2}, a = \pm 1$. 当 $a = 1$ 时，$\boldsymbol{Q}$ 的第 1 列与第 3 列不正交，故 $a = -1$. 所以，$a = -1$，$b = 1$，$c = \sqrt{2}$.

由已知，$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}(0, b, c^2) = \mathrm{diag}(0,1,2) = \boldsymbol{\Lambda}$，故

$$A = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知

$$Q^{-1}(A+E)Q = \Lambda + E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

即 $x^{\mathrm{T}}(A+E)x \xlongequal{x=Qy} y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2$.

令 $\begin{cases} y_1 = y_1, \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} z_2, \\ y_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} z_3, \end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$,记作 $y = P_1 z$,则

$$x^{\mathrm{T}}(A+E)x \xlongequal{x=QP_1z} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2.$$

令 $P_2 = QP_1$,则 $P_2^{\mathrm{T}}(A+E)P_2 = E$,从而 $A+E = (P_2^{\mathrm{T}})^{-1}P_2^{-1} = (P_2^{-1})^{\mathrm{T}}P_2^{-1}$.

令 $P = P_2^{-1}$,则 $A+E = P^{\mathrm{T}}P$,其中

$$P = P_2^{-1} = (QP_1)^{-1} = P_1^{-1}Q^{-1} = P_1^{-1}Q^{\mathrm{T}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}.$$

(4) 解 (Ⅰ) 由二次型 f 经正交变换 $X = QY$ 化为标准形 $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$,知 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$,所以 $|A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 2$,$A^*$ 的特征值为

$$\frac{|A|}{\lambda_1} = 1,\ \frac{|A|}{\lambda_2} = -2,\ \frac{|A|}{\lambda_3} = -2.$$

又 $A^*\alpha = \alpha$,该式两边左乘 A,得 $AA^*\alpha = A\alpha$. 即 $|A|\alpha = A\alpha$,故 $A\alpha = 2\alpha$,所以 $\alpha = (1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 是 A 属于 $\lambda_1 = 2$ 的特征向量.

设 $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 对应的特征向量为 $X = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$,由于 A 是实对称矩阵,故 α 与 X 正交,即

$$\alpha^{\mathrm{T}}X = x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

解得 $X_1 = (1,-1,0)^{\mathrm{T}}$,$X_2 = (1,1,2)^{\mathrm{T}}$ (已正交).

将 α, X_1, X_2 单位化,得

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^{\mathrm{T}},\ \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^{\mathrm{T}},\ \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^{\mathrm{T}}.$$

令 $Q = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$,则 $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xlongequal{记} \Lambda$,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{Q\Lambda Q}^{-1} = \boldsymbol{Q\Lambda Q}^{\mathrm{T}} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

（Ⅱ）由

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{Q} &= \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}+\boldsymbol{Q}^{-1}(2\boldsymbol{E})\boldsymbol{Q} \\
&= \boldsymbol{\Lambda}+2\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xlongequal{\text{记}} \boldsymbol{\Lambda}_1,
\end{aligned}
$$

知 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 是正定矩阵，且

$$
\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{Q\Lambda}_1\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}.
$$

令

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

则 $\boldsymbol{B}$ 为所求正定矩阵，满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$.

(5) 解（Ⅰ）依题设，f 与 g 的矩阵分别为

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.
$$

由已知，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=2$.

故 $|\boldsymbol{A}|=(1-a)^2(2a+1)=0$，解得 $a=1$ 或 $a=-\dfrac{1}{2}$.

当 $a=1$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$，$a=1$ 舍去，从而 $a=-\dfrac{1}{2}$.

（Ⅱ）由于 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=3$，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})=5$，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不相似. 用配方法将 f 与 g 化为同一规范形，从而求出 $\boldsymbol{P}$.

$$
f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3
$$

$$=x_1^2-x_1(x_2+x_3)+\frac{1}{4}(x_2+x_3)^2-\frac{1}{4}(x_2+x_3)^2+x_2^2+x_3^2-x_2x_3$$

$$=\left(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2+\frac{3}{4}x_3^2-\frac{3}{2}x_2x_3$$

$$=\left(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{4}(x_2^2+x_3^2-2x_2x_3)$$

$$=\left(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{4}(x_2-x_3)^2.$$

令$\begin{cases}z_1=x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3,\\ z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}(x_2-x_3),\\ z_3=x_3,\end{cases}$ 即$\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,则 f 的规范形为 $z_1^2+z_2^2$.

$$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+3y_3^2+2y_1y_2=(y_1+y_2)^2+3y_3^2.$$

令$\begin{cases}z_1=y_1+y_2,\\ z_2=\sqrt{3}y_3,\\ z_3=y_2,\end{cases}$ 即$\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&\sqrt{3}\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$,则 g 的规范形为 $z_1^2+z_2^2$.

由$\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&\sqrt{3}\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$,知

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&\sqrt{3}\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{\sqrt{3}}&1\\0&\frac{2}{\sqrt{3}}&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&\sqrt{3}\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}.$$

所求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&1&0\end{pmatrix}$.

注 此题中二次型 f 与 g 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同但不相似,不能利用 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似于同一对角阵,用配方法. 另外也可以用合同变换,即对 $\boldsymbol{A}$ 作行初等变换及同一列初等变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为 $\boldsymbol{B}$,从而求出 $\boldsymbol{P}$. 合同变换在现行考研大纲中未作要求,$\boldsymbol{P}$ 不唯一.

对 $\boldsymbol{A}$ 作如下初等行与列变换,步骤如下:

① $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行乘以(-1) 加到第 3 行,第 2 列乘以(-1) 加到第 3 列.

② 将 ① 变换完的矩阵的第 3 行乘以$\frac{1}{2}$ 加到第 2 行,第 3 列乘以$\frac{1}{2}$ 加到第 2 列.

③ 将 ② 变换完的矩阵的第 1 行乘以$\frac{3}{2}$ 加到第 2 行,第 1 列乘以$\frac{3}{2}$ 加到第 2 列.

$$\text{即}\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2}\\ 0 & -\frac{3}{2} & 3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & -\frac{3}{2} & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

上述初等列变换对应的初等矩阵分别记为 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3$. 则

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

所求可逆矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}.$$

(6) 解 (Ⅰ) 由已知,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同,且 $r(\boldsymbol{B})=2$,知 $r(\boldsymbol{A})=2$,故

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & a & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & a\end{vmatrix}=(a-1)\left(a+\frac{1}{2}\right)^2=0,$$

解得 $a=1$ 或 $a=-\frac{1}{2}$.

当 $a=-\frac{1}{2}$ 时,$r(\boldsymbol{A})=1$,故 $a=-\frac{1}{2}$ 舍去,取 $a=1$.

(Ⅱ) 由正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$,知 b 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \lambda-1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \lambda-1\end{vmatrix}=\left(\lambda-\frac{3}{2}\right)^2\lambda=0$,得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\frac{3}{2},\lambda_3=0$.

故 $b=\dfrac{3}{2}$.

由$\left(\dfrac{3}{2}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,解得 $\boldsymbol{A}$ 的属于$\lambda_1=\lambda_2=\dfrac{3}{2}$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-2)^{\mathrm{T}}\ (\text{已正交}).$$

由$(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,解得 $\boldsymbol{A}$ 的属于$\lambda_3=0$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化,得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\dfrac{2}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$.

(Ⅲ) 由(Ⅱ),知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$,且计算可知 $|\boldsymbol{Q}|=-1$,故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^*\boldsymbol{Q}&=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{Q}^*\boldsymbol{Q}\\&=(\boldsymbol{Q}^*\boldsymbol{Q})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{Q}^*\boldsymbol{Q})=(|\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^*(|\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E})\\&=(-\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^*(-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{B}^*.\end{aligned}$$

计算可知

$$\boldsymbol{B}^*=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{2} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{3}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{9}{4}\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{2} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{3}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{9}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{2} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{3}{2} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{9}{4}\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}.$

注 由于 $|\boldsymbol{A}|=0$,所以不能用$\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 计算$\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

扫描二维码，获取更多免费资料