

李林老师考研图书仅在北航出版社出版 · 李林全家桶之⑤

考研数学 2026 精讲精练 880题

(数学二) 试题分册

李 林◎编著

紧跟考研趋势

与李林108题搭配使用更佳!

题目不偏不怪 贴近真题



扫码关注作者自媒体
李林老师新浪微博



扫码+刮防伪码
看配套课



扫码登录B站
看配套课



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

2026 考研数学 精讲精练 880 题 (数学二) 试题分册

李 林 编著



扫描二维码，获取更多免费资料



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书是李林老师为准备参加全国硕士研究生招生考试且考数学二的考生编写的习题训练用书。全书按照数学二的考试要求设计选择题、填空题和解答题,包括基础题、综合题和拓展题。基础题可以满足考研的基本要求,综合题和拓展题可作为复习提高阶段的练习。

本书以考研大纲为依据,在深入研究命题规律的基础上,从考生的实际出发精心编写而成,涵盖了考研数学的所有考点,题型全面,难度适中,真题感强。本书分为试题分册与解析分册,方便考生独立做题与核对答案。试题分册中,基础题、综合题与拓展题可以使考生分梯度学习,循序渐进地掌握相关考试内容。解析分册中,对每道题目都给出了详细的解析,方法典型;部分题目提供了多种解法,可以开拓思路。在重点题型和易错知识点的解析中,添加了“注”,对关键点、易错点进行点拨,有助于考生理解。

本书已出版多年,深受考生的厚爱与关注。为了适应考研的变化趋势,针对考研中的难点,作者在本次修订中特别增加了一些综合性较强的题目,以便考生更好地适应考试要求。

图书在版编目(CIP)数据

2026 考研数学精讲精练 880 题. 数学二. 1, 试题分册 /
李林编著. -- 北京: 北京航空航天大学出版社, 2025. 3.
ISBN 978-7-5124-4681-6

I. O13-44

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2025YU9437 号

版权所有,侵权必究。

2026 考研数学精讲精练 880 题(数学二)试题分册

李 林 编著

责任编辑 张冀青

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191) <http://www.buaapress.com.cn>

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱:bhzxf@163.com 邮购电话:(010)82316936

河北宏伟双华印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×1 092 1/16 印张:27.5 字数:844 千字

2025 年 3 月第 1 版 2025 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5124-4681-6 定价:99.80 元 全两册(试题分册+解析分册)

若本书有倒页、脱页、缺页等印装质量问题,请与本社发行部联系调换。联系电话:(010)82317024

前言

本书是为准备参加全国硕士研究生招生考试且考数学二的考生编写的习题训练用书。全书按照数学二的考试要求设计选择题、填空题和解答题，包括基础题、综合题和拓展题。基础题可以满足考研的基本要求，综合题和拓展题可作为复习提高阶段的练习。

本书以考研大纲为依据，在深入研究命题规律的基础上，从考生的实际出发精心编写而成，涵盖了考研数学的所有考点，题型全面，难度适中，真题感强。本书分为试题分册与解析分册，方便考生独立做题与核对答案。试题分册中，基础题、综合题与拓展题可以使考生分梯度学习，循序渐进地掌握相关考试内容。解析分册中，对每道题目都给出了详细的解析，方法典型；部分题目提供了多种解法，可以开拓思路。在重点题型和易错知识点的解析中，添加了“注”，对关键点、易错点进行点拨，有助于考生理解。

本书已出版多年，深受考生的厚爱和关注。为了适应考研的变化趋势，针对考研中的难点，作者在这次修订中特别增加了一些综合性较强的题目，如：高等数学部分，增加了微分中值定理及与泰勒公式有关的综合题，以及数列极限、微分方程及其应用题等；线性代数部分，增加了相似矩阵与二次型的综合题等。这些增加的题目有助于考生更好地适应考试要求。

考研是选拔性考试，注重考查数学方法、技巧的灵活运用能力，建议考生在复习作者的《2026 考研数学高等数学辅导讲义》《2026 考研数学线性代数辅导讲义》（已出版）的基础上，独立完成本书的学习，并注意总结解题方法，加深对基本概念的理解，提高计算能力，提升综合分析解决数学问题的能力，从而切实提高应试能力。

为了系统地进行考研数学的复习，建议考生分阶段地使用作者的考研数学系列丛书：《2026 考研数学高等数学辅导讲义》《2026 考研数学线性代数辅导讲义》《2026 考研数学精讲精练 880 题》《2026 考研数学高频考点 108 题》《2026 考研数学冲刺预测 6 套卷》《2026 考研数学终极预测 4 套卷》。

由于作者水平有限，本书仍有需要改进和提高的地方，恳请读者和广大同仁提出宝贵的意见和建议！

最后，衷心祝愿广大考生考上自己理想的学校！

李 林

2025 年 3 月

目 录

高等数学

第一章 函数、极限、连续	1
基础题	1
综合题	4
拓展题	9
第二章 一元函数微分学及其应用	10
基础题	10
综合题	17
拓展题	24
第三章 一元函数积分学及其应用	25
基础题	25
综合题	30
拓展题	39
第四章 多元函数微分学及其应用	41
基础题	41
综合题	43
拓展题	46
第五章 二重积分	48
基础题	48
综合题	50
拓展题	53
第六章 微分方程及其应用	55
基础题	55
综合题	56
拓展题	60

线性代数

第七章 行列式 62

 基础题 62

 综合题 64

 拓展题 66

第八章 矩 阵 67

 基础题 67

 综合题 69

 拓展题 71

第九章 向 量 72

 基础题 72

 综合题 74

 拓展题 76

第十章 线性方程组 77

 基础题 77

 综合题 79

 拓展题 82

第十一章 相似矩阵 83

 基础题 83

 综合题 86

 拓展题 90

第十二章 二次型 91

 基础题 91

 综合题 93

 拓展题 97



高等数学

第一章 函数、极限、连续

基础题

一、选择题

(1) 函数 $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 是().

- A. 单调函数 B. 周期函数 C. 偶函数 D. 有界函数

(2) 设函数 $f(x) = \cos(\sin x)$, $g(x) = \sin(\cos x)$, 则当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, ().

- A. $f(x)$ 单调增加, $g(x)$ 单调减少 B. $f(x)$ 单调减少, $g(x)$ 单调增加
C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 都单调增加 D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 都单调减少

(3) 设函数 $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$, 则().

- A. $f(x)$ 为偶函数 B. $f(x)$ 为奇函数
C. $f(x)$ 为无界函数 D. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

(4) 设当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x), g(x)$ 都是无穷大, 则当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 下列结论正确的是().

- A. $f(x) - g(x)$ 是无穷小 B. $f(x) + g(x)$ 是无穷大
C. $\frac{g(x)}{f(x)} \rightarrow 1$ D. $\frac{f(x) + g(x)}{f(x)g(x)}$ 是无穷小

(5) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是().

- A. 无穷大 B. 无穷小
C. 有界但非无穷小 D. 无界但非无穷大

(6) 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - ax - b \right) = 0$, 则().

- A. $a = 1, b = 1$ B. $a = -1, b = 1$
C. $a = 1, b = -1$ D. $a = -1, b = -1$

(7) 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $(x - \sin x) \tan x$ 是比 $\ln(1+x^n)$ 高阶的无穷小, 而 $\ln(1+x^n)$ 是比 x^2 高阶的无穷小, 则 $n =$ ().

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

(8) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - \frac{1+ax^2}{1+bx}$ 与 x^3 是同阶无穷小, 则().

- A. $a = \frac{1}{2}, b = 1$ B. $a = -\frac{1}{2}, b = 1$

C. $a = \frac{1}{2}, b = -1$

D. $a = -\frac{1}{2}, b = -1$

(9) 设 $f(x) = \ln^2 x, g(x) = x, h(x) = e^{\frac{x}{2}} (x > 1)$, 则当 x 充分大时, ().

A. $f(x) < g(x) < h(x)$

B. $g(x) < h(x) < f(x)$

C. $h(x) < g(x) < f(x)$

D. $g(x) < f(x) < h(x)$

(10) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 均不存在, 则下列选项正确的是 ().

A. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ 不存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ 必不存在

B. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ 不存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ 必存在

C. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ 必不存在

D. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ 必存在

(11) 设正值数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n^n = e$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n + y_n - 2) = ()$.

A. e

B. $2e$

C. 2

D. 1

(12) 函数 $f(x) = \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{2}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|}$ 在 $x = 0$ 处为 ().

A. 可去间断点

B. 跳跃间断点

C. 无穷间断点

D. 振荡间断点

二、填空题

(1) 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 + ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 设 $a > 0$, 知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^P (a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}})$ 存在, 则 P 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{e^x + x^3} (\sin x + \cos x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{e^{x^4} - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(7) 设 $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 - \tan x$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是比 x^3 高阶的无穷小, 则 $a + b + c + d = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

(1) 设 $f(x)$ 是定义在 $(-a, a)$ 内的函数. 证明: $f(x)$ 可以表示为一个偶函数与一个奇函数之和.

(2) 设函数 $f(x)$ 满足 $af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x}$, 其中 a, b, c 均为常数, 且 $|a| \neq |b|$, 求 $f(x)$ 的表达式.

式,并证明 $f(x)$ 是奇函数.

(3) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-a, a)$ 内有定义,其中 $a > 0$,且对任意 $x_1, x_2 \in (-a, a)$,有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$. 证明: $F(x) = f(x) + x$ 在 $(-a, a)$ 内单调增加.

(4) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} = a$. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

(5) 求下列极限:

$$(I) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x \sin x}{x^2 + x \sin \frac{1}{x}}; \quad (II) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}} + c^{\frac{1}{x}}}{3} \right)^x \quad (a, b, c \text{ 为正数});$$

$$(III) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}{\ln(e^{2x} - x^2) - 2x}; \quad (IV) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{3}{x}} - e^3}{x};$$

$$(V) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{x^3}; \quad (VI) \lim_{x \rightarrow 0} \cot x \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right);$$

$$(VII) \lim_{x \rightarrow 0} (1-x^2)^{\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}}; \quad (VIII) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}.$$

(6) 求下列极限:

$$(I) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right);$$

$$(II) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{1+2+\cdots+n} - \sqrt{1+2+\cdots+(n-1)} \right];$$

$$(III) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1};$$

$$(IV) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}};$$

$$(V) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \sqrt[n]{3}}{2} \right)^n.$$

(7) 求 $f(x) = (1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$ 在 $(0, 2\pi)$ 内的间断点,并指出其类型.

(8) 讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2} - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$ 的连续性.

(9) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,且 $a < c < d < b$. 证明:在 (a, b) 内必存在一点 ξ ,使得 $mf(c) + nf(d) = (m+n)f(\xi)$,其中 m, n 为任意给定的自然数.

(10) 设 $x_1 = \sqrt{a} (a > 0), x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在,并求其值.

(11) 设 $x_1 = a \geq 0, y_1 = b \geq 0, a \leq b, x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} (n = 1, 2, \cdots)$. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

综合题

一、选择题

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\sin \frac{1}{x}} - 1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^k - \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = a \neq 0$ 成立的充分必要条件是().

- A. $k \neq 1$ B. $k > 1$ C. $k > 0$ D. 与 k 无关

(2) 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\arctan x - \ln \frac{1+x}{1-x}}{x^p} = c \neq 0$, 则().

- A. $p = 3, c = -\frac{4}{3}$ B. $p = -3, c = \frac{4}{3}$
C. $p = \frac{4}{3}, c = 3$ D. $p = -\frac{4}{3}, c = -3$

(3) 设当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\alpha(x) = \tan x - \sin x, \beta(x) = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}, \gamma(x) = \int_0^{1-\cos x} \sin t dt$$

都是无穷小, 将它们关于 x 的阶数从低到高排列, 正确的顺序为().

- A. $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ B. $\alpha(x), \gamma(x), \beta(x)$
C. $\gamma(x), \alpha(x), \beta(x)$ D. $\beta(x), \alpha(x), \gamma(x)$

(4) 设 $y = y(x)$ 是方程 $y'' + 2y' + y = e^{3x}$ 的解, 且满足 $y(0) = y'(0) = 0$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 与 $y(x)$ 为等价无穷小的是().

- A. $\sin x^2$ B. $\sin x$ C. $\ln(1+x^2)$ D. $\ln \sqrt{1+x^2}$

(5) 设 $F(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ f(0), & x = 0, \end{cases}$ 其中 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f'(0) \neq 0, f(0) = 0$, 则().

- A. $x = 0$ 是 $F(x)$ 的连续点 B. $x = 0$ 是 $F(x)$ 的第一类间断点
C. $x = 0$ 是 $F(x)$ 的第二类间断点 D. 以上说法均错误

(6) 设 $f(x) = \begin{cases} (x+1)\arctan \frac{1}{x^2-1}, & x \neq \pm 1, \\ 0, & x = \pm 1, \end{cases}$ 则 $f(x)$ ().

- A. 在 $x = 1, x = -1$ 处都连续 B. 在 $x = 1, x = -1$ 处都间断
C. 在 $x = -1$ 处间断, $x = 1$ 处连续 D. 在 $x = -1$ 处连续, $x = 1$ 处间断

(7) $f(x) = \frac{x \ln |x|}{|x-1|} e^{\frac{1}{(x-1)(x-2)}}$ 的无穷间断点的个数为().

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

(8) 下列结论中错误的是().

- A. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 1$, 则存在 $M > 1$, 当 n 充分大时, 有 $a_n > M$

- B. 设 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 则当 n 充分大时, 有 $a_n < b_n$
- C. 设 $M \leq a_n \leq N (n = 1, 2, \dots)$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $M \leq a \leq N$
- D. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$, 则当 n 充分大时, $a_n > a - \frac{1}{n}$

(9) 设 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 为两个数列, 则下列说法正确的是().

- A. 若 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 无界, 则 $\{x_n + y_n\}$ 无界
- B. 若 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 无界, 则 $\{x_n y_n\}$ 无界
- C. 若 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 中, 一个有界, 一个无界, 则 $\{x_n y_n\}$ 无界
- D. 若 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 均为无穷大, 则 $\{x_n y_n\}$ 一定为无穷大

(10) 设数列 $\{x_n\}$ 单调减少, $\{y_n\}$ 单调增加, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$, 则下列选项正确的是().

- A. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$
- B. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 均存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$
- C. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 不存在
- D. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 均不存在

(11) 设正项数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 满足 $e^{x_n} = x_n + e^{y_n} (n = 1, 2, \dots)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 正确的是().

- A. y_n 是比 x_n 高阶的无穷小
- B. x_n 是比 y_n 高阶的无穷小
- C. y_n 与 x_n 是等价无穷小
- D. x_n 与 y_n 是同阶但不等阶无穷小

(12) 设 $f(n)$ 表示方程 $x(1 + \ln x) = n$ 的正实根, 其中 $x \geq 1, n$ 为正整数, 则下列选项正确的是().

- A. $\{f(n)\}$ 收敛
- B. $\left\{\frac{f(n)}{n}\right\}$ 发散
- C. $\left\{\frac{f(n) \ln n}{n}\right\}$ 收敛
- D. $\left\{\frac{f(n) \ln n}{n}\right\}$ 发散

(13) 设 $\{x_n\}$ 为数列, 则下列结论正确的是().

- ① 若 $\{\arctan x_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛;
- ② 若 $\{\arctan x_n\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛;
- ③ 若 $x_n \in [-1, 1]$, 且 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{\arcsin x_n\}$ 收敛;
- ④ 若 $x_n \in [-1, 1]$, 且 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{\arcsin x_n\}$ 收敛.

- A. ①② B. ③④ C. ①③ D. ②④

(14) 下列极限存在的是().

- A. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{1-x}}}$
- B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)^x$
- C. $\lim_{n \rightarrow \infty} [n + (-1)^n (n+1)]$
- D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$

(15) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内为连续的奇函数, a 为常数, 则必为偶函数的是().

- A. $\int_0^x du \int_a^u t f(t) dt$
- B. $\int_a^x du \int_0^u f(t) dt$
- C. $\int_0^x du \int_a^u f(t) dt$
- D. $\int_a^x du \int_0^u t f(t) dt$

(16) 设 $f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x + 2^{tx}}{1 + 2^{tx}}$, 则 $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ 在 $x = 0$ 处().

- A. 可导 B. 不连续 C. 不可导但连续 D. 无法判定

(17) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{(x^3 - 1)\sin x}{|x|(1 + x^2)}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} x \in (-\infty, +\infty)$, 则().

- A. $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界
B. 存在 $X > 0$, 当 $|x| < X$ 时, $f(x)$ 有界, 当 $|x| > X$ 时, $f(x)$ 无界
C. 存在 $X > 0$, 当 $|x| < X$ 时, $f(x)$ 无界, 当 $|x| > X$ 时, $f(x)$ 有界
D. 对任意 $X > 0$, 当 $|x| \leq X$ 时, $f(x)$ 有界, 但在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界

二、填空题

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = 3x - 4\sin x + \sin x \cos x$ 是关于 x 的 _____ 阶无穷小.

(2) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - e^{x^2})\sin x^2}{\frac{x^2}{2} + 1 - \sqrt{1+x^2}} =$ _____.

(3) 设 $f(x)$ 是连续函数, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = -1$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^{\sin^2 x} f(t) dt$ 是关于 x 的 n 阶无穷小, 则 $n =$ _____.

(4) 设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - b}{x - a} = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{f(x)} - e^b}{x - a} =$ _____.

(5) 设 $a_n = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{n}{n+1}} x^{n-1} \sqrt{1+x^n} dx$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n =$ _____.

(6) 设 $k \neq \frac{1}{2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{n - 2nk + 1}{n(1 - 2k)} \right]^n =$ _____.

(7) 设 $0 < a_1 < a_2$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^{-n} + a_2^{-n})^{\frac{1}{n}} =$ _____.

(8) 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1-x^6} - ax^2 - b) = 0$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

(9) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ a[x] + \frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})} \right\} = b$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则 $a =$ _____,

$b =$ _____.

(10) 已知连续函数 $y = f(x)$ 关于点 $(a, 0)$ ($a \neq 0$) 对称, 则对常数 c , $I = \int_{-c}^c f(a-x) dx =$ _____.

(11) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y^2 + xy + x^2 - x = 0$ 确定, 且 $y(1) = -1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{1+y(x)} =$ _____.

(12) 设 $f''(1)$ 存在, $f'(1) \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{f'(1)(x-1)} - \frac{1}{f(x) - f(1)} \right] =$ _____.

三、解答题

(1) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, 且 $|q| < 1$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(2) 设 $a_k = 2^{\frac{1}{k}}$, $u_n = a_1 a_2 \cdots a_n$ ($n = 1, 2, \cdots$), 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

(3) 设数列 $x_n = (1+a)^n + (1-a)^n$, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \begin{cases} 1+|a|, & a \neq 0, \\ 1, & a = 0. \end{cases}$$

(4) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ ($a_i > 0; i = 1, 2, \cdots, k$).

(5) 求下列极限:

(I) 设 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = \frac{1}{2}(3x_{n+1} - x_n)$ ($n = 1, 2, \cdots$), 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(II) 设 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(6) 设 $f_n(x) = 1 - (1 - \cos x)^n$ ($n = 1, 2, \cdots$).

(I) 证明: 方程 $f_n(x) = \frac{1}{2}$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内有且仅有一个实根 x_n ;

(II) 设 $x_n \in (0, \frac{\pi}{2})$, 满足 $f_n(x_n) = \frac{1}{2}$, 证明: $\arccos \frac{1}{n} < x_n < \frac{\pi}{2}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{2}$.

(7) (I) 证明: 方程 $x = 1 + 2 \ln x$ 在 $(e, +\infty)$ 内有唯一实根 ξ ;

(II) 取 $x_0 \in (e, \xi)$, 令 $x_n = 1 + 2 \ln x_{n-1}$ ($n = 1, 2, \cdots$), 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$.

(8) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(0) = f(1)$, 证明:

(I) 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{2})$;

(II) 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{n})$ ($n \geq 2$ 为自然数).

(9) 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x [(3 + 2 \tan t)^t - 3^t] dt}{e^{3x^3} - 1}$.

(10) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^3} \int_1^x [(1+t^2) \sin \frac{1}{t} - \cos t] dt}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$.

(11) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left[e^{(1+\frac{1}{x})^x} - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ex} \right]$.

(12) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})}{(\sqrt[n]{e} - 1) \ln n}$.

(13) 若极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \left[\frac{at^{1+t}}{(1+t)^t} - t \right] dt = b$ 存在, $a > 0$, 求 a, b 的值.

(14) 设 $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n$.

(I) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求值;

(II) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

(15) 设 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, 证明: 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$ 存在.

(16) 设 $x_1 > 0$, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - 1) - \ln x_n$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求值.

(17) 求下列极限:

(I) 当 $|x| < 1$ 时, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$;

(II) 当 $|x| \neq 0$ 时, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n}$;

(III) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sqrt{\sin x})(1 - \sqrt[3]{\sin x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{\sin x})}{(1 - \sin x)^{n-1}}$.

(18) 求下列极限:

(I) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + \frac{f(x)}{\sin x} \right]}{a^x - 1} = \frac{1}{2} (a > 0, a \neq 1)$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$;

(II) 设 $f(x)$ 是三次多项式, 且有 $\lim_{x \rightarrow 2a} \frac{f(x)}{x - 2a} = \lim_{x \rightarrow 4a} \frac{f(x)}{x - 4a} = 1 (a \neq 0)$, 求 $\lim_{x \rightarrow 3a} \frac{f(x)}{x - 3a}$.

(19) 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$, 证明: $f(x)$ 在 (a, b) 内有最大值.

(20) 设 $x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = x_n^2 + x_n (n = 1, 2, \cdots)$, 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} + \cdots + \frac{1}{x_n + 1} \right).$$

(21) 设 $a_n = \int_0^1 \sin x^n dx, b_n = \int_0^1 \sin^n x dx (n = 1, 2, \cdots)$, 证明:

(I) $0 \leq b_n \leq a_n$;

(II) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

(22) 设 $x_1 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \tan x_{n-1}) (n = 1, 2, \cdots)$.

(I) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求其值;

(II) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

(23) (I) 证明: 方程 $\sin x = (\ln x)^{\frac{1}{n}} (n = 1, 2, \cdots)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, e\right)$ 内有唯一实根 x_n ;

(II) 在第(I)小题的基础上, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi \sin x_n}{2x_n} \right)^{\frac{1}{x_n - \frac{\pi}{2}}}$.

拓展题

解答题

(1) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $|f'(x)| < 1$, 当 $x \in [a, b]$ 时, 有 $a < f(x) < b$, $F(x) = \frac{1}{2}[x + f(x)]$, 证明:

(I) 存在 $x^* \in (a, b)$, 使得 $F(x^*) = x^*$;

(II) 对 $x_0 \in [a, b]$, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = F(x_n) (n = 1, 2, \dots)$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$.

(2) (I) 设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上单调减少且非负连续函数. 证明:

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k) \quad (k = 1, 2, \dots);$$

(II) 证明: $\ln(1+n) \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \leq 1 + \ln n$, 并求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln n}$.

(3) 设 $f_n(x) = x^n - \cos x \quad (n = 1, 2, \dots)$.

(I) 证明方程 $f_n(x) = 0$ 在 $x \in (0, 1)$ 内有唯一实根 x_n ;

(II) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x_n)^{\frac{1}{n} \ln \cos x_n}$.

(4) (I) 证明: $\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2n^2}$ (n 为正整数);

(II) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$.

(5) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶导数, 且 $f'(x) > 0, f''(x) > 0, f(0) = 0$. 取 $x_1 \in (0, 1)$, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $(x_{n+1} - x_n)f'(x_n) + f(x_n) = 0 (n = 1, 2, \dots)$. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求其值.

第二章 一元函数微分学及其应用

基础题

一、选择题

(1) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}}, & x > 0, \\ x^2 \cdot \varphi(x), & x \leq 0, \end{cases}$ 其中 $\varphi(x)$ 是有界函数, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处().

- A. 可导
B. 连续, 但不可导
C. 极限存在, 但不连续
D. 极限不存在

(2) 设 $f'(x)$ 存在, a, b 为任意实数, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + a\Delta x) - f(x - b\Delta x)}{\Delta x} = ()$.

- A. $(a + b)f'(x)$
B. $(a - b)f'(x)$
C. $af'(x)$
D. $bf'(x)$

(3) 设 $f(x)$ 为连续函数, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x - 1)}{x - 1} = 1$, 则 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f[(1 + \sin t)^2] - f(1 + \sin t)}{t} = ()$.

- A. 0
B. $\frac{1}{2}$
C. 1
D. 2

(4) 设 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x} + 1}$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处().

- A. 连续且可导
B. 右连续但右导数不存在
C. 右连续且右导数存在
D. 右极限存在且右导数存在

(5) 设 $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq b, \\ \ln x, & x > b \end{cases}$ 在 $(0, +\infty)$ 内可导, 在 $x = 0$ 处右连续, 则().

- A. $a = \frac{2}{e}, b = e^2$
B. $a = \frac{2}{e}, b = e$
C. $a = \frac{1}{e}, b = e^2$
D. $a = \frac{1}{e}, b = e$

(6) $f(x) = (x^2 + 3x + 2)|x^3 - x|$ 不可导点的个数为().

- A. 1
B. 2
C. 3
D. 4

(7) 下列函数中, 在 $x = 0$ 处不可导的是().

- A. $f(x) = |x| \sin |x|$
B. $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$
C. $f(x) = \cos |x|$
D. $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$

(8) 设 $f(x)$ 可导且 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 处的微分 dy 是 Δx 的()无穷小.

A. 等价 B. 同阶 C. 低阶 D. 高阶

(9) 设 $f(-x) = -f(x)$, 且在 $(0, +\infty)$ 内, $f'(x) > 0, f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内必有().

A. $f'(x) < 0, f''(x) < 0$ B. $f'(x) < 0, f''(x) > 0$
C. $f'(x) > 0, f''(x) < 0$ D. $f'(x) > 0, f''(x) > 0$

(10) 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上二阶可导, 且 $f''(x) > 0, \int_{-1}^1 f(x) dx = 2$, 则 $f(0)$ 的取值范围为().

A. $(-\infty, 0]$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-\infty, 1)$ D. $(1, +\infty)$

(11) 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内连续, $f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 2$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处().

A. 不可导 B. 可导且 $f'(0) \neq 0$
C. 有极小值 D. 有极大值

(12) $y = (x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数为().

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

(13) 设 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0, f'''(x_0) > 0$, 则下列选项正确的是().

A. x_0 是 $f(x)$ 的极值点 B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
C. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值 D. $(x_0, f(x_0))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点

(14) 设 $f(x)$ 有一阶连续导数, $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$, 则 $f(0) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的().

A. 必要非充分条件 B. 充分非必要条件
C. 充分必要条件 D. 既非充分又非必要条件

(15) 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 处连续, 则 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导的一个充分条件是().

A. $\lim_{x \rightarrow a} |x| \left[f\left(a + \frac{1}{|x|}\right) - f(a) \right]$ 存在 B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x^3) - f(a)}{x^2}$ 存在
C. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a-\Delta x)}{2\Delta x}$ 存在 D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x^3) - f(a)}{\tan x^3}$ 存在

(16) 设 $f(x)$ 有任意阶导数, 且 $f'(x) = f^2(x)$, 则 $f^{(n)}(x) = () (n > 3)$.

A. $n! f^{n+1}(x)$ B. $n f^{n+1}(x)$
C. $f^{2n}(x)$ D. $n! f^{2n}(x)$

(17) 设 $y = \ln(1-2x)$, 则 $y^{(10)} = ()$.

A. $\frac{-9!}{(1-2x)^{10}}$ B. $\frac{9!}{(1-2x)^{10}}$
C. $\frac{-9! \cdot 2^{10}}{(1-2x)^{10}}$ D. $\frac{10! \cdot 2^9}{(1-2x)^{10}}$

(18) 设 $\delta > 0, f(x)$ 在 $(-\delta, \delta)$ 内有定义, 当 $x \in (-\delta, \delta)$ 时, 有 $|f(x)| \leq x^2$, 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的().

A. 间断点

B. 连续但不可导点

C. 可导点且 $f'(0) = 0$ D. 可导点且 $f'(0) \neq 0$ (19) 设 $f(x)$ 连续, 且 $f'(x_0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得().A. 对任意 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, 有 $f(x) > f(x_0)$ B. 对任意 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, 有 $f(x) > f(x_0)$ C. $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内单调减少D. $f(x)$ 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内单调增加(20) 已知 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ 在 $x = -2$ 处取得极值, 且与直线 $y = -3x + 3$ 相切于点 $(1, 0)$, 则().A. $a = 1, b = -8, c = 6$ B. $a = -1, b = -8, c = -6$ C. $a = 1, b = 8, c = -6$ D. $a = -1, b = 8, c = -6$ (21) 设 $f'(x) = \frac{(x^2 - 1)(x + 3)}{\sqrt{1 + x^2}}$, 则 $f(x)$ ().A. 在 $x = 1, x = -3$ 处取得极大值, 在 $x = -1$ 处取得极小值B. 在 $x = -1$ 处取得极大值, 在 $x = 1, x = -3$ 处取得极小值C. 在 $x = -1, x = 1, x = -3$ 处都取得极小值D. 在 $x = -1, x = -3, x = 1$ 处都取得极大值(22) 设可导函数 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = \arctan t, \\ y = \ln(1 - t^2) - \sin y \end{cases}$ 确定, 则().A. $x = 0$ 是 $y = y(x)$ 的极小值点B. $x = 0$ 是 $y = y(x)$ 的极大值点C. 在 $x = 0$ 的邻域 $(-\delta, 0)$ ($\delta > 0$) 内, $y = y(x)$ 单调递减D. 在 $x = 0$ 的邻域 $(0, \delta)$ ($\delta > 0$) 内, $y = y(x)$ 单调递增(23) 曲线 $y = \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$ 渐近线的条数为().

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

(24) 设 $f(x)$ 为连续函数, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x [1 + x + f(x)]$ 存在, 则曲线 $y = f(x)$ 有斜渐近线().A. $y = x$ B. $y = -x$ C. $y = x + 1$ D. $y = -x - 1$ (25) 曲线 $y = \sqrt{x^2 - a^2}$ 的渐近线的条数为().

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

二、填空题

(1) $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x}, & x > 0, \\ ax + b, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处可导, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=2, f(0)=0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-\cos x)}{\ln(1+x^2)} =$ _____.

(3) 设 $y=f(x)$ 由方程 $x = \int_1^{y-x} \sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) dt$ 确定, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right] =$ _____.

(4) 设函数 $f(x)$ 有连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x^2} + \frac{f(x)}{x} \right] = 2$, 则 $f(x)$ 的一阶麦克劳林展开式为 _____.

(5) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, $f''(x)$ 的图形如图 2-1 所示, 则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为 _____.

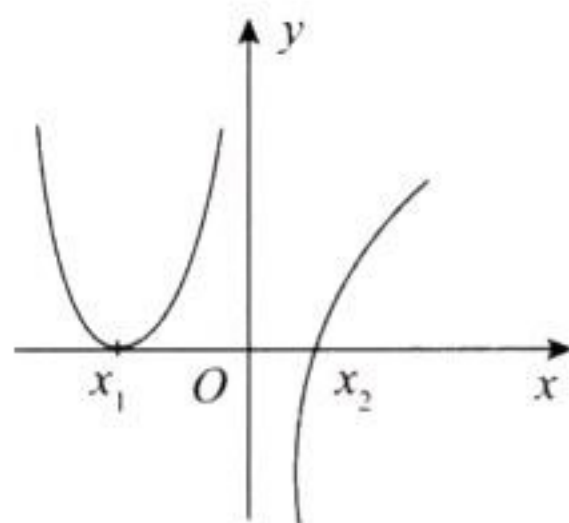


图 2-1

(6) 设 $f'(0)$ 存在, $f(0)=0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{1 - \cos f(x)}{\sin x} \right]^{\frac{1}{x}} = e$, 则 $f'(0) =$ _____.

(7) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \sin x \cos x$ 与 ax^b 为等价无穷小, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

(8) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x + \ln(1-x) - 1$ 与 x^n 是同阶无穷小, 则 $n =$ _____.

(9) 曲线 $y = e^{-x^2}$ 的上凸区间是 _____.

(10) 设 $f(x) = n^2 e^{\frac{x}{n}} - (1+n)x$ 在 $x = x_n$ 处有水平切线, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{x_n} =$ _____.

(11) 设曲线 $y = f(x) = \frac{1}{1+x^n}$, 在其上点 $(1, \frac{1}{2})$ 处的切线与 x 轴交于点 $(x_n, 0)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) =$ _____.

(12) 设连续函数 $y=f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处满足 $\Delta y = \Delta x + o(\Delta x)$, 则极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_1^{e^x} f(t) dt}{x^2 + \ln(1+x^3)} =$ _____.

(13) 设 $f(x) = x(2x-1)(3x-2)\cdots(100x-99)$, 则 $f'(0) =$ _____.

(14) 设 $\frac{d}{dx}[f(x^3)] = \frac{1}{x}$, 则 $f'(x) =$ _____.

(15) 设 $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$, 则 $f^{(5)}(0) =$ _____.

(16) 设 $f(x)$ 可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 _____.

(17) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x-1)}{x-1} = 1$, 则 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f[(1+\sin t)^2] - f(1+\sin t)}{t} =$ _____.

(18) 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{ax^2 - x + 3} - 2x) = b$, 其中 a, b 为常数, $a > 0$, 则曲线 $y = \sqrt{ax^2 - x + 3}$ 在 $(0, +\infty)$ 内的斜渐近线方程为 _____.

(19) 设 $f(x) = \cos |x| + x^2 |x|$ 在 $x=0$ 处存在的最高阶导数的阶数为 _____.

(20) 曲线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t (a > 0)$ 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处的曲率 = _____.

(21) 曲线 $y = 2(x-1)^2$ 的最小曲率半径为_____.

(22) 设函数 $y = y(x)$ 二阶可导, $\frac{dy}{dx} = (3-y)y^b (b > 0)$, 若曲线 $y = y(x)$ 有一个拐点为 $(a, 2)$, 则 $b =$ _____.

(23) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 且对任意的 x, y , 有 $f(x+y) - f(x) = [f(x) - 1]y + \alpha(y)$, 其中 $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\alpha(y)}{y} = 0$, 且 $f(0) = 2$, 则 $f(x) =$ _____.

(24) 设曲线 $y = x^2 (0 \leq x < +\infty)$ 在其上任一点 (x, y) 处的曲率为 κ , 曲线在区间 $[0, x]$ 上的一段弧长为 s , 则 $\left. \frac{d\kappa}{ds} \right|_{x=\frac{1}{2}} =$ _____.

(25) 设 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \frac{t}{1+t^3}, \\ y = \frac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$ 确定, 则曲线 $y = y(x)$ 的斜渐近线方程为_____.

(26) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\arctan \frac{x}{y} = \ln \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \frac{\pi}{4} (x > 0, y > 0)$ 确定, 则 $y(x)$ 的极大值为_____.

三、解答题

(1) 计算下列函数的导数:

(I) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x}};$

(II) $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x} (a > 0);$

(III) $y = 2^{|\sin x|};$

(IV) $y = \ln |\tan x + \sec x|.$

(2) 求下列函数的导数:

(I) $y = (1+x^2)^{\sin x};$

(II) $y = \ln \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x^2+1}}.$

(3) 求下列函数的微分:

(I) $y = \varphi\left(\arctan \frac{1}{x}\right)$, 其中 φ 可导, 求 dy ;

(II) 设 $y = y(x)$ 由 $e^{x+y} - y \sin x = 0$ 确定, 求 dy ;

(III) 设 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = 2t, \\ y = 5t^2 + 1 \end{cases}$ 确定, 求 dy .

(4) 设 $y = y(x)$ 由方程 $\sqrt{x^2+y^2} = e^{\arctan \frac{y}{x}}$ 确定, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

(5) 设 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

(6) 求心形线 $r = 1 - \cos \theta$ 在对应于 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

(7) 设 $f(x) = \begin{cases} x^k \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 问:

(I) 当 k 为何值时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导?

(II) 当 k 为何值时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 但导函数不连续?

(III) 当 k 为何值时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处导函数连续?

(8) 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内满足 $f(xy) = f(x) + f(y)$, 且 $f'(1) = 1$, 证明: $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可导, 并求 $f(x)$.

(9) 设 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 求 $f^{(n)}(0)$.

(10) 设气体以 $100 \text{ cm}^3/\text{s}$ 的速率注入球状气球, 求当半径为 10 cm 时, 气球半径增加的速率. (设气体压力不变)

(11) 一动点 P 在曲线 $9y = 4x^2$ 上运动, 已知点 P 横坐标变化速率为 30 cm/s , 当点 P 经过 $(3, 4)$ 时, 从原点到点 P 的距离 S 变化率为多少? (设坐标轴的单位长度为 1 cm)

(12) 设 $f(x)$ 二阶可导, $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 2$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2}$.

(13) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - (1+x)^{2x} + 1}{x^2} = 1$. 证明 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 并求 $f'(0)$.

(14) 证明: $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1-x^2, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$ 满足拉格朗日中值定理, 并求满足定理的 ξ 的值.

(15) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $0 < a < b$, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明:

(I) 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $2f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$;

(II) 至少存在一点 $\eta \in (a, b)$, 使得 $2\eta f(\eta) - f'(\eta) = 0$.

(16) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $0 < a < b$, 且 $f(a) = 0$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $af(\xi) + (\xi - b)f'(\xi) = 0$.

(17) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 在 $(0, +\infty)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (0, +\infty)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

(18) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 在 $(0, +\infty)$ 内可导, 且 $0 \leq f(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (0, +\infty)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

(19) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f''(x) \leq 0, f(0) = 0$, 证明: 对任意 $x_0 \in [0, 1]$, 有 $f(x_0) \leq 2f\left(\frac{x_0}{2}\right)$.

(20) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, $f(0) = 0, f(1) = 1$, 且 $f(x)$ 不恒等于 x , 证明: 存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) > 1$.

(21) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 证明:

(I) 存在一点 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $f(x_0) = 2(1 - x_0)$;

(II) 存在 ξ 与 $\eta \in (0, 1)$, 且 $\xi \neq \eta$, 使得 $f'(\xi)[1 + f'(\eta)] = 2$.

(22) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, $|f''(x)| \leq 1, f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内取得最小值, 证明:

$$|f'(0)| + |f'(1)| \leq 1.$$

(23) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $f(a) = f(b)$, 且 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不恒为常数. 证明: 存在相异的 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) \cdot f'(\eta) < 0$.

(24) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $f(0) = f(1) = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$, 证明:

(I) 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f''(\xi) = 0$;

(II) 对 $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, 至少存在一点 $\eta \in (0, 1)$, 使得 $f''(\eta) - \lambda f'(\eta) = 0$.

(25) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $0 < a < b$, 证明: 存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使得 $2\eta f'(\xi) = (b + a)f'(\eta)$.

(26) 设 a, b 为正数, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\frac{ae^b - be^a}{a - b} = e^\xi(1 - \xi)$.

(27) 证明下列不等式:

(I) 当 $0 < x < \pi$ 时, 有 $\sin \frac{x}{2} > \frac{x}{\pi}$;

(II) 当 $e < a < b$ 时, 有 $a^b > b^a$;

(III) 当 $x > 0$ 时, 有 $(x^2 - 1)\ln x \geq (x - 1)^2$;

(IV) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 且 $f''(x) > 0$, 有 $f(x) \geq x$.

(28) 设 $x > 0$, 证明: $\left(1 + \frac{1}{2x}\right) \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > e$.

(29) 求函数 $y = (x - 1)e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x}$ 的单调区间与极值, 并求其渐近线.

(30) 设 $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0, \\ x + 2, & x \leq 0, \end{cases}$ 求 $f(x)$ 的单调区间与极值.

(31) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t \ln t, \\ y = \frac{1}{t} \ln t \end{cases} (t \geq 1)$ 确定, 求 $y = y(x)$ 的单调区间、凹凸区间、极值和拐点.

(32) 设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \frac{1}{t}, \\ y = \frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{1}{t} \end{cases} (0 < t \leq 1)$ 确定.

证明: $\frac{1}{\ln 2} - 1 \leq f(x) < \frac{1}{2}$.

(33) 对数曲线 $y = \ln x$ 上哪一点的曲率半径最小? 求出该点的曲率半径.

(34) 证明: 方程 $2^x - x^2 - 1 = 0$ 有且仅有三个不同实根.

(35) 证明: 方程 $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^x \sqrt{1 - \cos 2t} dt$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且仅有两个不同实根.

(36) 讨论曲线 $y = 4\ln x + k$ 与 $y = 4x + \ln^4 x$ 交点的个数.

综合题

一、选择题

(1) 设 $f(x)$ 在 $(1-\delta, 1+\delta)$ ($\delta > 0$) 内存在导数, $f'(x)$ 严格单调减少, 且 $f(1) = f'(1) = 1$, 则().

- A. 在 $(1-\delta, 1)$ 和 $(1, 1+\delta)$ 内, 均有 $f(x) < x$
- B. 在 $(1-\delta, 1)$ 和 $(1, 1+\delta)$ 内, 均有 $f(x) > x$
- C. 在 $(1-\delta, 1)$ 内, $f(x) < x$; 在 $(1, 1+\delta)$ 内, $f(x) > x$
- D. 在 $(1-\delta, 1)$ 内, $f(x) > x$; 在 $(1, 1+\delta)$ 内, $f(x) < x$

(2) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上二阶可导, $f(0) = 0, f''(x) < 0$, 当 $0 < a < x < b$ 时, 有().

- A. $af(x) > xf(a)$
- B. $bf(x) > xf(b)$
- C. $xf(x) > bf(b)$
- D. $xf(x) > af(a)$

(3) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, $f(x)$ 在 $x = a$ 处取得最小值, 在 $x = b$ 处取得最大值, 则().

- A. $f'_+(a) < 0$ 且 $f'_-(b) < 0$
- B. $f'_+(a) > 0$ 且 $f'_-(b) < 0$
- C. $f'_+(a) \geq 0$ 且 $f'_-(b) \geq 0$
- D. $f'_+(a) < 0$ 且 $f'_-(b) > 0$

(4) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶导数, 且 $f(0) = f(1), f''(x) \neq 0$, 则下列选项正确的是().

- A. 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 0$
- B. 在 $(0, 1)$ 内, $f'(x) \neq 0$
- C. 存在唯一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 0$
- D. 至少存在不同两点 $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$

(5) 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内有定义, 则 $F(x) = f(x) |\sin x|$ 在 $x = 0$ 处可导的充分必要条件是().

- A. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在
- B. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$
- C. $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导
- D. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 均存在, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

(6) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是连续的奇函数, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则正确的是().

- A. $F(x)$ 是不可导的奇函数
- B. $F(x)$ 是可导的偶函数

C. $F(x)$ 是不可导的偶函数D. $F(x)$ 是可导的奇函数(7) 设 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1$, 则().A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x}$ 存在B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x}$ 不存在C. $f'(0) = 0, f''(0) = 2$ D. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值(8) 设 $y = f(x)$ 由 $\begin{cases} x = t |t|, \\ y = |t| \int_0^t e^{u^2} du \end{cases}$ 确定, 则下列选项中正确的是().A. $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续B. $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续C. $f'(0)$ 不存在D. $f'(0)$ 存在(9) 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \arctan(nx)}{\sqrt{n^2 + nx}}$, 则 $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ 在 $x \in [-1, 1]$ 上是().

A. 连续但不可导的奇函数

B. 连续但不可导的偶函数

C. 可导的偶函数

D. 可导的奇函数

(10) 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有四阶连续导数, 且 $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$, 且 $f^{(4)}(x_0) < 0$, 则().A. $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值B. $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值C. $(x_0, f(x_0))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点D. $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调减少(11) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, $f(x)$ 在 $x = a$ 处取得最小值, 在 $x = b$ 处取得最大值, $F(x) = \int_a^x f(t) dt, x \in [a, b]$, 则().A. $F_+'(a) > 0$ 且 $F_-'(b) < 0$ B. $F_+'(a) \geq 0$ 且 $F_-'(b) \geq 0$ C. $F_+'(a) < 0$ 且 $F_-'(b) < 0$ D. $F_+'(a) < 0$ 且 $F_-'(b) > 0$ (12) 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = 1$, 则().A. 当 n 为奇数时, x_0 是 $f(x)$ 的极大值点B. 当 n 为奇数时, x_0 是 $f(x)$ 的极小值点C. 当 n 为偶数时, x_0 是 $f(x)$ 的极小值点D. 当 n 为偶数时, x_0 是 $f(x)$ 的极大值点(13) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 则下列命题正确的是().A. 若 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, 则必有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$ B. 若 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$, 则必有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ C. 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 则必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ D. 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, 则必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (14) 设 $k > 0$, 方程 $\ln x - \frac{x}{e} + k = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内不同实根的个数为().

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

(15) 设当 $x \neq 0$ 时, 方程 $kx + \frac{1}{x^2} = 1$ 有且只有一个实根, 则().

A. $|k| > \frac{2}{9}\sqrt{3}$

B. $|k| < \frac{2}{9}\sqrt{3}$

C. $k = \frac{2}{9}\sqrt{3}$

D. $k = -\frac{2}{9}\sqrt{3}$

(16) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上二阶可导, $f(0) = 0, f'(0) < 0, f''(x) \geq M > 0$, 则方程 $f(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内不同实根的个数为().

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

(17) 设可导函数 $f(x), x \in [0, 1]$ 满足 $f'(x) \geq M > 0$, 且 $f(\frac{1}{2}) \geq 0$, 则在区间()上, 有 $f(x) \geq \frac{1}{4}M$.

A. $[0, \frac{1}{4}]$

B. $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$

C. $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$

D. $[\frac{3}{4}, 1]$

(18) 设函数 $f_1(x), f_2(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f_1''(x) > 0, f_2''(x) > 0$, 若曲线 $y = f_1(x)$ 与 $y = f_2(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处有公切线 $y = g(x)$, 且在该点处曲线 $y = f_1(x)$ 的曲率半径小于 $y = f_2(x)$ 的曲率半径, 则在点 x_0 的某邻域内有().

A. $g(x) \geq f_2(x) \geq f_1(x)$

B. $g(x) \geq f_1(x) \geq f_2(x)$

C. $f_1(x) \geq f_2(x) \geq g(x)$

D. $f_1(x) \geq g(x) \geq f_2(x)$

(19) 设 $f'(x)$ 在 $[0, 4]$ 上连续, 曲线 $y = f'(x)$ 与 $x = 0, y = 0, x = 4$ 围成如图 2-2 所示的三个区域, 其面积 S_1, S_2, S_3 满足 $S_2 > S_1 > S_3$, 则下列选项中正确的是().

A. $f(1) > f(3) > f(4)$

B. $f(4) > f(3) > f(1)$

C. $f(3) > f(4) > f(1)$

D. $f(4) > f(1) > f(3)$

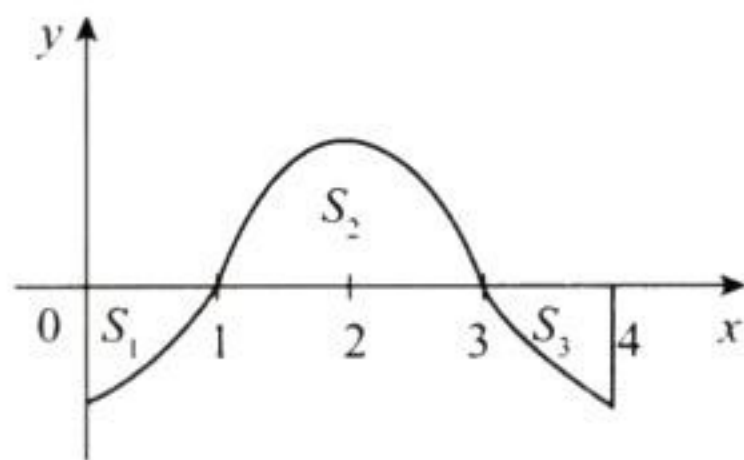


图 2-2

(20) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $f''(x) > 0, f(0) = f(1)$. 当 $x \in (0, 1)$ 时, 下列结论正确的是().

① $(1-x)[f(x) - f(0)] < x[f(1) - f(x)]$;

② $(1-x)[f(x) - f(0)] > x[f(1) - f(x)]$;

③ $x[f(x) - f(0)] < (1-x)[f(1) - f(x)]$;

④ $x[f(x) - f(0)] > (1-x)[f(1) - f(x)]$.

A. ①④

B. ②③

C. ②④

D. ①③

(21) 设在 $[0, +\infty)$ 上的可导函数 $y = f(x)$ 满足 $y' - p(x)y > 0$, 且 $f(0) \geq 0$, 其中 $p(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为正值连续函数, 当 $0 < a < b$ 时, 下列选项中正确的是().

A. $f(0) < f(a) < f(b)$

B. $f(b) < f(a) < f(0)$

C. $f(b) < f(0) < f(a)$

D. $f(a) < f(0) < f(b)$

(22) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = 1$, 则().

A. $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处必可导且 $f'(x_0) = 1$

B. $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处必连续但不可导

C. $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处必存在极限但不连续

D. $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的某去心邻域内单调递增

(23) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^\alpha} \sin \frac{1}{(x-1)^\beta}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1 \end{cases}$ ($\alpha < 0, \beta > 0$), 若 $f'(x)$ 在 $x = 1$ 处连续,

则().

A. $\alpha < -1$ 且 $\alpha + \beta < -1$

B. $\alpha < -1$ 且 $\alpha + \beta \leq -1$

C. $\alpha \leq -1$ 且 $\alpha + \beta < -1$

D. $\alpha \leq -1$ 且 $\alpha + \beta \leq -1$

(24) 设 $f(x)$ 有连续的二阶导数, 曲线 $y = f(x)$ 在其上点 $(0, 1)$ 处的曲率圆方程为 $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的二次泰勒多项式为().

A. $1 - x^2$

B. $1 + x^2$

C. $1 - \frac{1}{2}x^2$

D. $1 + 2x^2$

二、填空题

(1) 设函数 $f(x) = \left[\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right) - 1 \right] \left[\tan\left(\frac{\pi}{4}x^2\right) - 2 \right] \cdots \left[\tan\left(\frac{\pi}{4}x^{100}\right) - 100 \right]$, 则 $f'(1) =$ _____.

(2) 设 $f(x) = 3x^2 + kx^{-3}$, 若对任意 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x) \geq 20$, 则 k 至少为 _____.

(3) 函数 $y = e^{-x} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right)$ (n 为正奇数) 的极大值为 _____.

(4) 设 $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & x < 0, \\ 1 + \ln x, & x > 0. \end{cases}$ 若 $f(a) = f(b)$, $a < 0 < b$, 则 $b - a$ 的最小值为 _____.

(5) 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+k}{x-k} \right)' = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - f(x-1)],$$

则 $k =$ _____.

(6) 设 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且其导函数 $f'(x)$ 的图形如图 2-3 所示, 其中 $x = 0$ 和 $x = x_5$ 是 $f'(x)$ 的铅直渐近线, 则 $y = f(x)$ 极值点的个数为 _____, 拐点的个数为 _____.

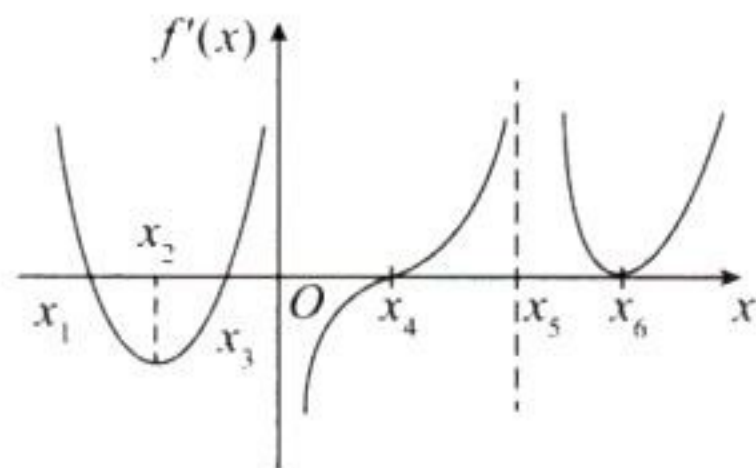


图 2-3

(7) 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 且 $f(x_0) \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f\left(x_0 + \frac{1}{x}\right)}{f(x_0)} \right]^x = \underline{\hspace{2cm}}$.

(8) 设 $y = f(x)$ 在 x_0 处有三阶连续导数, $f'(x_0) = 1, f''(x_0) = 2, f'''(x_0) = 3, y = f(x)$ 有反函数 $x = g(y)$, 且 $y_0 = f(x_0)$, 则 $g'''(y_0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(9) 设 $f(x)$ 为 $(-1, +\infty)$ 内的连续函数, $f(x) = \int_0^x e^{f(t)} dt$, 若 $g(x) = xf(x+1)$, 则 $g^{(n)}(0) (n > 2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 设 $x = f(y)$ 是单调可导函数 $y = g(x)$ 的反函数, 且 $g(1) = 2, g'(1) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\lim_{y \rightarrow 2} \left[(y-2) \cdot \frac{f(y) - f(2)}{(\ln y - \ln 2)^2} \right] = \underline{\hspace{2cm}}$.

(11) 设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = 4t - t^2 \end{cases} (t \geq 0)$ 确定, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{2n+1}{n}\right) - 3 \right] = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 设 $f(x)$ 有连续的二阶导数, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处与 x 轴相切, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处的曲率圆方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

(1) 设 $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b \sin x + c, & x \leq 0, \\ \ln(1+x), & x > 0, \end{cases}$ 问: 当 a, b, c 为何值时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处一阶导数连续,

但二阶导数不存在?

(2) 设 $z = f[\varphi(x) + y^2]$, 其中 x, y 满足 $y + e^y = x, f, \varphi$ 均具有二阶导数, 求 $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}$.

(3) 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数, $f(x)$ 在 $x = 1$ 的某邻域内满足

$$f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x) = 8x + \alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时比 x 高阶的无穷小, 且 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程.

(4) 设 $f(x) = nx(1-x)^n$ (n 为正整数), 求 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值 $M(n)$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} M(n)$.

(5) 设 $f(x) = \begin{cases} |x|^p \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 问:

(I) 当 p 为何值时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续?

(II) 当 p 为何值时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导?

(III) 当 p 为何值时, $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续?

(6) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = 1$, 证明:

(I) 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 0$;

(II) 至少存在一点 $\eta \in (0, 1)$, 使得 $f''(\eta) = f(\eta)$.

(7) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = g(b) = 0$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) \int_{\xi}^b g(t) dt + g'(\xi) \int_a^{\xi} f(t) dt = 0$.

(8) 在 $x = 0$ 的右邻域内, 用多项式 $e + ax + bx^2$ 近似表示函数 $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, 使其误差是比 x^2 高阶的无穷小($x \rightarrow 0^+$), 求 a, b 的值.

(9) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 证明:

(I) 若 $f'_+(a)f'_-(b) < 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$;

(II) 若 $f'_+(a) \neq f'_-(b)$, 则对介于 $f'_-(a)$ 和 $f'_-(b)$ 之间的每个实数 μ , 都存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = \mu$.

(10) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有二阶导数, 且 $f(a) = f(b) = 0, f'_+(a)f'_-(b) > 0$. 证明: 在 (a, b) 内存在两点 ξ 与 η , 使得 $f(\xi) = 0, f''(\eta) = 0$.

(11) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 已知在 $(0, 1)$ 内, $\forall x_1 < x_2$, 有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 证明: 在 $(0, 1)$ 内存在 ξ_1, ξ_2 , 且 $\xi_1 < \xi_2$, 使得 $f'(\xi_1) \geq f'(\xi_2)$.

(12) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有二阶导数, $f(0) = 0, f'_+(0) < 0, f''(x) \geq M > 0 (x > 0)$. 证明: $f(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一实根.

(13) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, $f(0) = f(1) = 0, f''(x) > 0$, 且 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最小值为 $m < 0$.

(I) 证明: 方程 $nf'(x) = m$ (n 为正整数) 在 $x \in (0, 1)$ 内有唯一实根 x_n ;

(II) 在第(I)问的基础上, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$.

(14) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, $f(x) \neq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x+1)}{x}$ 存在, 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $\frac{1-e}{e \int_0^1 f(t) dt} = -\frac{1}{e^{\xi} f(\xi)}$;

(II) 存在 $\eta \in (0, 1)$, 使得 $e \int_0^1 f(t) dt = (e-1)e^{\xi}(\xi-1)f'(\eta)$.

(15) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $|f(x)| \leq a, |f''(x)| \leq b$, 其中 a, b 都是非负常数, c 是 $(0, 1)$ 内任一点.

(I) 写出 $f(x)$ 在 $x = c$ 处带拉格朗日余项的一阶泰勒公式;

(II) 证明: $|f'(c)| \leq 2a + \frac{b}{2}$.

(16) 证明下列结论:

(I) 设 $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2} (x > 0)$, 则 $f(x) = \frac{\pi}{2}$;

(II) 当 $x \geq 1$ 时, $\arctan x - \frac{1}{2} \arccos \frac{2x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

(17) 设函数 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $(x-1)f''(x) = 1 - e^{1-x} + 2(x-1)f'(x)$, 证明: 当 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的极值点时, $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

(18) 求椭圆 $x^2 - xy + y^2 = 3$ 上纵坐标最大和最小的点.

(19) 设曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的一条切线与 x 轴和 y 轴围成一个

平面图形 D , 如图 2-4 所示.

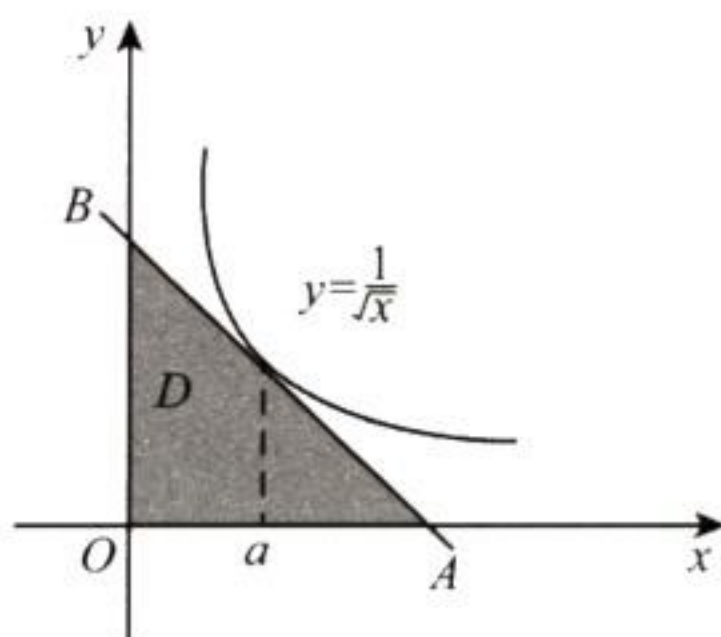


图 2-4

(I) 记切点的横坐标为 a , 求切线方程和图形 D 的面积;

(II) 当切点沿曲线趋于无穷远时, 该面积的变化趋势如何?

(20) 设 $f(x) = \arctan x$, 求 $f^{(n)}(0)$.

(21) 设 $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$, 其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为实数, n 为正整数.

(I) 求 $f'(0)$;

(II) 若 $|f(x)| \leq |\sin x|$, 证明: $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$.

(22) 已知 $f(x)$ 可导, 证明: 曲线 $y = f(x)$ ($f(x) > 0$) 与曲线 $y = f(x) \sin x$ 在交点处相切.

(23) 确定 k 的取值, 使方程 $x^3 + 2x^2 + x = k$ 有 3 个不同实根.

(24) 设 $R = R(x)$ 是抛物线 $y = \sqrt{x}$ 上任一点 $M(x, y)$ ($x \geq 1$) 处的曲率半径, $s = s(x)$ 是该抛物线上介于点 $A(1, 1)$ 与 M 之间的弧长, 计算 $3R \frac{d^2 R}{ds^2} - \left(\frac{dR}{ds}\right)^2$ 的值.

(25) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, $f(0) = f'(0) = 0, f''(0) > 0, u = u(x)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x, f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{u(x)}$.

(26) 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义, 证明: $f(x)$ 在 x_0 处可导的充分必要条件是存在在 $x = x_0$ 处连续的函数 $g(x)$, 使得 $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)g(x)$.

(27) 证明: 方程 $\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} = 0$ (n 为正整数) 有且仅有一个实根.

(28) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^3 + 3t + k, \\ y = t^3 - 3t + k \end{cases}$ 确定, 讨论方程 $y(x) = 0$ 不同实根的个数.

(29) 设 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导, $f'(x)$ 在 (a, b) 内严格单调增加, 对任意的 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 且 $x_1 \neq x_2, 0 < \lambda < 1$. 证明: $f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$.

(30) 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导, 行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \\ 1 & x_3 & f(x_3) \end{vmatrix}$, 证明: 导函数 $f'(x)$ 在

(a, b) 内严格单调递增的充分必要条件是对 (a, b) 内任意的 $x_1 < x_2 < x_3$, 有 $|A| > 0$.

(31) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, $|f'(x)| \leq k < 1, f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0, x_0 \in (a, b)$, 且满足

$f(x_0) = x_0, \forall x_1 \in [a, b], x_{n+1} = f(x_n) (n = 1, 2, \dots).$

(I) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$;

(II) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_0}{(x_n - x_0)^2}$.

(32) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 证明:

(I) 存在 ξ_1 与 ξ_2 满足 $0 < \xi_1 < \xi_2 < 1$, 使得 $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 2$.

(II) 在 $(0, 1)$ 内存在 ξ 与 η , 使得 $\eta f'(\xi) = f(\eta) f'(\eta)$.

拓展题

解答题

(1) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有二阶连续导数, $f(0) = f'(0) = 0$, 且 $x \in [0, +\infty)$, 有 $f''(x) > 0$, 设 $F(x)$ 是曲线 $y = f(x)$ 上任一点 $(x, f(x))$ 处的切线在 x 轴的截距 ($x > 0$), 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} [F(x) + F'(x)]$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶连续导数, 且 $f(a) = f(b) = 0, M = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$. 证明:

(I) $\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \frac{1}{8} M(b-a)^2$;

(II) $\max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \leq \frac{1}{2} M(b-a)$.

(3) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导数, 且 $f'(x) > 0$, 假设 $f[f(x)]$ 存在, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f[f(b)] - f[f(a)] = [f'(\xi)]^2(b-a).$$

(4) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶连续的导数, $|f''(x)| \geq 1$, 记 $F(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & x \\ f(a) & f(b) & f(x) \end{vmatrix}$,

$x \in [a, b]$, 记 $|F(x_0)| = \max_{x \in [a, b]} |F(x)|, x_0 \in (a, b)$. 证明: $|F(x_0)| \geq \frac{(b-a)^3}{8}$.

(5) 设不恒为零的函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶连续导数, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 记 $M = \max_{x \in [0, 1]} \{|f(x)|\}$, $|f''(x)| \geq M$. 证明:

(I) 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $|f'(\xi)| \geq 2M$;

(II) $|f'(0)| + |f'(1)| \geq M$.

第三章 一元函数积分学及其应用

基础题

一、选择题

(1) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x) \neq 0$, 若 $\int x f(x) dx = \arcsin x + C$, 则 $\int \frac{dx}{f(x)} = (\quad)$.

A. $\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

B. $\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

C. $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

D. $-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则 $(\quad)$.

A. 当 $f(x)$ 为奇函数时, $F(x)$ 必为偶函数

B. 当 $f(x)$ 为偶函数时, $F(x)$ 必为奇函数

C. 当 $f(x)$ 为周期函数时, $F(x)$ 必为周期函数

D. 当 $f(x)$ 为单调函数时, $F(x)$ 必为单调函数

(3) 设 $F(x)$ 是 $\sin x^2$ 的一个原函数, 则 $d[F(x^2)] = (\quad)$.

A. $\sin x^4 dx$

B. $\sin x^2 d(x^2)$

C. $2x \sin x^2 dx$

D. $2x \sin x^4 dx$

(4) 设 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \pi, \\ 2, & \pi \leq x \leq 2\pi, \end{cases}$ $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则 $(\quad)$.

A. $x = \pi$ 是 $F(x)$ 的跳跃间断点

B. $x = \pi$ 是 $F(x)$ 的可去间断点

C. $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处连续但不可导

D. $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处可导

(5) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0, \\ \cos x, & x > 0 \end{cases}$ 的一个原函数为 $(\quad)$.

A. $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + x, & x \leq 0 \\ \sin x + 1, & x > 0 \end{cases}$

B. $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + x + 1, & x \leq 0 \\ \sin x + 2, & x > 0 \end{cases}$

C. $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + x + 1, & x \leq 0 \\ \sin x, & x > 0 \end{cases}$

D. $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + x, & x \leq 0 \\ \sin x, & x > 0 \end{cases}$

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dx}{x \sqrt{x-1}} = (\quad)$.

A. 1

B. $\frac{\pi}{2}$

C. π

D. 2π

(7) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, 记 $M = \int_0^1 f(x) dx$, $N = f(1)$, $P =$

$\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]$, 则().

- A. $M < N < P$ B. $N < M < P$ C. $P < M < N$ D. $P < N < M$

(8) 设 $I_1 = \int_0^{\pi} \frac{x \sin^2 x}{1 + e^{\cos^2 x}} dx$, $I_2 = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1 + e^{\cos^2 x}} dx$, $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 + e^{\sin^2 x}} dx$, 则().

- A. $I_1 > I_2 > I_3$ B. $I_3 > I_2 > I_1$ C. $I_2 > I_1 > I_3$ D. $I_3 > I_1 > I_2$

(9) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, $f'(x) > 0$, $F(x) = \int_0^1 |f(x) - f(t)| dt$, 则在 $[0, 1]$ 上有().

- A. $F\left(\frac{1}{2}\right) \geq F(0)$ B. $F(1) \leq F\left(\frac{1}{2}\right)$ C. $F(x) \geq F\left(\frac{1}{2}\right)$ D. $F(x) \leq F\left(\frac{1}{2}\right)$

(10) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x - ax} \int_b^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} dt = c$, 且 $c \neq 0$, 则().

- A. $a = 1, b = 0, c = -2$ B. $a = 1, b = -2, c = -2$
C. $a = 0, b = 1, c = -2$ D. $a = 1, b = 1, c = 1$

(11) 设函数 $y = f(x)$ 由 $\begin{cases} x = \int_0^t 2e^{-u^2} du, \\ y = \int_0^t \sin(t-u) du \end{cases}$ 确定, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 x^2 的().

- A. 高阶无穷小 B. 等价无穷小
C. 同阶但不等价无穷小 D. 低阶无穷小

(12) 设 $f(t) = \int_0^1 \ln \sqrt{x^2 + t^2} dx$, 则 $f(t)$ 在 $t = 0$ 处().

- A. 极限不存在 B. 极限存在但不连续
C. 连续但不可导 D. 可导

(13) 下列反常积分收敛的是().

- A. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x}}$ B. $\int_0^1 \frac{dx}{\ln(1+x)}$ C. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sin x}$ D. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

(14) 已知 $\int_1^{+\infty} \left(\frac{2x^2 + ax + b}{2x^2 + bx} - 1 \right) dx = 1 (b > 0)$, 则().

- A. $a = e - 1, b = e$ B. $a = b = 2(e - 1)$
C. $a = e, b = e - 1$ D. $a = b = 2e - 1$

二、填空题

(1) 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, 当 $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $F(x) > 0$, $F(x)f(x) = \frac{\ln(\tan x)}{\sin x \cos x}$, 则 $f(x) =$ _____.

(2) 设对任意 x , 有 $f(x+4) = f(x)$, 且 $f'(x) = 1 + |x|$, $x \in [-2, 2]$, $f(0) = 1$, 则 $f(9) =$ _____.

(3) 设 $f(x) = \int_0^x \sin(x-t)^2 dt$, 则 $f'(x) =$ _____.

(4) 设 $F(x) = \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt$, $f(x)$ 是连续函数, 则 $F'(x) =$ _____.

(5) 设 $F(x) = \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt$, $f(x)$ 在 $x = 0$ 某邻域内可导, 且 $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^4} =$ _____.

(6) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 0, y = f(x)$ 的反函数为 $g(x)$, 若 $\int_x^{x+f(x)} g(t-x) dt = x^2 \ln(1+x)$, 则 $f(1) =$ _____.

(7) 设 $\alpha(x) = \int_0^{5x} \frac{\sin t}{t} dt, \beta(x) = \int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} =$ _____.

(8) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 t \ln t dt}{x^4} =$ _____.

(9) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \left[\int_0^{u^2} \arctan(1+t) dt \right] du}{x(1-\cos x)} =$ _____.

(10) 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x} =$ _____.

(11) 函数 $y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ 上的平均值为 _____.

(12) 设 $f(x) = \int_0^{a-x} e^{t(2a-t)} dt (a > 0), x \in [0, a]$, 则曲线 $y = f(x)$ 与两坐标轴所围成图形的面积为 _____.

(13) 曲线 $y = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体, 将它在 $x = 0$ 与 $x = \xi (\xi > 0)$ 之间部分的体积记为 $V(\xi)$, 且 $V(a) = \frac{1}{2} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} V(\xi)$, 则 $a =$ _____.

(14) 曲线 $r = a \sin^3 \frac{\theta}{3} (a > 0, 0 \leq \theta \leq 3\pi)$ 的弧长 $s =$ _____.

(15) 曲线 $y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \sqrt{\cos t} dt$ 的全长 $s =$ _____.

(16) 由曲线 $y = \ln x$ 与两直线 $y = (e+1) - x$ 及 $y = 0$ 所围平面图形的面积 $S =$ _____.

(17) 设 D 是由曲线 $y = \sin x + 1$ 与直线 $x = 0, x = \pi, y = 0$ 所围平面图形, 则 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 $V =$ _____.

(18) 设 n 为正数, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{n-x}{n+x} \right)^{\frac{2}{x}} = \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} x e^{-1/x} dx$, 则 $n =$ _____.

(19) 设在 x 轴的区间 $[0, 1]$ 上有一根长度为 1 的细棒, 若其线密度 $\rho(x) = 2x + 1$, 则该细棒的质心坐标 $\bar{x} =$ _____.

(20) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln \frac{n+2k}{3n-2k} =$ _____.

(21) 设质点以速度 $\sqrt{t} e^{-\sqrt{t}} (t \geq 0)$ m/s 作直线运动, 则质点从开始运动到停止运动经过的路程为 _____ m, 它在 $t = 0$ 到 $t = 4$ s 时间段内的平均速度为 _____ m/s.

三、解答题

(1) 求下列积分:

(I) $\int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x} dx;$

(II) $\int \frac{dx}{x^2(1-x^4)};$

(III) $\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)};$

(IV) $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx;$

(V) $\int \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} dx.$

(2) 求下列积分:

(I) $\int \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})};$

(II) $\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx;$

(III) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx;$

(IV) $\int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}};$

(V) $\int \frac{\arctan \sqrt{x-1}}{x \sqrt{x-1}} dx;$

(VI) $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx.$

(3) 求下列积分:

(I) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x};$

(II) $\int \frac{dx}{1+\sin x};$

(III) $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx;$

(IV) $\int \frac{3\sin x + \cos x}{\sin x + 2\cos x} dx;$

(V) $\int \frac{dx}{\sin 2x + 2\sin x};$

(VI) $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} (a^2 + b^2 > 0).$

(4) 求下列积分:

(I) $\int \arctan \sqrt{x} dx;$

(II) $\int \frac{\ln x}{(1-x)^2} dx;$

(III) $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx;$

(IV) $\int \sin(\ln x) dx;$

(V) $\int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx;$

(VI) $\int e^{2x} (1 + \tan x)^2 dx.$

(5) 求下列积分:

(I) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} - \cos x \right) dx;$

(II) $\int_{-1}^1 (2 + \sin x) \sqrt{1-x^2} dx;$

(III) $\int_{-2}^2 (x + |x|) e^{-|x|} dx;$

(IV) $\int_{-1}^1 \frac{2x^2 + x(e^x + e^{-x})}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx.$

(6) 求下列积分:

$$(I) \int_0^2 (x-1)^2 \sqrt{2x-x^2} dx;$$

$$(II) \int_0^{\pi} (e^{-\cos x} - e^{\cos x}) dx.$$

(7) 求下列积分:

$$(I) \int_{-3}^2 \min\{2, x^2\} dx;$$

$$(II) \int_{-1}^x (1-|t|) dt \quad (x \geq -1);$$

$$(III) \int_{-1}^1 |x-y| e^x dx \quad (|y| \leq 1);$$

$$(IV) \int_0^{\pi} \sqrt{1-\sin x} dx.$$

(8) 求下列积分:

$$(I) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin^2 x) \cos^2 x dx;$$

$$(II) \int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}} dx;$$

$$(III) \int_0^{\pi} t \sin t dt;$$

$$(IV) \int_0^1 [\sqrt{2x-x^2} + \sqrt{(1-x^2)^3}] dx.$$

(9) 计算下列积分:

$$(I) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{x+1} + e^{3-x}};$$

$$(II) \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}.$$

(10) 设 $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |x-t| \sin t dt, x \in (-\infty, +\infty)$, 求 $f(x)$ 的单调区间与极值.

(11) 设 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上有二阶连续导数, $f(0) = 2, f(\pi) = 1$, 计算

$$I = \int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)] \sin x dx.$$

(12) 设 $g(x) = \int_0^{\sin x} f(tx^2) dt$, 其中 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(0) = 1$, 求 $g'(x)$.

(13) 设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上具有二阶导数 ($a > 0$), 且 $f(x) > 0, f''(x) > 0$, 证明:

$$\int_0^a f(x) dx > af\left(\frac{a}{2}\right).$$

(14) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且单调增加, 证明: $\int_a^b xf(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$.

(15) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $y = f(x)$ 的图形关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称, 证明:

$$\int_a^b xf(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

(16) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且单调增加, 证明: 当 $0 < a < b$ 时, 有

$$\int_a^b xf(x) dx \geq \frac{1}{2} \left[b \int_0^b f(x) dx - a \int_0^a f(x) dx \right].$$

(17) 求 $f(x) = \int_0^x \frac{2t-1}{t^2-t+1} dt$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大值与最小值.

(18) 设点 $A(a, 0) (a > 0)$, 梯形 $OABC$ 的面积为 S , 曲边梯形 $OABC$ 的面积为 S_1 , 其曲边由 $y = \frac{1}{2} +$

x^2 确定, 证明: $\frac{S}{S_1} < \frac{3}{2}$.

(19) 设曲线 $y = \sin x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$, 直线 $y = k (0 \leq k \leq 1)$ 与 $x = 0$ 所围面积为 S_1 , $y = \sin x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$, $y = k$ 与 $x = \frac{\pi}{2}$ 所围面积为 S_2 , 求 $S = S_1 + S_2$ 的最小值.

(20) 设曲线 $y = \sin x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$, $y = 1$ 及 $x = 0$ 所围平面图形为 D_1 , $y = \sin x (0 \leq x \leq \pi)$ 及 $y = 0$ 所围平面图形为 D_2 . 求:

(I) D_1 绕直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 旋转一周所得体积 V_1 ;

(II) D_2 绕 y 轴旋转一周所得体积 V_2 .

(21) 设星形线 $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0)$. 求:

(I) 所围面积 A ;

(II) 弧长 L ;

(III) 绕 x 轴旋转一周所得体积 V 和表面积 S .

(22) 设立体图形的底是介于 $y = x^2 - 1$ 和 $y = 0$ 之间的平面区域, 而它的垂直于 x 轴的任一截面是等边三角形, 求立体体积 V .

(23) 求曲线 $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ 在 $y \in [1, e]$ 上的弧长 s .

综合题

一、选择题

(1) 设在 $(-1, 1)$ 内 $f(x)$ 是奇函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内的一个原函数, 则在 $(-1, 1)$ 内 $f(x) + F(x)$ ().

A. 是可导的偶函数

B. 是连续的奇函数

C. 存在原函数

D. 存在原函数且原函数为奇函数

(2) 设 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \cdot \sin t dt$, 则正确的是 ().

A. $F(x)$ 为正的常数

B. $F(x)$ 为负的常数

C. $F(x)$ 不是常数

D. $F(x)$ 恒为零

(3) 设 $\delta > 0$, 在 $(-\delta, \delta)$ 内有 $|f(x)| \leq x^2, f''(x) > 0, I = \int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx$, 则 ().

A. $I = 0$

B. $I > 0$

C. $I < 0$

D. 不能确定

(4) 设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x) dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin x) dx$, 则 ().

A. $I_1 < 1 < I_2$

B. $I_2 < 1 < I_1$

C. $1 < I_1 < I_2$

D. $I_1 < I_2 < 1$

(5) 设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2} dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} dx, I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(1+x)^2} dx$, 则 ().

- A. $I_2 > I_1 > I_3$ B. $I_3 > I_2 > I_1$ C. $I_1 > I_2 > I_3$ D. $I_2 > I_3 > I_1$

(6) 设 $f(x)$ 为可导函数, 且 $f'(x) < 0$, 则下列命题正确的是().

- ① 当 $0 < t < 1$ 时, $\int_0^t f(x) dx < \int_0^1 t f(x) dx$;
 ② 当 $0 < t < 1$ 时, $\int_0^t f(x) dx > \int_0^1 t f(x) dx$;
 ③ 当 $x \geq 0$ 时, $\int_0^x x f(t) dt \geq 2 \int_0^x t f(t) dt$;
 ④ 当 $x \geq 0$ 时, $\int_0^x x f(t) dt \leq 2 \int_0^x t f(t) dt$.

- A. ①④ B. ②③ C. ②④ D. ①③

(7) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则在 $x \in (0, 1)$ 内, 有().

- A. $xF(1) > 2 \int_0^1 F(x) dx$ B. $F(1) > 2 \int_0^1 F(x) dx$
 C. $F(x) < 2 \int_0^1 F(x) dx$ D. $F(x) > 2 \int_0^1 F(x) dx$

(8) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, a]$ ($a > 0$) 上有二阶连续导数, 且 $f(0) = 0$, $f''(x) > 0$, 则下列选项正确的是().

- A. $3 \int_0^a x f(x) dx < 2 \int_0^a a f(x) dx$ B. $3 \int_0^a x f(x) dx > 2 \int_0^a a f(x) dx$
 C. $2 \int_0^a x f(x) dx > 3 \int_0^a a f(x) dx$ D. $2 \int_0^a x f(x) dx < 3 \int_0^a a f(x) dx$

(9) 设 $f(x)$ 二阶可导, 则下列结论正确的是().

- ① 当 $f'(x) < 0$ 时, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx < 0$;
 ② 当 $f'(x) < 0$ 时, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx > 0$;
 ③ 当 $f''(x) > 0$ 时, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx > 0$;
 ④ 当 $f''(x) > 0$ 时, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx < 0$.

- A. ②③ B. ①② C. ②④ D. ①④

(10) 设反常积分 $\int_1^{+\infty} x^k (e^{-\cos \frac{1}{x}} - e^{-1}) dx$ 收敛, 则正确的是().

- A. $k > -1$ B. $k < -1$ C. $k > 1$ D. $k < 1$

(11) 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(2a - x)$ ($a \neq 0$), b 为常数, 则 $I = \int_{-b}^b f(a - x) dx =$ ().

- A. $2 \int_0^b f(2a - x) dx$ B. $2 \int_{-b}^b f(2a - x) dx$
 C. $2 \int_0^b f(a - x) dx$ D. 0

(12) 设螺线 $r = \theta (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ 与极轴所围区域的面积为 A , 则 $A = (\quad)$.

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{4\pi^3 i^2}{n^3}$

B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{4\pi^3 i^2}{n^2}$

C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{8\pi^3 i^2}{n^3}$

D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2\pi^3 i^2}{n^2}$

(13) 设 $f(x)$ 有连续导数, $f(0) = 0, f'(0) = 6, \alpha(x) = \int_0^x f(t) dt, \beta(x) = \left[\int_0^x f(t) dt \right]^3$, 则当 $x \rightarrow 0$

时, $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是().

A. 同阶无穷小

B. 等价无穷小

C. 高阶无穷小

D. 低阶无穷小

(14) 设 $I = \frac{1}{s} \int_0^s f\left(t + \frac{x}{s}\right) dx, s > 0, t > 0$, 则正确的是().

A. I 仅依赖于 s

B. I 仅依赖于 t

C. I 依赖于 s, t

D. I 依赖于 s, t, x

(15) 下列积分存在且不为零的是().

A. $\int_0^1 \frac{1}{(4x-1)^3} dx$

B. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

C. $\int_{-1}^1 x \ln \frac{2+x}{2-x} dx$

D. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{x^2} \sin x dx$

(16) 设反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ 收敛, 则().

A. $0 < p < 2$

B. $1 < p < 2$

C. $0 < p \leq 1$

D. $p > 1$

(17) 设积分 $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} (p > 0, q > 0)$ 收敛, 则().

A. $p > 1$ 且 $q < 1$

B. $p > 1$ 且 $q > 1$

C. $p < 1$ 且 $q < 1$

D. $p < 1$ 且 $q > 1$

(18) 设积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^{1-p} \arctan x}{2+x^p} dx (p > 0)$ 收敛, 则 p 的取值范围为().

A. $1 < p < 3$

B. $2 < p < 3$

C. $1 \leq p < 2$

D. $0 < p < 3$

(19) 已知 $I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{a}{x+2} \right) dx$ 收敛, 则().

A. $a = 1, I = \ln 4$

B. $a > 1, I = \ln 2$

C. $a = 1, I = \ln 2$

D. $a < 1, I = \ln 4$

二、填空题

(1) $f(x) = \max\{1, x^2\}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足 $F(0) = 1$ 的一个原函数为_____.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 若 $x_0 \in [a, b], x \in [a, b]$, 则极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^x [f(t + \Delta x) - f(t)] dt = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(3) 由曲线 $y = x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴围成的平面图形的面积 $A =$ _____.

(4) 双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ 围成的平面图形的面积为 _____.

(5) 曲线 $\theta = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$ 在区间 $r \in [1, 3]$ 上的弧长为 _____.

(6) 闭曲线 $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$ 所围区域的面积 $S =$ _____.

(7) 已知 $f'(e^x) = xe^{-x}$, 且 $f(1) = 0$, 则 $f(x) =$ _____.

(8) 已知 $f'(x) = \sqrt{1 - \cos 2x}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(0) = 0$, 则 $f(x) =$ _____.

(9) 已知曲线 $y = y(x)$ 上任一点 (x, y) 处的切线的斜率为 $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, 且曲线通过点 $(-2, 0)$, 则该

曲线方程为 $y =$ _____.

(10) 设 $f(x)$ 连续, $g(x) = \int_0^{x^2} xf(t)dt$, 且 $g(1) = 1, g'(1) = 5$, 则 $f(1) =$ _____.

(11) 设 $f(2) = \frac{1}{2}, f'(2) = 0$, 且 $\int_0^2 f(x)dx = 1$, 则 $I = \int_0^1 x^2 f''(2x)dx =$ _____.

(12) 设 $f(x) = \int_0^x e^{\cos t} dt$, 则 $I = \int_0^\pi f(x) \cos x dx =$ _____.

(13) 设 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $\ln(1+x)$ 是 $g(x)$ 的一个原函数, 且

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 \left[g\left(2x + \frac{1}{t}\right) - g(2x) \right] \sin \frac{x}{t},$$

则 $f(x)$ 在区间 $[0, e]$ 上的平均值为 _____.

(14) 设 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, 则 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx =$ _____.

(15) $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx =$ _____.

(16) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \frac{x+1}{x} dx =$ _____.

(17) 已知 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 则曲线 $y = (5x+9) \int_0^{-x} e^{-t^2} dt + (7x-3) \int_0^x e^{-t^2} dt$ 的斜渐近线方程

为 _____.

三、解答题

(1) 求下列积分:

(I) 设 $f(x) = \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$, 求 $I = \int_0^1 x^2 f(x) dx$;

(II) 设 $f(x) = \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt$, 求 $I = \int_0^1 xf(x) dx$.

(2) 设 $f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}$, 求 $I = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) dx$.

(3) 计算积分 $I = \int e^{\sin x} \cdot \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} dx$.

(4) 计算 $I = \int \frac{e^{-\sin x} \cdot \sin 2x}{\sin^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} dx$.

(5) 设 $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, 求 $I = \int f(x) dx$.

(6) 设 $f'(x) = \arctan(x-1)^2$, $f(0) = 0$, 求 $I = \int_0^1 f(x) dx$.

(7) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \int_0^2 x \sqrt{4-x^2 u^2} du - 2x}{\sqrt{1+2x^3} - 1}$.

(8) 设 $f(x)$ 连续, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(x)f(x-t)dt}{\int_0^x t f(x-t)dt}$.

(9) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上连续, 且满足

$$\int_0^x t f(t^2 - x^2) dt = \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{1}{2} \ln(1+x^2),$$

求函数 $f(x)$ 及其极值.

(10) 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2x} \left| 1 - \frac{t}{x} \right| \sin t dt}{x^2}$.

(11) 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内一阶可导, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数, 且 $g(x)$ 连续, 若

$$\int_1^{f(x)} g(t) dt = x^2 e^x - 4e^2 - \int_1^{x-1} f(t+1) dt, \quad f(2) = 1,$$

求 $f(x)$ 的表达式.

(12) 设 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上可导, 且 $\int_0^x t f(2x-t) dt = \frac{1}{2} \arctan x^2$, $f(1) = \frac{1}{2}$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in$

$(1, 2)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

(13) 设 $f(x)$ 满足 $e^x - \frac{x^2}{2} = 1 + \int_0^x f(t-x) dt$, 求 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的最值.

(14) 求 $f(x) = \int_0^{x^2} (2-t)e^{-t} dt$ 的最大值和最小值.

(15) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$.

(16) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}} \right)$.

(17) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}$.

(18) 设 $f(x) = x^2$, $f[g(x)] = -x^2 + 2x + 3$, 且 $g(x) \geq 0$.

(I) 求 $g(x)$ 的定义域与值域;

(II) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} e^{\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n+g(x)}$.

(19) 设 $f(x)$ 是连续的偶函数, 函数 $g(x)$ 连续, 且满足 $g(x) \cdot g(-x) = 1$.

(I) 证明: $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+g(x)} dx = \int_0^a f(x) dx$;

(II) 计算 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(1+e^x)\cos^2 x}$.

(20) 设 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 且 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{e^{-x}}{1+e^x} \int_0^{+\infty} f(x) dx$, 求 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

(21) 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$, 证明: $\frac{1}{2(n+1)} < a_n < \frac{1}{2(n-1)} (n \geq 2)$.

(22) 设 $a_n = \int_0^{\pi} x \sin^n x dx (n = 1, 2, \dots)$.

(I) 证明: $a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-2} (n = 3, 4, \dots)$;

(II) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

(23) 求积分 $I_n = \int_0^1 x \ln^n x dx (n \geq 0 \text{ 且为整数})$ 的递推关系, 并计算 I_n .

(24) (I) 求积分 $I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx (n \geq 1, a > 0)$ 的递推关系;

(II) 计算 $I = \int \frac{3x+4}{(x^2+2x+2)^2} dx$.

(25) 证明: $f(x) = \int_0^x (t-t^2) \sin^{2n} t dt (x > 0)$ 的最大值为 $f(1)$, 且 $f(1) \leq \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$.

(26) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶连续导数, 且 $f(b) = f'(b) = 0$, 证明:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b f''(x) (x-a)^2 dx.$$

(27) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f''(x) > 0$, 证明:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx < \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

(28) (I) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 $[a, b]$ 上连续, 证明:

$$\left[\int_a^b f(x) g(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx.$$

(II) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续导数, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明:

$$\int_a^b f^2(x) dx \leq \frac{(b-a)^2}{8} \int_a^b f'^2(x) dx.$$

(29) 设 $f(x)$ 在 $[a, b] (a < b)$ 上连续, 并且 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b x f(x) dx = 0$. 证明: 至少存在不同的

$\xi_1, \xi_2 \in (a, b)$, 使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

(30) 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且满足

$$f(a) > g(a), f(b) > g(b), \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

证明: 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) > g''(\xi)$.

(31) 设 $f(x)$ 在 $(-a, a) (a > 0)$ 内连续, 且 $f'(0) = A \neq 0$. 证明:

(I) 对 $x \in (0, a)$, 存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得 $\int_0^x f(t) dt + \int_0^{-x} f(t) dt = x[f(\theta x) - f(-\theta x)]$;

(II) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta = \frac{1}{2}$.

(32) 设 $y = f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是非负连续函数.

(I) 证明: 存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得在 $[0, x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积, 等于在 $[x_0, 1]$ 上以 $y = f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积;

(II) 又设 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f'(x) > -\frac{2f(x)}{x}$, 证明: (I) 中的 x_0 是唯一的.

(33) 设曲线 $y = f(x)$ 上任一点 $(x, f(x))$ 处的切线斜率为 $a^2 x^2 - 4ax + 3$, 且 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值 0.

(I) 求 $f(x)$ 及 $f(x)$ 的其他极值;

(II) 证明: $0 \leq \int_0^1 \sqrt{f(ut)} dt \leq \frac{2}{3u}, u \in (0, 1)$.

(34) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且满足 $f(x+T) = f(x), T > 0, f(-x) = f(x)$.

(I) 证明: $\int_0^{nT} xf(x) dx = \frac{n^2 T}{2} \int_0^T f(x) dx (n \text{ 为正整数})$;

(II) 计算 $I = \int_0^{n\pi} x |\cos x| dx$.

(35) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有连续导数, 证明: $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{4a^2} \int_{-a}^a [f(t+a) - f(t-a)] dt = f'(0)$.

(36) 设曲线 $y = a\sqrt{x} (a > 0)$ 与 $y = \ln \sqrt{x}$ 在点 (x_0, y_0) 处有公切线. 求:

(I) 常数 a 及点 (x_0, y_0) ;

(II) 两曲线与 x 轴所围图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

(37) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, $f(a) > 0, f'(x) > 0, S_1(x)$ 与 $S_2(x)$ 为如图 3-1 所示阴影部分的面积. 证明: 存在唯一的 ξ , 使得 $\frac{S_1(\xi)}{S_2(\xi)} = k$ (k 为正的常数).

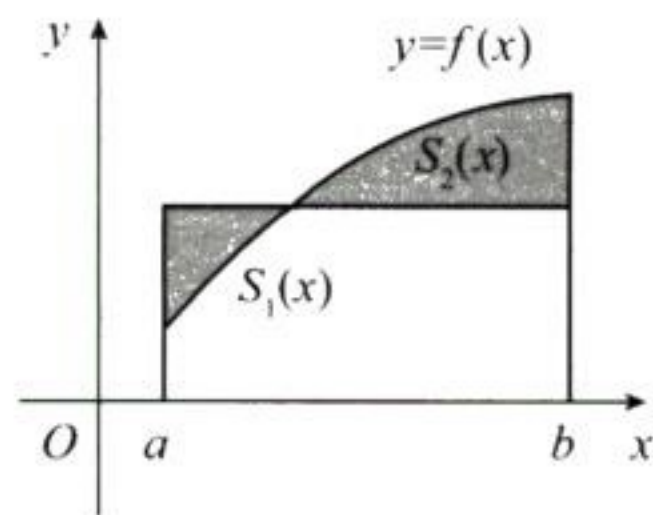


图 3-1

(38) 求曲线 $4y = \int_0^2 x \sqrt{12 - x^2 u^2} du (x \geq 0)$ 的全长.

(39) 设平面图形 D 由 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 与 $y \geq x$ 确定, 求图形 D 绕直线 $x = 2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

(40) 求曲线 $y = e^{-x} \sqrt{\sin x} (x \geq 0)$ 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

(41) 设摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0)$ 与 x 轴所围平面图形为 D . 求:

(I) D 绕 x 轴, y 轴各旋转一周所得旋转体的体积;

(II) D 绕直线 $y = 2a$ 旋转一周所得旋转体的体积.

(42) 求圆 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的表面积.

(43) 求双纽线 $r^2 = a^2 \cos 2\theta (a > 0)$ 绕极轴旋转所成旋转曲面的面积.

(44) 设平面区域 $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1-x}{1+x} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1 \right\}$, 求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转

体的体积 V .

(45) 设 $f(x) = x^n \sqrt{1-x^2}, x \in [0, 1]$ 与 $y = 0$ 所围平面区域的面积为 $S_n, g(x) = \sin^{\frac{n}{2}} x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 与 $y = 0$ 所围平面区域绕 x 轴旋转一周所得体积为 $V_n (n = 1, 2, \dots)$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi S_n}{V_n}$.

(46) 设 $f(x) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x^2-e^{tx}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 曲线 $y = f(x)$ 与 $y = \frac{1}{2}x$ 以及 $x = 1$ 所围图形为 D .

试求:

(I) D 的面积.

(II) D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

(47) 设曲线 $y = \sin x$ 在 $x \in [0, n\pi] (n = 1, 2, \dots)$ 上与 x 轴所围成的区域为 D , D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为 a_n . 求:

(I) a_n ;

(II) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2k\pi^2}{a_n} \sin \frac{k\pi}{2n}$.

(48) 将半径为 R 的球沉入水中, 它与水面相切, 设球的密度与水的密度相等, 现将球从水中取出, 问至少需要做功多少?

(49) 设图 3-2 所示的三角形薄板为同一等腰三角形薄板, 已知其底为 $2b$ 、高为 h , 将其垂直放入静水中, 图(a) 是其底与水面相齐, 图(b) 是其顶点与水面相齐, 设图(a) 与图(b) 薄板一侧所受压力分别为 P_1 和 P_2 , 求 $\frac{P_2}{P_1}$.

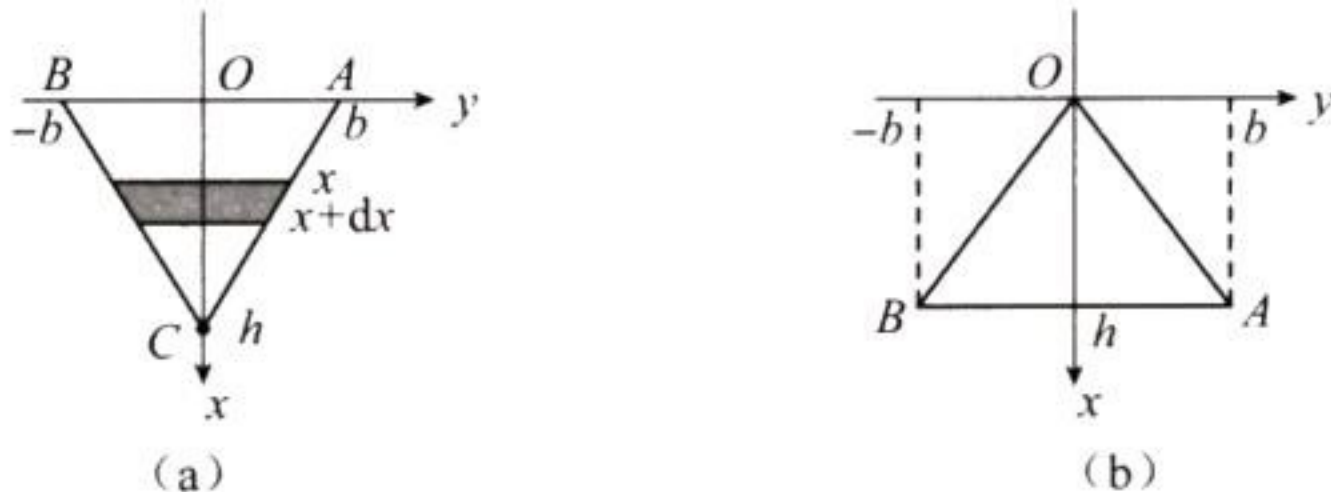


图 3-2

(50) 已知曲线 L 的极坐标方程为 $r = 1 + \cos \theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$. 求:

(I) 曲线 L 在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 对应点处的切线 T 的直角坐标方程;

(II) 曲线 L 、切线 T 与 x 轴所围图形的面积.

(51) 求曲线 $y = 3 - |x^2 - 1|$ 与 x 轴围成封闭图形绕直线 $y = 3$ 旋转所得旋转体的体积.

(52) 设心形线 $r = 4(1 + \cos \theta)$ 与 $\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$ 所围图形为 D , 求 D 绕极轴旋转一周所得旋转体的体积.

(53) 设 D 是位于曲线 $y = \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha+1}} (\alpha > 0, 2 \leq x < +\infty)$ 下方、 x 轴上方的无界区域. 求:

(I) D 的面积 $S(\alpha)$;

(II) $S(\alpha)$ 的最小值.

(54) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续且单调减少, $f(x) \geq 0, a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx (n = 1, 2, \dots)$,

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在.

(55) 设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx, b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^n x dx$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$.

(56) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $f'(x) > 0$. 证明: 存在唯一的 $\xi \in (a, b)$, 使得 $y = f(x)$ 与 $y = f(\xi), x = a$ 所围图形的面积 S_1 , 和 $y = f(x)$ 与 $y = f(\xi), x = b$ 所围图形的面积 S_2 , 满足 $S_1 = 3S_2$.

(57) 求心形线 $r = 1 + \cos \theta$ 与 $r = 3\cos \theta$ 所围公共部分图形的面积.

(58) 设曲线族 $y = kx^2 (k > 0)$, 对于每个 $k \geq \frac{4}{\pi^2}$, 曲线 $y = kx^2$ 与曲线 $y = \sin x \left(0 < x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 交于唯一点 $(t, \sin t)$, 其中 $t = t(k)$. S_1 表示 $y = kx^2$ 与 $y = \sin x$ 所围区域的面积, S_2 表示 $y = \sin x$ 与 $y = \sin t$ 及 $x = \frac{\pi}{2}$ 所围区域的面积.

(I) 写出 $S_1 + S_2$ 关于 t 的函数表达式;

(II) 证明: $S_1 + S_2$ 有最小值.

(59) 设曲线 $L: y = \tan x^2 \left(0 \leq x \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.

(I) 求由 $y = 1$ 与曲线 L 以及 y 轴围成的图形 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V ;

(II) 设(I)中旋转体内盛满水, 问将水抽完至少需要做多少功? 用 W 表示所做的功, 用 ρ 表示水的密度, 用 g 表示重力加速度.

(60) 设非负函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上有连续的二阶导数, 且 $f(0) = 1, f''(x) < 0$, 证明:

(I) 当 $x \in [0, 1]$ 时, 有 $\int_0^x f(t) dt \geq \frac{1}{2} [xf(x) + x]$;

$$(II) \int_0^1 \left(\frac{2}{3} - x \right) f(x) dx \geq \frac{1}{6}.$$

拓展题

解答题

(1) 设 $y = f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上非负连续, 曲边梯形

$$D(t) = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

$D(t)$ 所围图形的面积 $S(t) = te'$, $D(t)$ 绕直线 $x = t$ 旋转一周所得旋转体的体积为 $V(t)$, 求 $V(t)$ 的表达式.

(2) 如图 3-3(a) 所示, 在水平放置的椭圆底柱形容器内存放液体(密度为 $\rho \text{ kg/m}^3$), 容器长为 4 m, 椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (单位: m), 即如图 3-3(b) 所示.

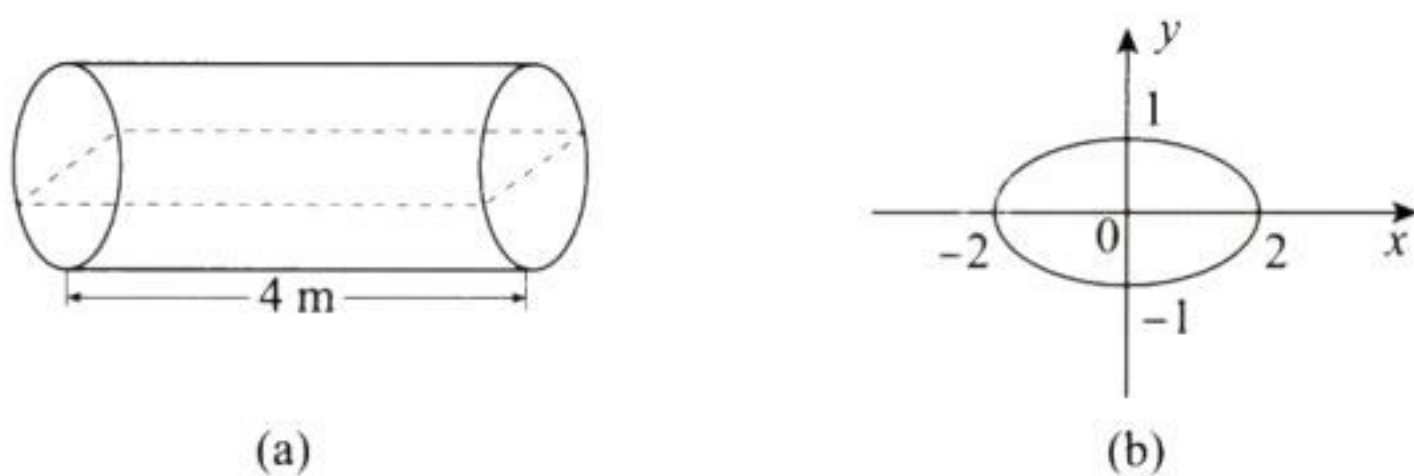


图 3-3

(I) 当液面在过点 $(0, y)$ ($-1 \leq y \leq 1$) 处的水平线时, 容器内液体的体积是多少?

(II) 当容器内存满了液体后, 平均每分钟从容器顶端抽出 0.16 m^3 的液体, 当液面降至 $y = 0$ 处时, 求液体下降的速度.

(III) 问抽出全部液体需要做多少功?

(3) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶导数, 且 $f(a) = f(b) = 0$, $f''(x) < 0$, 证明: 当 $x \in (a, b)$ 时, 有

$$0 < f(x) < \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

(4) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ ($b > a$) 上可导且不恒为常数, $f(a)f(b) < 0$. 证明: 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\frac{2}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx < |f'(\xi)|$.

(5) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的二阶导数.

(I) 证明: $\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2}(b-a)[f(a) + f(b)] + \frac{1}{2} \int_a^b (x-a)(x-b)f''(x) dx$;

(II) 记 $M = \max_{x \in [a, b]} \{ |f''(x)| \}$, 证明:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{1}{2}(b-a)[f(a) + f(b)] \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} M.$$

(6) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的二阶导数, 且 $f'(a) = f'(b)$.

证明: 存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2}(b-a)[f(a) + f(b)] + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$.

(7) 设 $f(x)$ 有连续的二阶导数, $f(0) = f(1) = 1, M = \max_{x \in [0,1]} \{ |f''(x)| \}$.

(I) 证明: 当 $x \in [0,1]$ 时, 有 $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}M$;

(II) 在第(I)问的基础上, 证明: $\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq 1 + \frac{1}{8}M$.

(8) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有连续的二阶导数, 且 $|f''(x)| \leq 1$.

(I) 证明: $\left| \int_0^1 f(x) dx - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{24}$;

(II) 若对任意的 $x \in [0, +\infty)$, 有 $f(x) = f(x+1)$, n 为正整数. 证明:

$$\left| \int_0^n f(x) dx \right| \leq n \left[\frac{1}{6} + |f(0)| \right].$$

(9) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数, $f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right] = -\frac{1}{2}.$$

(10) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的二阶导数, $f(x)$ 不恒为零, 且 $f(0) = f(1) = 0$, $|f(x)|$ 在 $x = x_0$ 处取得最大值, $x_0 \in (0,1)$. 证明:

(I) 至少存在点 $\xi_1 \in (0, x_0), \xi_2 \in (x_0, 1)$, 使得 $f'(\xi_2) - f'(\xi_1) = \frac{1}{x_0} f'(\xi_2)$;

(II) $\int_0^1 |f''(x)| dx \geq 4 |f(x_0)|$.

(11) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的二阶导数. 证明:

(I) 对任意点 $\xi \in \left(0, \frac{1}{4}\right), \eta \in \left(\frac{3}{4}, 1\right)$, 有

$$|f'(x)| < 2 |f(\xi) - f(\eta)| + \int_0^1 |f''(x)| dx, x \in [0,1].$$

(II) 当 $f(0) = f(1) = 0, f(x) \neq 0, x \in (0,1)$ 时, 有

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq 4.$$

(12) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数, 且 $M = \max_{x \in [a,b]} \{ |f''(x)| \}$. 证明:

(I) $\left| \int_a^b f(x) dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24} M$;

(II) 存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得 $\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$.

(13) 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有连续的二阶导数, 证明:

(I) 存在一点 $\xi \in [-1,1]$, 使得 $\int_{-1}^1 xf(x) dx = \frac{1}{3} [2f'(\xi) + \xi f''(\xi)]$;

(II) 若 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内取得极值, 则存在一点 $\eta \in (-1,1)$, 使得

$$\left| 2f'(\eta) + \eta f''(\eta) \right| \geq \frac{1}{2} |f(1) - f(-1)|.$$

第四章 多元函数微分学及其应用

基础题

一、选择题

(1) 设 $f(x, y) = \arcsin \sqrt{x^2 + y^4}$, 则下列选项正确的是().

- A. $f'_x(0, 0)$ 存在, $f'_y(0, 0)$ 存在 B. $f'_x(0, 0)$ 不存在, $f'_y(0, 0)$ 存在
C. $f'_x(0, 0)$ 不存在, $f'_y(0, 0)$ 不存在 D. $f'_x(0, 0)$ 存在, $f'_y(0, 0)$ 不存在

(2) 设 $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ 均存在, 则下列选项正确的是().

- A. $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 存在 B. $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续
C. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0)$ 存在 D. $f(x, y)$ 在 $\dot{U}(x_0, y_0)$ 内有定义

(3) 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4} \sin(xy^2), & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$ 则正确的是().

- A. $f''_{xy}(0, 0)$ 存在, $f''_{yx}(0, 0)$ 存在 B. $f''_{xy}(0, 0)$ 不存在, $f''_{yx}(0, 0)$ 存在
C. $f''_{xy}(0, 0)$ 存在, $f''_{yx}(0, 0)$ 不存在 D. $f''_{xy}(0, 0)$ 不存在, $f''_{yx}(0, 0)$ 不存在

(4) 设 $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, 则().

- A. 当 $x > 0$ 时, $f'_x(x, y) = -\frac{1}{2} \sqrt{\left| \frac{y}{x} \right|}$ B. 当 $x < 0$ 时, $f'_x(x, y) = \frac{1}{2} \sqrt{\left| \frac{y}{x} \right|}$
C. 当 $y \neq 0$ 时, $f'_x(0, y) = 0$ D. 当 $y \neq 0$ 时, $f'_x(0, y)$ 不存在

(5) 设方程 $xy - z \ln y + e^{xz} = 1$, 存在点 $(0, 1, 1)$ 的一个邻域, 在此邻域内该方程().

- A. 可确定隐函数 $y = y(x, z)$ 和 $z = z(x, y)$
B. 可确定隐函数 $x = x(y, z)$ 和 $z = z(x, y)$
C. 可确定隐函数 $x = x(y, z)$ 和 $y = y(x, z)$
D. 只能确定隐函数 $z = z(x, y)$

(6) 设可微函数 $f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处取得极大值, 则().

- A. $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处导数小于零 B. $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处导数大于零
C. $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处导数等于零 D. $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处导数不存在

(7) 设 $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$, 则 $f(x, y)$ 在点 $P\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ 处().

- A. 取得极小值 $-\frac{e}{2}$ B. 取得极大值 $-\frac{e}{2}$
C. 取得极大值 e D. 不取得极值

(8) 设 $f(x, y) = \frac{e^x}{x-y}$, 则().

A. $f'_x + f'_y = 0$

B. $f'_x - f'_y = 0$

C. $f'_x - f'_y = f$

D. $f'_x + f'_y = f$

二、填空题

(1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(3) $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 0}} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(4) 设 $z = (1 + xy)^y$, 则 $dz|_{(1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(5) 设函数 $f(x, y)$ 可微, 且 $f(1, 2) = 2, f'_x(1, 2) = 3, f'_y(1, 2) = 4, F(x) = f[x, f(x, 2x)]$, 则 $F'(1) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(6) 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $x = ze^{y+z}$ 确定, 则 $dz|_{(e,0)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(7) 设 $\begin{cases} y = f(x, t), \\ F(x, y, t) = 0, \end{cases}$ f, F 有一阶连续偏导数, 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(8) 设 $y = f(x, t), t = t(x, y)$ 由方程 $G(x, y, t) = 0$ 确定, f, G 可微, 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(9) 设 $z = f\left(\frac{y}{x}\right) + g(e^x, \sin y)$, f 有二阶连续导数, g 有二阶连续偏导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(10) 设 $f(u, v)$ 有二阶连续偏导数, $y = f(e^x, \cos x)$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(11) 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^{2yz} + x + y^2 + z = \frac{7}{4}$ 确定, 则 $dz \Big|_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(12) 设 $f(x, y) = \int_0^{xy} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$, 则 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(0,2)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(13) 设 $z(x, y)$ 的全微分 $dz = (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$, 则 $z(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(14) 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $z + \ln z - \int_y^x e^{-t^2} dt = 0$ 确定, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(15) 设 $z = f\left(xy, \frac{x}{y}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$, f 具有二阶连续偏导数, g 具有二阶连续导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(16) 设 $\frac{(x+ky)dx + ydy}{(x+y)^2}$ 为某二元函数 $u(x, y)$ 的全微分, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题

(1) 设 $u = f(x, y, z)$ 有连续偏导数, $y = y(x), z = z(x)$ 分别由方程 $e^{xy} - y = 0$ 和 $e^z - xz = 0$ 确定, 求 $\frac{du}{dx}$.

(2) 设 $y = y(x), z = z(x)$ 由方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3x, \\ 2x - 3y + 5z = 4 \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$.

(3) 设当 $x \geq 0, y \geq 0$ 时, 有 $|x^2 - y^2| e^{-x^2 - y^2} \leq k$ 成立, 求 k 的最小值.

(4) 求 $f(x, y) = (1 + e^y) \cos x - ye^y$ 的极值.

(5) 设曲面 $S: (x - y)^2 - z^2 = 1$, 求坐标原点到 S 的最短距离.

(6) 求双曲线 $xy = 4$ 与直线 $2x + y = 1$ 之间的最短距离.

(7) 求函数 $z = x^3 - 3x^2 - 3y^2$ 在闭区域 $D: x^2 + y^2 \leq 16$ 上的最大值.

(8) 求 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在条件 $x + y + z = 4$ 和 $z = x^2 + y^2$ 下的最大值和最小值.

(9) 在第一象限内, 过曲线 $3x^2 + 2xy + 3y^2 = a$ 上任一点作其切线, 切线与两坐标轴所围成的三角形面积的最小值为 $\frac{1}{4}$, 求 a 的值.

(10) 设 $u(x, y)$ 有二阶连续偏导数, 利用变换 $\xi = x + ay, \eta = x + by$, 将方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$, 求 a, b 的值.

(11) 设 $z = \frac{u}{y} + e^{-u} + f(u)$, $u(x, y)$ 满足 $xe^{-u} - f'(u) = \frac{1}{y}$, 其中 $u(x, y)$ 和 $f(u)$ 均可微, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ 求 } u(x, y).$$

(12) 设 $f(u)$ 有二阶连续导数, 且 $z = f(e^x \sin y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = ze^{2x}$, 求 $f(u)$.

综合题

一、选择题

(1) 设 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{e^{x^2 + y^2} - 1} = 1$, 则().

- A. $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极小值
- B. $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极大值
- C. $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不取得极值
- D. 不能确定 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极值

(2) 设 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内连续, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{|x| + y^4} = -1$, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处

().

- A. 取得极小值
- B. 取得极大值
- C. 不取得极值
- D. 无法确定是否取得极值

(3) 设 $f(x, y) = \begin{cases} y \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处().

- A. 连续但不可微
B. 偏导数存在但不连续
C. 可微
D. 连续但偏导数不存在

(4) 设函数 $f(x, y) = x + (y - 1) \arcsin \sqrt{\frac{|x|}{y}}$, 则在点 $(0, 1)$ 处().

- A. $f'_x(0, 1) = f'_y(0, 1) = 1$
B. $df|_{(0, 1)} = dy$
C. $df|_{(0, 1)} = dx$
D. $df|_{(0, 1)}$ 不存在

(5) 设 $f(x, y)$ 可微, 对任意的 x, y , 有 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$, 则使得 $f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$ 成立

的一个充分条件是().

- A. $x_1 < x_2, y_1 > y_2$
B. $x_1 > x_2, y_1 > y_2$
C. $x_1 < x_2, y_1 < y_2$
D. $x_1 > x_2, y_1 < y_2$

(6) 设 $F(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有二阶连续偏导数, 且 $F(x_0, y_0) = 0, F'_x(x_0, y_0) = 0, F'_y(x_0, y_0) > 0, F''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, 则由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的隐函数 $y = y(x)$ 在 $x = x_0$ 处().

- A. 取得极小值
B. 取得极大值
C. 不取得极值
D. 不能确定是否取得极值

(7) 设 $f(x, y)$ 有一阶连续偏导数, 且 $f(x, y) = 1 - x - y + o(\sqrt{(x-1)^2 + y^2}), g(x, y) = f(x+y, xy)$, 则全微分 $dg|_{(1, 0)} = ()$.

- A. $-2dy$
B. $-dx$
C. $-dx - 2dy$
D. $dx - 2dy$

二、填空题

(1) 设 $z = z(x, y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$, 且 $z(x, 0) = 1, z'_y(x, 0) = x$, 则 $z(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设 $z = z(x, y)$ 有二阶连续偏导数, 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = x + y$, 且 $z(x, 0) = x, z(0, y) = y^2$, 则 $z(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 设 $z = \frac{2x}{x^2 - y^2}$, 则 $\frac{\partial^n z}{\partial y^n} \Big|_{(2, 1)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 设 $f(x, y)$ 对任意的 $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ 满足 $f(x, y) = e^{x-y^2} + o(\rho)$, 其中 $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h, 1) - f(1, 1-2h)}{h} = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

(1) 已知 $x + y - z = e^t, xe^t = \tan t, y = \cos t$, 求 $\frac{d^2 z}{dt^2} \Big|_{t=0}$.

(2) 设 f 有一阶连续导数, 证明: $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$ 的充分必要条件是 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

(3) 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $F\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z}$ 确定的隐函数, 其中 F 可微, 求 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y}$.

(4) 设 $y = g(x, z)$ 与 $z = z(x, y)$ 是由方程 $f(x - z, xy) = 0$ 确定的函数, 求 $\frac{dy}{dx}$.

(5) 求函数 $f(x, y) = (1+y)^2 + (1+x)^2$ 在条件 $x^2 + y^2 + xy = 3$ 下的最大值.

(6) 设 $f(x, y) = x^3 + y^3 - ax^2 - by^2 (a > 0, b > 0)$ 有极小值 -8 , 求 a, b 的值, 使得椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

所围面积最大.

(7) 设 $f(x, y) = e^{-x}(ax + b - y^2)$ 在点 $(-1, y_0)$ 处取得极大值, 求 a, b 满足的条件.

(8) 设函数 $f(x, y) = x^2 + 2kxy + y^2 (k > 0)$ 满足 $x^2 + y^2 = 1$ 的最大值与最小值分别为 λ_1 与 λ_2 , 求 $\lambda_1 + \lambda_2$.

(9) 求 $f(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

(10) 求 $f(x, y) = \frac{1}{y^2} e^{\frac{1}{2y^2}[(x-a)^2 + (y-1)^2]}$ ($y \neq 0, a$ 为常数) 的极值.

(11) 求 $u = xy + 2xz + 2yz$ 在条件 $xyz = 1$ 下的最小值.

(12) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定, 求 $z = z(x, y)$ 的极值.

(13) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f(x) > 0, f'(0) = 0$, 证明: $z = f(x) \ln f(y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极小值的充分条件是 $f''(0) > 0$ 且 $f(0) > 1$.

(14) 已知 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = (y - x^2)dx + (x - 1)dy$, 且 $f(1, 1) = -\frac{1}{3}$, 求 $f(x, y)$ 在 $D: 0 \leq y \leq 7 - x, 0 \leq x \leq 7$ 上的最大值.

(15) 设函数 $f(x, y)$ 的全微分为 $df(x, y) = (2ax + by)dx + (2by + ax)dy$ (a, b 为常数), 且 $f(0, 0) = -3, f'_x(1, 1) = 3$. 试求:

(I) $f(x, y)$;

(II) 点 $(-1, -1)$ 到曲线 $f(x, y) = 0$ 上的点的距离的最大值.

(16) 设 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \varphi(x, y)$, $\varphi(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续, 且 $\varphi(0, 0) = 0$.

(I) 求 $f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)$;

(II) 证明: $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微, 并求全微分 $df \Big|_{(0,0)}$.

(17) 设

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

讨论 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处是否可微, 偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在点 $(0, 0)$ 处是否连续.

(18) 设中心在原点的椭圆为 $x^2 - 4xy + 5y^2 = 1$, 求该椭圆的长半轴与短半轴.

(19) 设 $x = x(y), z = z(y)$ 由方程组 $\begin{cases} F(y-x, y-z) = 0, \\ G(xy, \frac{z}{y}) = 0 \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{dx}{dy}, \frac{dz}{dy}$.

(20) 设 α, β 为正数, 且 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, 求 $f(x, y) = \frac{1}{\alpha}x^\alpha + \frac{1}{\beta}y^\beta$ 在条件 $xy = 1 (x > 0, y > 0)$ 下的最小值.

(21) 设可微函数 $f(u, v)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} = (u+v)e^{u-v}$, 且 $f(0, v) = 0$, 若 $u = x, v = x+y$, 求:

(I) $\frac{\partial f(x, x+y)}{\partial x}$;

(II) $f(u, v)$ 的极值.

(22) 设 $w = xy - z, z = z(x, y)$ 有二阶连续的偏导数, 且满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

作变换 $u = x+y, v = x-y$.

(I) 求 $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}$;

(II) 若 $\frac{\partial w(0, v)}{\partial u} = ve^{-v}, w(0, v) = \frac{v^2}{4}$, 求 $z(x, y)$ 的表达式.

(23) 设 $z = f(u, v)$ 有二阶连续偏导数, $u = x - \frac{1}{2}y, v = x + \frac{1}{2}y$, 且满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12a (a \neq 0)$.

(I) 求 $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$;

(II) 若 $\frac{\partial f(u, 0)}{\partial u} = -3u^2, f(0, v) = -v^3$, 求 $f(u, v)$ 的极值.

拓展题

一、选择题

下列()选项条件成立时,能够推出函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微, 且全微分 $df(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)} = 0$.

A. $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$

B. $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的全增量 $\Delta f = \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$

C. $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的全增量 $\Delta f = \frac{\sin[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$

D. $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的全增量 $\Delta f = [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

二、解答题

设 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内有定义, $f(0, 0) = 0$, 且

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1 + k \quad (k \text{ 为常数}).$$

- (I) 证明: $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续;
- (II) 证明: 当 $k \neq -1$ 时, $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不可微;
- (III) 证明: 当 $k = -1$ 时, $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微.



扫描二维码, 获取更多免费资料

第五章 二重积分

基础题

一、选择题

(1) 设 D 为由直线 $x+y=\frac{1}{2}$, $x+y=1$ 与两坐标轴所围的区域,

$$I_1 = \iint_D [\ln(x+y)]^9 dx dy, I_2 = \iint_D (x+y)^9 dx dy, I_3 = \iint_D [\sin(x+y)]^9 dx dy,$$

则().

- A. $I_1 \leq I_2 \leq I_3$ B. $I_1 \leq I_3 \leq I_2$ C. $I_3 \leq I_2 \leq I_1$ D. $I_3 \leq I_1 \leq I_2$

(2) 设 D 为由 $y=x^2-4$ 和 $y=0$ 所围区域, $I = \iint_D (kx+y) dx dy$, 则().

- A. $I=0$ B. $I>0$ C. $I<0$ D. I 的正负与 k 有关

(3) 设 D 是 xOy 平面上以 $A(1,1)$, $B(-1,1)$, $C(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域, D_1 是 D 在第一象限的部分, 则 $I = \iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy = ()$.

- A. 0 B. $2 \iint_{D_1} xy dx dy$
C. $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy$ D. $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy$

(4) 积分 $I = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x,y) dy + \int_2^{2\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y) dy = ()$.

- A. $\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y) dx$ B. $\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y) dx$
C. $\int_0^2 dy \int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y) dx$ D. $\int_0^2 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y) dx$

(5) 设 $D: x^2+y^2 \leq x$, 则 $\iint_D f(x,y) dx dy = ()$.

- A. $\int_0^\pi d\theta \int_0^{\cos \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ B. $\int_0^\pi d\theta \int_0^{\sin \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$
C. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ D. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

(6) 将二重积分 $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \sin \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 化为直角坐标系下的二次积分, 则 $I = ()$.

- A. $\int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^x f(x,y) dy$ B. $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy$

$$C. \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx \quad D. \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx$$

二、填空题

(1) 二重积分 $I = \int_0^1 x^2 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy =$ _____.

(2) 二重积分 $I = \int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dy =$ _____.

(3) $I = \int_0^1 \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx \int_{\arctan x}^{\frac{\pi}{4}} \csc 2y dy =$ _____.

(4) 设 $f(t) = \int_0^t dx \int_x^t e^{-(x-y)^2} dy (t \geq 0)$, 则 $f''(1) =$ _____.

(5) 设 $D: x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$, 如果 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续且取正值, 则二重积分 $I = \iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} dx dy =$ _____.

(6) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x) dx = A$, 则 $I = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy =$ _____.

(7) 设 $D: x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$, 则 $I = \iint_D \frac{1+x-y}{1+x^2+y^2} dx dy =$ _____.

(8) 设 $D: -1 \leq x \leq 0, 1 - \sqrt{1-x^2} \leq y \leq -x$, 则 $I = \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2} \sqrt{4-x^2-y^2}} =$ _____.

(9) 设 $D: 2x \leq x^2 + y^2, 0 \leq y \leq x \leq 2$, 则 $I = \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}} =$ _____.

(10) 设 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\}$, 则 $\iint_D e^{\frac{x}{1+y}} dx dy =$ _____.

(11) 设 $D: x^2 + y^2 \leq 1$, 则 $I = \iint_D \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \right) dx dy =$ _____.

(12) 设区域 D 由 $x = -\sqrt{2y-y^2}, x = -2, y = 0, y = 2$ 所围, 则 $I = \iint_D y dx dy =$ _____.

(13) 设 $D: x^2 + y^2 \leq 2x$, 则 $I = \iint_D (2x + 3y) dx dy =$ _____.

(14) 设 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq t\}$, 则 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^2} \iint_D e^{(x-y)^2} \cos(x+y)^2 dx dy =$ _____.

三、解答题

(1) 计算下列二重积分.

(I) 设 D 由 $x-y=0, x+y=0$ 及 $x=1$ 所围, 求 $I = \iint_D xy(x-y) dx dy$;

(II) 设 D 由 $y=\sqrt{x}, y=x$ 所围, 求 $I = \iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy$;

(III) 设 D 由 $y=x^2 (x \geq 0), y=1, x=0$ 所围, 求 $I = \iint_D \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} dx dy$;

(IV) 设 $D: -1 \leq x \leq \sin y, |y| \leq \frac{\pi}{2}$, 求 $I = \iint_D x(e^{x^2 + \cos y} \sin y - 1) dx dy$.

(2) 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0\}$, 计算 $I = \iint_D xy dx dy$.

(3) 设 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x + y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$, 计算 $I = \iint_D \frac{x e^{(x+y)^2}}{x+y} dx dy$.

(4) 设 $D: x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}x, 0 \leq y \leq x$, 计算 $I = \iint_D |\sqrt{x^2 + y^2} - 1| dx dy$.

(5) 设 $D: x^2 + y^2 \leq 9$, 计算 $I = \iint_D |x^2 + y^2 - 4| dx dy$.

(6) 设 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}\}$, 计算 $I = \iint_D |x + y - 2| dx dy$.

(7) 设 $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0$, 计算 $I = \iint_D \frac{y}{(1 + x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$.

(8) 设 $D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$, 计算 $I = \iint_D [1 + x + y] dx dy$, 其中 $[1 + x + y]$ 表示不超过 $1 + x + y$

的最大整数.

(9) 设 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 计算 $I = \iint_D \max\{2x - x^2, (1 - y)^2\} dx dy$.

(10) 计算 $I = \iint_D \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) dx dy$, 其中 $D: x^2 + y^2 \leq 4$.

(11) 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}, & 1 \leq x \leq 3, \frac{\sqrt{3}}{3}x \leq y \leq x, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ D 由 $x = 3, x = 1, y = 0, y = 3$ 所

围, 计算 $I = \iint_D f(x, y) dx dy$.

(12) 计算 $I = \iint_D xy dx dy$, 其中 D 由下列双纽线所围.

(I) $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$;

(II) $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$.

综合题

一、选择题

(1) $I_1 = \iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, I_2 = \iint_D \cos(x^2 + y^2) dx dy, I_3 = \iint_D \cos(x^2 + y^2)^2 dx dy$, 其中 $D: x^2 + y^2 \leq$

1, 则().

A. $I_1 > I_2 > I_3$

B. $I_1 < I_2 < I_3$

C. $I_2 > I_1 > I_3$

D. $I_3 > I_1 > I_2$

(2) 设 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$, $I_1 = \iint_D (x^2 + y^2 \tan x) dx dy, I_2 = \iint_D (x^2 y + \tan y^2) dx dy, I_3 =$

$\iint_D (xy^2 + \sin y^2) dx dy$, 则().

- A. $I_1 < I_2 < I_3$ B. $I_1 < I_3 < I_2$ C. $I_3 < I_1 < I_2$ D. $I_3 < I_2 < I_1$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{n}\right)(n^2 + j^2)} = ()$.

- A. $\frac{\pi}{4} \ln 2$ B. $\frac{\pi}{8} \ln 2$ C. $\frac{\pi}{2} \ln 2$ D. $\pi \ln 2$

(4) 积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr = ()$.

- A. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$ B. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$
C. $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx$ D. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y) dy$

(5) 设 D 是以 $(1, 1)$ 、 $(-1, 1)$ 和 $(-1, -1)$ 为顶点的三角形区域, D_1 是 D 在第一象限的部分, 且 $f(x, y) = xy + \iint_D f(x, y) dx dy$, 其中 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则().

- A. $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy$ B. $\iint_D f(x, y) dx dy = 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy$
C. $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(y, x) dx dy$ D. $\iint_D f(x, y) dx dy = 2 \iint_{D_1} f(y, x) dx dy$

二、填空题

(1) 设 $D: 0 \leq x \leq y \leq 2\pi$, 则 $I = \iint_D |\sin(x-y)| dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ $D: -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$, 则 $I = \iint_D f(y)f(x+y) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 积分 $I = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} y \sin(1-x)^2 dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 积分 $I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\theta}{2}}^{\pi} \theta^2 e^r dr = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 交换积分顺序 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr (a > 0)$ 为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(6) 设 $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, 则 $I = \iint_D y^2 dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

(7) 曲线 $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta (a > 0)$ 所围图形的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(8) 球体 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (R > 0)$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = Rx$ 所截得含在圆柱面内的立体的体积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(9) 曲线 $ay = x^2$ 与 $x + y = 2a (a > 0)$ 所围平面区域 D 的形心坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(10) $r \leq 1$ 与 $r \leq 1 + \cos \theta$ 所围平面区域的形心坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

(1) 设 $D: |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 2$, 计算 $I = \iint_D |y - x^2| dx dy$.

(2) 设 D 是由曲线 $|x|y + |x| + y = 1$ 与 x 轴所围成的有界区域, 计算

$$I = \iint_D [2\ln(1+y) - y + x] dx dy.$$

(3) 设 $D = \{(x, y) | (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$, 计算 $I = \iint_D (2x - y^2) dx dy$.

(4) 设平面曲线 $(x+y)^3 = xy$ 在第一象限所围区域为 D , 计算

$$I = \iint_D [(x-y)^3 + 1] dx dy.$$

(5) 计算积分 $I = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{2-x} e^{(x+y)^2} (\sin^2 x + \cos^2 y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} e^{(x+y)^2} (\sin^2 x + \cos^2 y) dy$.

(6) 求极限 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^6} \int_0^t dx \int_x^t \sin(xy)^2 dy$.

(7) 设 $D = \{(\theta, r) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1\}$, 计算 $I = \iint_D r^3 e^{r^2 \cos 2\theta} \sin 2\theta d\theta dr$.

(8) 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$, 计算 $I = \iint_D \frac{xy}{1+x^2-y^2} dx dy$.

(9) 设 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$, 计算 $I = \iint_D \arcsin(2\sqrt{x-x^2}) dx dy$.

(10) 设可导函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 求极限 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^t dx \int_{-\sqrt{t^2-x^2}}^{\sqrt{t^2-x^2}} [f(\sqrt{x^2+y^2}) + 2y] dy}{t^3}$.

(11) 设 $F(t) = \begin{cases} \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq t^2 \\ x \geq 0, y \geq 0}} x \left[1 - \frac{F(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2} \right] dx dy, & t > 0, \\ 0, & t = 0 \end{cases}$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 求函数 $F(t)$ 的

表达式.

(12) 设 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有连续导数, 且 $f(t) = 2 \iint_D (x^2 + y^2) f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy + t^4$, $D: x^2 + y^2 \leq t^2$, 求 $f(t)$.

(13) 设 $f(x, y)$ 在区域 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 上连续, $f(0, 0) = 0$, 且 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微,

$$f'_y(0, 0) = 1, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} dt \int_t^{\sqrt{t}} f(t, u) du}{1 - e^{-\frac{x^4}{4}}}.$$

(14) 设 $D: x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$, $f(x, y)$ 在 D 上连续, 且

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - x + y - 1) + \iint_D f(u, v) du dv,$$

求 $f(x, y)$.

(15) 设 D 是由 $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = \sqrt{4-x^2}$ 与 $x+y=0$ 及 x 轴所围, 且位于 $x+y \geq 0$ 部分的区域, 计算 $I = \iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+2y^2} dx dy$.

(16) 设 $D = \{(x, y) \mid 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0\}$, $f(x, y)$ 在 D 上连续, 且

$$f(x, y) = \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2}) + \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{xf(x, y)}{x+y} dx dy.$$

求 $I = \iint_D f(x, y) dx dy$.

(17) 设 $f(x)$ 是连续正值函数, 且单调减少, 证明: $\frac{\int_0^1 xf^2(x) dx}{\int_0^1 xf(x) dx} \leq \frac{\int_0^1 f^2(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx}$.

(18) 设 D 为由摆线 $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$ 及 x 轴所围的平面区域, 求 D 的质心坐标.

(19) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是连续正值函数, 且 $f(x)$ 单调减少, $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, 证明: $\iint_D xf(x)f(y)[f(x)-f(y)] dx dy \leq 0$.

(20) 设 $f(u)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, $D: |x| + |y| \leq 1$, 证明: $\iint_D f(x+y) dx dy = \int_{-1}^1 f(u) du$.

(21) 设 $D: x^2 + y^2 \leq 2tx, y \geq 0 (t > 0)$, $f(u)$ 在 $u=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, 求

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^2} \iint_D f(\sqrt{x^2+y^2}) y dx dy.$$

(22) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续非负, 且单调增加, $(\bar{x}, \bar{y})$ 为 $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ 的形心, 证明: $\bar{x} \geq \frac{1}{2}(a+b)$.

拓展题

解答题

(1) 设 D 由 x 轴, 曲线 $y = f(x) (f(x) \geq 0)$, $x=0, x=a (a > 0)$ 围成, 平面图形 D 的质心(形心)的横坐标为 $\bar{x} = \frac{2}{3}a$.

(I) 记 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 证明: $F'(x) = \frac{2F(x)}{x}$;

(II) 求 $f(x)$.

(2) 设 D 是由曲线 $\begin{cases} x = 1 - \cos t, \\ y = t - \sin t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$ 与 y 轴所围平面区域, 计算

$$I = \iint_D (2x+y) dx dy.$$

(3) 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$, 计算 $I = \iint_D |2x - x^2 - y^2| dx dy$.

(4) 设平面曲线 $L: |\ln x| + |\ln y| = 1$ 所围区域为 D , 计算 $I = \iint_D (x - y + 1) dx dy$.

(5) 设在第一象限内, $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 与 $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$ 及 $x = 0, y = 0$ 所围区域为 D . 计算

$$I = \iint_D \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy.$$

第六章 微分方程及其应用

基础题

一、选择题

(1) 下列选项中(C 为任意常数), 是微分方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y} = 0$ 的通解的是().

- A. $x^2 + y^2 = C^2$ B. $x^2 - y^2 = C^2$ C. $x^2 + y^2 = C$ D. $x^2 - y^2 = C$

(2) 设 $y' + P(x)y = 0$ 的一个特解为 $y = \cos 2x$, 则该方程满足 $y(0) = 2$ 的特解为().

- A. $2\cos x$ B. $2\cos 2x$ C. $\cos 2x$ D. $\cos 2x + 1$

(3) 微分方程 $y'' + 2y' - 3y = e^{-x} + x$ 的一个特解形式为().

- A. $ae^{-x} + bx + c$ B. $axe^{-x} + x(bx + c)$
C. $axe^{-x} + bx + c$ D. $ae^x + x(bx + c)$

(4) 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是 $y' + P(x)y = 0$ 的两个不同特解, 其中 $P(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $P(x)$ 不恒为 0, 则下列结论中错误的是().

- A. $y_1(x) - y_2(x) = \text{常数}$ B. $C[y_1(x) - y_2(x)]$ 是方程的通解
C. $y_1(x) - y_2(x)$ 在任一点不为 0 D. $\frac{y_2(x)}{y_1(x)} \equiv \text{常数} (y_1(x) \neq 0)$

(5) 设 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 是微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的三个线性无关的解, $f(x) \neq 0$, 则该方程的通解为().

- A. $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_3(x)$ B. $C_1y_1(x) + (1 - 2C_1)y_2(x) + C_1y_3(x)$
C. $(C_1 - C_2)y_1(x) + C_2y_2(x) + y_3(x)$ D. $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + C_3y_3(x) (C_1 + C_2 + C_3 = 1)$

(6) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b (b \neq 0)$, $y(x)$ 为方程 $y' + ay = f(x) (a > 0)$ 的任一解, 则 $y = y(x)$ 有水平渐近线().

- A. $y = ab$ B. $y = -ab$ C. $y = \frac{b}{a}$ D. $y = \frac{a}{b}$

二、填空题

(1) 微分方程 $(y - x \sin x)dx + xdy = 0$ 的通解为_____.

(2) 微分方程 $(1 + y^2)dx + (2x - 1)ydy = 0$ 的通解为_____.

(3) $y' = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$ 满足 $y(1) = \frac{\pi}{6}$ 的特解为_____.

(4) 微分方程 $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$ 的通解为_____.

(5) 方程 $y'' + 2y' + y = xe^x$ 满足 $y(0) = 0, y'(0) = 0$ 的特解为_____.

(6) 方程 $y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x} \sin x$ 满足当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y(x) \rightarrow 0$ 的特解为_____.

(7) 方程 $(1-x^2)y'' - xy' = 0$ 满足 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 的特解为_____.

(8) 设二阶线性非齐次微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 有三个特解为 x, e^x, e^{-x} , 则该方程的通解为_____.

(9) 设二阶常系数线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 有特解 $y^* = e^{-x}(1 + xe^{2x})$, 则该方程的通解为_____.

三、解答题

(1) 求 $x^2y'' - y'^2 = 0$ 过点 $P(1,0)$, 且在点 P 与 $y = x - 1$ 相切的积分曲线.

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x) = \cos x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$, 求 $f(x)$.

(3) 设 $f(x)$ 可导, 对任何实数 x, y 满足 $f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$, 且 $f'(0) = e$, 求 $f(x)$.

(4) 求微分方程 $y''' - y' = 0$ 的一条积分曲线, 使此积分曲线在原点处有拐点, 且以直线 $y = 2x$ 为切线.

(5) 设 $f(u)$ 有二阶连续导数, $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y^2$, 求 z 的表达式.

(6) 利用变换 $u = e^x$, 求微分方程 $y'' - (2e^x + 1)y' + e^{2x}y = e^{3x}$ 的通解.

(7) 设 L 是一条平面曲线, 其上任意一点 $P(x, y) (x > 0)$ 到原点的距离恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距, 且 L 过点 $(\frac{1}{2}, 0)$, 求:

(I) 曲线 L 的方程;

(II) L 位于第一象限部分的一条切线, 使该切线与 L 以及两坐标轴所围的面积最小.

(8) 设 $\widehat{OA}$ 是连接 $O(0,0)$ 和 $A(1,1)$ 的一段向上凸的曲线弧, $P(x, y)$ 为 $\widehat{OA}$ 上任一点, 曲线弧 $\widehat{OP}$ 与有向线段 $\overline{OP}$ 所围图形的面积为 x^2 , 求曲线弧 $\widehat{OA}$ 的方程.

(9) 设 $y = y(x)$ 满足 $xy' - (2x^2 - 1)y = x^3 (x \geq 1), y(1) = a$.

(I) 求 $y(x)$;

(II) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x}$ 存在, 求曲线 $y = y(x)$ 的斜渐近线方程.

(10) 设 $f(x)$ 满足 $xf'(x) - f(x) = a(1 - \ln x) + x^2 (x > 0, a \neq 0), f(1) = 1 - a$.

(I) 求 $f(x)$ 的表达式;

(II) 若方程 $f(x) = 0$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 内有唯一实根, 求 a 的取值范围.

(11) 设 $f(x)$ 满足 $xf'(x) - 3f(x) = 2x, f(1) = \frac{1}{3}k - 1, k > 0$.

(I) 求 $f(x)$ 的表达式;

(II) 求 $f(x)$ 在 $x \in [0, \frac{1}{k}]$ 上的最小值与最大值.

综合题

一、选择题

(1) 下列方程中, 以 $y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$ (C_1, C_2, C_3 为任意常数) 为通解的是().

A. $y''' - y'' + y' - y = 0$

B. $y''' + y'' + y' - y = 0$

C. $y''' + y'' - y' - y = 0$

D. $y''' - y'' - y' - y = 0$

(2) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$, 则非齐次微分方程 $y'' + py' + qy = x$ 满足 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的特解为 $y = (\quad)$.

A. $x e^x - x - 2$

B. $x e^x - x + 2$

C. $-x e^x + x + 2$

D. $-x e^x - x + 2$

(3) 设 C 为任意常数, 则以 $y = e^{C-x^2}$ 为通解的一阶微分方程为 $(\quad)$.

A. $xy' - y \ln y = x^2 y$

B. $xy' + y \ln y = xy^2$

C. $xy' - y \ln y^2 = xy$

D. $xy' + y \ln y = xy$

(4) 设 y_1, y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的两个解, 若常数 λ, μ , 使得 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是该方程的解, $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是对应的齐次微分方程的解, 则 $(\quad)$.

A. $\lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$

B. $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$

C. $\lambda = \frac{1}{3}, \mu = \frac{2}{3}$

D. $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}$

二、填空题

(1) 微分方程 $y' = \frac{y}{x + (y+1)^2}$ (y 不为常函数) 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 微分方程 $y'' - y = \sin x$ 满足 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$ 的特解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 微分方程 $y' = \frac{y^2 - x}{2y(x+1)}$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$ 满足 $y(1) = 0$ 的特解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 微分方程 $y' \sec^2 y + \frac{x}{1+x^2} \tan y = x$ 满足 $y(0) = 0$ 的特解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(6) 微分方程 $y'' + y = x + \cos x$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(7) 微分方程 $y'' - y = \sin^2 x$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(8) 设 $f(x)$ 有连续导数, 对任意 a 满足 $f(x+a) = \int_0^{x+a} \frac{t(t^2+1)}{f(t)} dt + f(x)$, 且 $f(1) = \sqrt{2}$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(9) 设函数 $y(x)$ 满足 $y'' + 2ay' + b^2 y = 0 (a > b > 0)$, 且 $y(0) = 1, y'(0) = 1$, 则 $\int_0^{+\infty} y(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

(1) 设 $f(x)$ 满足 $f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$, 且 $f'(0)$ 存在, 求 $f'(x)$ 及 $f(x)$.

(2) 利用变量替换 $x = \sin t, y = y(t) (0 < t < \frac{\pi}{2})$ 化简方程 $(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 0$, 并求该方程的通解.

(3) 设微分方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + e^{-2x} y = e^{-3x}$.

(I) 利用变换 $t = e^{-x}$ 将微分方程化为 y 关于 t 的方程, 并求原方程的通解 $y(x)$;

(II) 若(I)中的 $y(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 1, y(0) = 1$, 求 $y(x)$.

(4) 设 $y'' + (4x + e^{2x})y'^3 = 0$.

(I) 若视 x 为因变量, y 为自变量, 化简该方程;

(II) 求该方程的通解.

(5) 设二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + ay' + by = (cx + d)e^{2x}$ 有特解 $y = 2e^x + (x^2 - 1)e^{2x}$, 求该方程的通解, 并求 a, b, c, d 的值.

(6) 设 $y(x)$ 在 $[x_0, +\infty)$ 上有一阶连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [y'(x) + y(x)] = k$, 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$.

(7) 设 $f(x), g(x)$ 满足

$$f'(x) = g(x), g(x) = \int_0^x [1 - f(t)] dt + 1, \text{ 且 } f(0) = 1,$$

求 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} [g(x) - f(x)] dx$.

(8) 设 $f'(x) = 1 + \int_0^x [-6\cos 2t - f(t)] dt$, 且 $f(0) = 1$.

计算 $I = \int_0^{\pi} \left[\frac{f(x)}{x+1} + f'(x) \ln(1+x) \right] dx$.

(9) 设 $y = y(x)$ 有一阶连续导数, $y(0) = 1$, 且满足

$$y'(x) + 3 \int_0^x y'(t) dt + 2x \int_0^1 y(xu) du + e^{-x} = 0,$$

求 $y = y(x)$.

(10) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f(x) = \int_0^x f(1-t) dt + 1$, 求 $f(x)$.

(11) 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有定义, $f'(1) = 1$, 当 $x, y \in (0, +\infty)$ 时, 满足

$$f(xy) = yf(x) + xf(y).$$

(I) 证明: $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可导, 且 $f'(x) = \frac{f(x)}{x} + 1$;

(II) 求函数 $f(x)$ 的极值.

(12) 设 $f(x)$ 满足 $f'(x) = \frac{1}{x} f(x) + x \cos x (x > 0)$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$.

(I) 求 $f(x)$ 的表达式;

(II) 若 $y = f(x)$ 在 $[0, n\pi]$ 上与 x 轴所围图形的面积为 $A_n (n = 1, 2, \dots)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{(n+1)^2}$.

(13) 设 $f(t)$ 有二阶连续导数, $f(1) = f'(1) = 1$, 在 $x > 0$ 的平面区域内, 存在函数 $u(x, y)$, 使得

$$du(x, y) = \left[\frac{y^2}{x} + xf\left(\frac{y}{x}\right) \right] dx + \left[y - xf'\left(\frac{y}{x}\right) \right] dy.$$

求 $f(t)$ 及 $f(t)$ 的极值.

(14) 设 $f(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有二阶连续导数, 记 $g(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$. 若 $g(x, y)$ 满足

$$x^3 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + x^2 y \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + xy^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = y, \text{ 且 } g(y, y) = 1, \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(x, y)} = \frac{2}{y}.$$

求 $f(t)$.

(15) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有连续导数, $f(x) > 0$, 且满足

$$(1+x^2)f'(x) + 2nxf(x) = 0 \quad (n \text{ 为大于 } 1 \text{ 的正整数}), \quad f(0) = 1,$$

(I) 求 $f(x)$;

(II) 记 S_n 为曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴之间的无界区域的面积, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{S_n}{S_{n-1}} \right)^n$.

(16) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续导数, $f(0) = 1, f'(0) = 1$, 且

$$\iint_D f''(x+y) dx dy = \iint_D [f(x+y) + (x-y)^3] dx dy.$$

其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq t-x, 0 \leq x \leq t\} \quad (0 < t \leq 1)$, 求 $f(x)$.

(17) 设 $f(x)$ 满足 $f'(x) + f(x) = e^{-x}, f(0) = 0$.

(I) 求 $y = f(x)$ 的极值与拐点;

(II) 当 $0 < x_1 < 1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) = f(x_2)$, 证明: $x_1 + x_2 > 2$.

(18) 设上凸曲线 $y = y(x) (y > 0)$ 上任一点 $M(x, y)$ 处的切线与 x 轴交于点 N , 且满足 $|OM| = |ON|, y(0) = 1, y'(x) > 0$, 求 $y = y(x)$.

(19) 设 $y = y(x)$ 是向上凸的连续曲线, 其上任一点 (x, y) 处的曲率为 $\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$, 且此曲线上点 $(0, 1)$

处的切线方程为 $y = x + 1$, 求该曲线的方程.

(20) 设曲线 $y = y(x) (y > 0)$ 在点 $(0, 2)$ 处有水平切线, 曲线上任一点 (x, y) 处的曲率

$$K = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{y}(1+y'^2)}, \quad y''(x) > 0.$$

记 $y = y(x), x = 0, x = 2$ 及 x 轴所围图形为 D , 求 $y = y(x) (x \geq 0)$, 并求 D 绕 $x = 2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

(21) (I) 设 $a(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是非负连续函数, 证明: 当且仅当 $\int_0^\infty a(t) dt$ 发散时, 微分方程 $\frac{dx}{dt} + a(t)x = 0$ 的每一个解 $x(t)$ 满足 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$;

(II) 设 $a > 0, f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续有界, 证明: 方程 $\frac{dx}{dt} + ax = f(t) (t \geq 0)$ 的所有解在 $[0, +\infty)$ 上有界.

(22) 设曲线 $y = y(x)$ 有二阶连续导数, $y''(x) > 0$, 其上任意一点 (x, y) 处的曲率 $K = \frac{1}{2y^2 \cos \alpha} (\cos \alpha > 0)$,

其中 α 为该曲线在相应点处的切线的倾角, 且该曲线在点 $(1, 1)$ 处取得极小值, 求曲线 $y = y(x)$.

(23) 设函数 $y(x)$ ($x \geq 0$) 二阶可导, 且 $y'(x) > 0, y(0) = 1$, 过曲线 $y = y(x)$ 上任一点 $P(x, y)$ 作曲线的切线及 x 轴的垂线, 上述两条直线与 x 轴所围三角形的面积记为 S_1 , 区间 $[0, x]$ 上以 $y = y(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积记为 S_2 , 且 $2S_1 - S_2 = 1$, 求曲线 $y = y(x)$.

(24) 设在第一象限内的曲线 $y = y(x)$ 满足 $y(0) = 0$, 且 $y'(x) > 0$, 曲线上任一点 $M(x, y)$ 处的切线段为 $\overline{MT}$, 点 M 到 x 轴的垂线为 $\overline{PM}$, 如图 6-1 所示, $\triangle PMT$ 的面积与曲边三角形 OPM 的面积之比恒为常数 k ($k > \frac{1}{2}$), 求 $y = y(x)$.

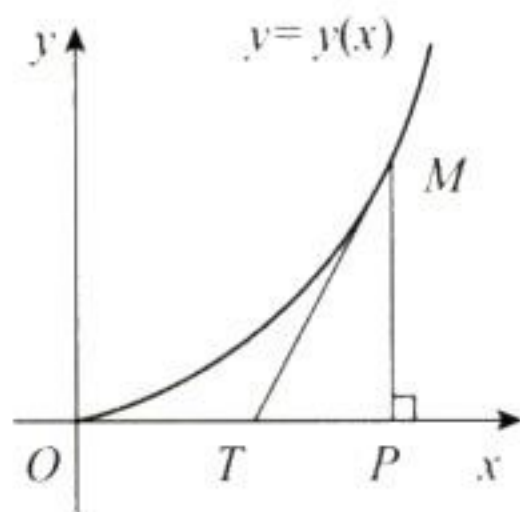


图 6-1

(25) 设 $y(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有二阶连续的导数, 点 $P(x, y)$ ($x > 0$) 为凹曲线 $y = y(x)$ 上任意一点, 沿曲线从点 $(0, 1)$ 到点 $P(x, y)$ 的弧长在数值上等于该曲线在点 $P(x, y)$ 处的切线的斜率, 且曲线在点 $(0, 1)$ 处有水平切线.

(I) 求 $y = y(x)$ 的表达式;

(II) 求曲线 $y = y(x)$ 从点 $(\ln 2, \frac{5}{4})$ 到点 $(\ln 3, \frac{5}{3})$ 的一段弧长.

(26) 一架质量为 4.5 t 的歼击机以 600 km/h 的航速开始着陆, 在减速伞的作用下滑跑 500 m 后速度减为 100 km/h, 设减速伞的阻力与飞机的速度成正比, 忽略飞机所受的其他外力, 求减速伞的阻力系数. 若保障飞机安全着陆, 跑道长度至少应为多少?

(27) 设一单位质量的质点沿 x 轴正向运动, 所受力为 $F(x) = -2\sin 2x$, 质点的初始位置为原点, 初速度为 2. 求位移函数 $x = x(t)$ (t 表示时间), 并求质点运动的最远距离.

拓展题

解答题

(1) 设环境保持恒定温度 20°C , 有一物体的温度在 10 s 内从 100°C 降到 60°C , 若物体温度下降的速度与该物体温度与环境温度之差成正比, 问此物体从温度 100°C 降到 25°C 需要多少时间?

(2) 设 $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且满足

$$f(t) = e^{1-t^2} + \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} \left[x^2 - y^2 + f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right) \right] dx dy.$$

(I) 求 $f(t)$;

(II) 求 $\lim_{t \rightarrow +\infty} [f(t)]^{\frac{1}{t^2}}$.

(3) 设 $f(t) (t \geq 0)$ 有连续导数, 且满足

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f(t - \sqrt{x^2+y^2}) dx dy + t,$$

求 $f(t)$.

(4) 设 $y_1 = x, y_2 = xu(x)$ 是微分方程 $(x^2 \ln x)y'' - xy' + y = 0 (x > 0)$ 的两个解, 若 $u(1) = 1, u(e^{-1}) = 0$, 求 $u(x)$, 并求该方程的通解.

(5) 发现一架飞机在 origin $O(0,0)$ 处沿 y 轴正向以常速度 v 飞行, 随即从点 $P_0(16,0)$ 处发射导弹追击, 且导弹方向始终指向飞机, 导弹速度为 $2v$, 如图 6-2 所示.

(I) 求导弹飞行轨迹 $y = y(x)$ 的表达式;

(II) 求飞机被击中的位置及所需时间 T .

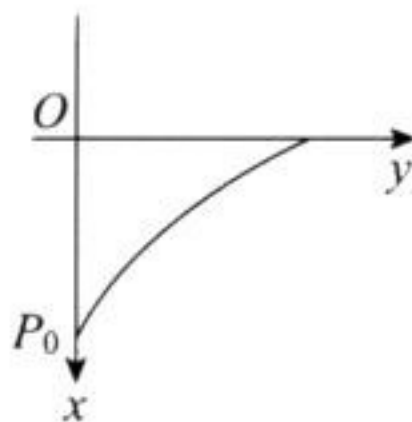


图 6-2

线性代数

第七章 行列式

基础题

一、选择题

(1) 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$, 则 D 的第 4 行各元素的余子式之和 $M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44} =$

().

- A. -28 B. 28 C. 14 D. -14

(2) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 均是 4 维列向量, 且 4 阶行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| = a, |\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3| = b$, 则行列式 $|\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1 + \beta_2| =$ ().

- A. $a + b$ B. $a - b$ C. $b - a$ D. $-(a + b)$

(3) 设 $\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均是 4 维列向量, 且 $|A| = |\beta_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 1, |B| = |\beta_2, \alpha_1, 3\alpha_2, \alpha_3| = 3$, 则 $|A + B| =$ ().

- A. 15 B. 16 C. 31 D. 32

(4) 设 3 阶矩阵 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 满足 $A^T = kA^*$ ($k > 0$), 若 $a_{11} = a_{12} = a_{13} = c > 0$, 则 $c =$ ().

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3k}$ B. $\frac{\sqrt{3}k^2}{3}$ C. $\sqrt{3}k^2$ D. $\frac{\sqrt{3}}{k^2}$

二、填空题

(1) 行列式 $\begin{vmatrix} k & 0 & -1 & 1 \\ 0 & k & 1 & -1 \\ -1 & 1 & k & 0 \\ 1 & -1 & 0 & k \end{vmatrix} =$.

(2) 若 $\begin{vmatrix} \lambda - a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - a \end{vmatrix} = 0$, 则 $\lambda =$.

(3) 行列式 $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$.

(4) 行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \quad .$

(5) 行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a & -1 \\ 4 & 3 & 2 & a+1 \end{vmatrix} = \quad .$

(6) 设 $f(x) = \begin{vmatrix} x & -2x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$, 则 x^3 的系数为 $\quad .$

(7) 设 A 是 n 阶方阵, 且 $AA^T = E$, $|A| < 0$, 则 $|A + E| = \quad .$

(8) 设 A 是 n 阶方阵, E 是 n 阶单位矩阵, 且 $A^2 = A$, $A \neq E$, 则 $|A| = \quad .$

(9) 设 A, B 均为 n 阶方阵, 且 $|A| = |B| = |A^{-1} + B| = 2$, 则 $|A + B^{-1}| = \quad .$

(10) 设 $|A| = 2$, $|B| = -2$, 其中 A, B 均为 n 阶方阵, 则 $|A^{-1}B^* - A^*B^{-1}| = \quad .$

(11) 设 3 阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = (3\alpha_1 - \alpha_2, 3\alpha_2 - 2\alpha_1, 2\alpha_3 - \alpha_1 - 2\alpha_2)$, 且 $|B| = 14$, 则 $|A| = \quad .$

(12) 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 n 阶方阵, $|A| = 1$, 且 A 的每列元素之和均为 $k (k \neq 0)$, 则 A 的代数余子式之和 $A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n} = \quad .$

三、解答题

(1) 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} b & a & a & \cdots & a \\ a & b & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & b \end{vmatrix} .$

(2) 证明: $D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x + a_1 \end{vmatrix} = x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i} .$

(3) 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} .$

(4) 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n \\ b_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

其中 a_i, b_i 均不为 0.

综合题

一、选择题

(1) 设 A 是 3 阶可逆矩阵, A^{-1} 的特征值为 3, 2, 1, 则 $|A|$ 的代数余子式之和 $A_{11} + A_{22} + A_{33} = (\quad)$.

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

(2) $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 的所有代数余子式 A_{ij} 之和 $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 A_{ij} = (\quad)$.

- A. 4 B. -4 C. 1 D. -1

(3) 设 A 是 3 阶方阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, $|A| = \frac{1}{2}$, 则 $|(2A)^{-1} - 2A^*| = (\quad)$.

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{4}$

(4) 设 $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 $(-1, 2)$ 内存在水平切线的条数为 $(\quad)$.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题

(1) 设 A, B 均为 n 阶方阵, $|A| = 6, |B| = 1, C = \begin{pmatrix} A & 3A^* \\ (\frac{B}{2})^{-1} & O \end{pmatrix}$, 则 $|C| = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 当 $m > n$ 时, $|AB| = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 设 A, B 均为 3 阶方阵, 满足 $A^2B - A - B = E$, 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 设 A 是 3 阶方阵, 且满足 $|A - E| = |A + 2E| = |2A + 3E| = 0$, 则 $|2A - 3E| =$ _____.

(5) 设 A 是 3 阶方阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 且 $A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2, A\alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_3 = \alpha_3 + \alpha_1$, 则 $|A| =$ _____.

(6) 设 $\alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 4 维列向量, $A = (\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 且 $|A| = 2, |B| = 1$, 则 $|A^{-1} + B^{-1}| =$ _____.

(7) 设 n 阶行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$, 则 $|A|$ 的第 k 行元素的代数余子式之和 $A_{k1} +$

$A_{k2} + \cdots + A_{kn} =$ _____.

三、解答题

(1) 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} b - a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ -a_2a_1 & b - a_2^2 & \cdots & -a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & b - a_n^2 \end{vmatrix}$.

(2) 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a + b_1 & a & \cdots & a \\ a & a + b_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & a + b_n \end{vmatrix} \quad (b_i \neq 0)$.

(3) 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$.

(4) 计算 $D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a \end{vmatrix} \quad (a^2 - 4bc \geq 0)$.

拓展题

解答题

(1) 设矩阵 A 为 3 阶非零实矩阵, $A^T = A^*$, 且 $|E + A| = |E - A| = 0$, 计算行列式 $|A^2 - A - 3E|$.

(2) 设 A 为 3 阶非零实矩阵, 且 $A^T = kA^*$ (k 为非零常数).

(I) 证明: A 是可逆矩阵;

(II) 求行列式 $|A^{-1}| + |(A^*)^{-1}|$.

(3) 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $1, -1, 2$, 计算行列式 $|A| \cdot \begin{vmatrix} O & A^* \\ -2E & A \end{vmatrix}$.

(4) 设行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 1$, A_{ij} 是 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式, 求 $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 A_{ij}$.

第八章 矩 阵

基础题

一、选择题

(1) 设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, $B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} + a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + a_{33} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} + a_{13} & a_{13} \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $B = (\quad)$.

A. AQP B. PAQ C. QAP D. APQ

(2) 设 A 是 $n(n \geq 3)$ 阶可逆方阵, 下列结论正确的是().

① $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$;

② $(kA)^* = k^{n-1}A^* (k \neq 0)$;

③ $(A^*)^T = (A^T)^*$;

④ $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$.

A. ①②

B. ②③

C. ③④

D. ①②③④

(3) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, 则行列式 $|[(E-A)^*]^{-1}| = (\quad)$.

A. $\frac{1}{4}$

B. $-\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{16}$

D. $-\frac{1}{16}$

(4) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & k & 3 \\ k-1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & k \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 等价, 则().

A. $k = 1$

B. $k \neq 1$

C. $k = -1$

D. $k \neq -1$

(5) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, B 是 3 阶矩阵, 且 $r(B) = 2, r(AB) = 1$, A^* 与 B^* 分别是 A 与 B 的伴随矩

阵, 则正确的是().

A. $r \begin{pmatrix} A^* & O \\ A & B \end{pmatrix} = 3$

B. $r \begin{pmatrix} A & O \\ O & B^* \end{pmatrix} = 3$

C. $r \begin{pmatrix} A^* & B \\ O & A \end{pmatrix} = 3$

D. $r \begin{pmatrix} A & B^* \\ O & B \end{pmatrix} = 3$

(6) 设 A, B 分别为 $m \times n, n \times s$ 矩阵, 且 $AB = C$, 则正确的是().

A. 若 $r(C) = m$, 则 $r(A) \leq m$

B. 若 $r(C) = s$, 则 $r(B) \leq s$

C. 若 $r(A) = n$, 则 $r(B) \leq r(C)$ D. 若 $r(A) = n$, 则 $r(B) = r(C)$

二、填空题

(1) 设 $\alpha = (1, 2, 3)^T, \beta = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)^T, A = \alpha\beta^T$, 则 $A^n =$ _____.(2) 设 $\alpha = (2, -1, 3)^T, \beta = (1, 2, 0)^T, A = \alpha\beta^T, E$ 是 3 阶单位矩阵, 则 $(A + E)^n =$ _____.(3) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^n =$ _____.(4) 设 $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = P^{-1}BP$, 则 $A^3 - 2B^2 =$ _____.(5) 设 A 是 n 阶方阵, 且 $|A| = 2$, 将 A 的第 i 行与第 j 行互换得到 B , 则行列式 $|B^{-1}B^*B^T| =$ _____.(6) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, 则 $r(A) =$ _____.(7) 若 $A^n = O, n$ 为正整数, 则 $(E - A)^{-1} =$ _____.(8) 若 $A^n = E, n$ 为正整数, 则 $(A^*)^n =$ _____.(9) 设方阵 A 满足 $A^2 - 3A - 2E = O$, 则 $A^{-1} =$ _____.(10) 设方阵 A 满足 $A^2 = A$, 则 $(A + E)^{-1} =$ _____.(11) 设 A 是 n 阶可逆矩阵, 将 A 的第 i 行和第 j 行交换得 B , 则行列式 $|AB^{-1}| =$ _____.(12) 设存在 3 阶矩阵 A , 对任意的 x, y, z 有 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$, 则 $A =$ _____.(13) 设 $\alpha = (k, 0, \dots, 0, k)^T (k \neq 0)$, 且 $A = E - \alpha\alpha^T, A^{-1} = E + \frac{1}{k}\alpha\alpha^T$, 则 $k =$ _____.

三、解答题

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a & 1 & b \\ 4 & c & 6 \end{pmatrix}$, 且 $BA = O, B$ 是 3 阶方阵, $r(B) > 1$, 求 A^n .(2) 设 α, β 是 n 维列向量, 且 $\alpha^T\beta = 2$, 证明: $A = E + \alpha\beta^T$ 可逆, 并求 A^{-1} .(3) 设 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $(A^*)^{-1}$.

(4) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 证明: $A^2 = 5A - 4E$, 并求 A^{-1} .

(5) 设方阵 A, B 满足 $|B| \neq 0, (A - E)^{-1} = (B - E)^T$, 求 A^{-1} (用 B 表示).

(6) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = (E + A)^{-1}(E - A)$, 求 $[(E + B)^2]^{-1}$.

(7) 已知方阵 $A, B, (A + B)$ 均可逆, 求 $(A^{-1} + B^{-1})^{-1}$.

(8) 设 $AB = BA, A$ 可逆, 证明: $A^{-1}B = BA^{-1}$.

(9) 设 A, B 都是 n 阶方阵, 且 $A^2 = A, B^2 = B, (A + B)^2 = A + B$, 证明: $AB = BA$.

(10) 设 A 为 $2n + 1$ 阶正交矩阵, 且 $|A| = 1$, 证明: $A - E$ 不可逆.

(11) 设 n 阶方阵 A, B , 满足 $A^2 = E, B^2 = E$, 且 $|A| + |B| = 0$, 证明: $A + B$ 不可逆.

(12) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, AB + E = A^2 + B$, 求 B .

(13) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 且 $(A^T B^{-1})^T - A(B^T A)^{-1} = (E - B^{-1})^T$, 求 B .

(14) 设 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}, A^{-1}BA = 6A + BA$, 求 B .

(15) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, 满足 $AXB = C$, 求矩阵 X .

(16) 设矩阵 A 满足 $A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} A$, 求矩阵 A .

综合题

一、选择题

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 1 & k+1 & 1 \\ k & 2 & 1 \end{pmatrix}, B$ 是 3 阶非零矩阵, 且 $AB = O$, 则().

A. 当 $k = 1$ 时, $r(\mathbf{B}) = 1$ B. 当 $k = -3$ 时, $r(\mathbf{B}) = 1$ C. 当 $k = 1$ 时, $r(\mathbf{B}) = 2$ D. 当 $k = -3$ 时, $r(\mathbf{B}) = 2$

(2) 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ (a, b 均不为 0), 且 $r(\mathbf{A}^*) = 1$, 则必有().

A. $a = b$ B. $a = b$ 或 $a + 2b \neq 0$ C. $a + 2b = 0$ D. $a \neq b$ 且 $a + 2b \neq 0$

(3) 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 且 $\mathbf{P}^n \mathbf{A} \mathbf{P}^m = \mathbf{A}$, 则正整数 n, m 可以为().

A. $n = m = 4$ B. $n = 5, m = 4$ C. $n = 4, m = 5$ D. $n = m = 5$

(4) 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 均为 n 阶矩阵, $\mathbf{E}$ 为 n 阶单位矩阵, 矩阵 $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{E} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{AB} \\ \mathbf{E} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$ 的秩分别为 r_1, r_2, r_3 ,

则正确的是().

A. $r_2 \geq r_1 \geq r_3$ B. $r_3 \geq r_1 = r_2$ C. $r_1 \geq r_2 \geq r_3$ D. $r_3 \geq r_2 \geq r_1$

(5) 下列命题中, 正确的是().

① 若 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 均为 n 阶矩阵, 且 $\mathbf{ABC} = \mathbf{E}$, 则 $\mathbf{BCA} = \mathbf{CAB}$;② 若 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 均为 n 阶不可逆矩阵, 则 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 必不可逆;③ 若 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 均为 n 阶不可逆矩阵, 则 $\mathbf{AB}$ 必不可逆;④ 若 n 阶矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 满足 $(\mathbf{AB})^2 = \mathbf{E}$, 则 $(\mathbf{BA})^2 = \mathbf{E}$.

A. ①②③

B. ①③④

C. ②③④

D. ①②④

二、填空题

(1) 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 是 n 阶方阵, $|\mathbf{A}| = 2, |\mathbf{B}| = 3, \mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*$ 分别是 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 的伴随矩阵, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{C}$ 的伴随矩阵 $\mathbf{C}^* =$ _____.

(2) 设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶可逆矩阵, $\mathbf{A}$ 的每行元素之和均为 k , 则 $\mathbf{A}^{-1}$ 的每行元素之和均为 _____.

(3) 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{A}^n (n \geq 1) =$ _____.

(4) 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $(\mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1} =$ _____.

三、解答题

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 求 $A^n (n \geq 1)$.

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 证明: $A^2 + 4A = O$, 并求 $(E + A)^{-1}$.

(3) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 证明: $A^n = A^{n-2} + A^2 - E (n \geq 3)$, 并计算 A^{100} .

(4) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, 证明: A 可逆, 并将 A 表示为初等矩阵的乘积.

(5) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 且 $A^*BA = 2BA - 8E$, 求 B .

(6) 设矩阵 X 满足 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 X .

(7) 设分块矩阵 $P = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ 为正交矩阵, A, B 分别是 m 阶和 n 阶方阵, 证明: A 与 B 是正交矩阵.

拓展题

解答题

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 若矩阵 X 满足 $AX + 2B = BA + 2X$, 求 X^2 .

(2) 设列向量 $\alpha = (1, 2, 1)^T$, $\beta = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right)^T$, $\gamma = (0, 0, 8)^T$, $A = \alpha\beta^T$, $B = \beta^T\alpha$, 且 $2B^2A^2x = A^4x +$

$B^4x + \gamma$, 求 x .

第九章 向 量

基础题

一、选择题

(1) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则().

A. α_1 可由 α_2, α_3 线性表示

B. α_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示

C. α_1 可由 α_1, α_3 线性表示

D. α_1 可由 α_1, α_2 线性表示

(2) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关等价于().

A. 存在一组不全为 0 的数, 使其线性组合不为 0

B. 存在一个向量不能由其他向量线性表示

C. 任何一个向量均不能由其他向量线性表示

D. 其中任意两个向量线性无关

(3) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则下列向量组线性无关的是().

A. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$

B. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1, \alpha_4 - \alpha_1$

C. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1, \alpha_4 - \alpha_1$

D. $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$

(4) 设向量组 (I) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$, (II) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, 则下列命题

① 若向量组 (I) 可由 (II) 线性表示, 且 $s < t$, 则必有 (I) 线性相关;

② 若向量组 (II) 可由 (I) 线性表示, 且 $s < t$, 则必有 (I) 线性相关;

③ 若向量组 (I) 可由 (II) 线性表示, 且 (I) 线性无关, 则必有 $s \geq t$;

④ 若向量组 (II) 可由 (I) 线性表示, 且 (I) 线性无关, 则必有 $s \geq t$,

正确的是().

A. ①④

B. ①③

C. ②③

D. ②④

(5) 设 $\alpha_1 = (a_1, a_2, a_3)^T, \alpha_2 = (b_1, b_2, b_3)^T, \alpha_3 = (c_1, c_2, c_3)^T$, 其中 $a_i^2 + b_i^2 \neq 0 (i = 1, 2, 3)$, 则三条直线 $a_i x + b_i y + c_i = 0 (i = 1, 2, 3)$ 恰好仅交于一点的充分必要条件是().

A. $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$

B. $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$

C. $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2)$

D. $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2) = 2$

(6) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维向量, 则对任意常数 k 和 μ , 向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + \mu\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的().

A. 充分必要条件

B. 充分非必要条件

C. 必要非充分条件

D. 既非充分又非必要条件

(7) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ c_3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ c_4 \end{pmatrix}$, 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数, 则().

- A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关
B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关
C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关
D. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关

(8) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性无关的是().

- A. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$
B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
C. $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3$
D. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$

二、填空题

(1) 已知向量 $\alpha_1 = (1, 2, 3)^T, \alpha_2 = (2, -1, 1)^T, \alpha_3 = (-2, k, 4)^T$ 线性相关, 则 $k =$ _____.

(2) 设向量组 (I) $\alpha_1 = (1, 1, 2)^T, \alpha_2 = (2, 3, 3)^T$; (II) $\beta_1 = (2, 3, 5)^T, \beta_2 = (-1, 0, 1)^T$, 则既可由 (I) 线性表示, 又可由 (II) 线性表示的非零列向量为 _____.

三、解答题

(1) 设向量组 $\alpha_1 = (0, 4, 2)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (-2, 4, 3)^T, \alpha_4 = (-1, 1, 1)^T$, 求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组, 并将其余向量用极大线性无关组线性表示.

(2) 设 $\alpha_1 = (1, 0, 2, 3)^T, \alpha_2 = (1, 1, 3, 5)^T, \alpha_3 = (1, -1, a, 1)^T, \beta = (1, b, 4, 7)^T$, 问: 当 a, b 为何值时, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示? a, b 为何值时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示? 写出表达式.

(3) 设向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -3)^T, \alpha_2 = (3, 0, 1)^T, \alpha_3 = (9, 6, -7)^T$ 与向量组 $\beta_1 = (0, 1, -1)^T, \beta_2 = (k, 2, 1)^T, \beta_3 = (\mu, 1, 0)^T$ 有相同的秩, 且 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 求 k, μ 的值.

(4) 设有向量组 (I) $\alpha_1 = (2, 3, 5)^T, \alpha_2 = (0, 1, 2)^T, \alpha_3 = (1, 0, 0)^T$, (II) $\beta_1 = (3, 1, 2)^T, \beta_2 = (1, 1, 1)^T, \beta_3 = (1, 1, -1)^T, \beta_4 = (2, 1, 0)^T$, 证明: 向量组 (I) 与 (II) 等价.

(5) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 线性无关, 且可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 线性表示, 证明: 这两个向量组等价.

(6) 设向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, (II) \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r, r(I) = r(II)$, 且向量组 (I) 可由 (II) 线性表示, 证明: 向量组 (I) 与 (II) 等价.

(7) 设向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, (II) \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, (III) \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$, 且 $r(I) = r(II) = 3, r(III) = 4$, 证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 的秩为 4.

(8) 设 A 是 3 阶方阵, α_1, α_2 为 A 的分别属于特征值 $-2, 1$ 的特征向量, 且 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$, 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

(9) 设矩阵 $A_{5 \times 4}$ 的秩为 2, $\alpha_1 = (1, 1, 2, 3)^T, \alpha_2 = (-1, 1, 4, -1)^T, \alpha_3 = (5, -1, -8, 9)^T$ 是方程组 $Ax = 0$ 的解向量, 求 $Ax = 0$ 的基础解系, 并将其正交单位化.

综合题

一、选择题

(1) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是 n 维列向量, 向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, (II) $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_r$, 则正确的是().

- A. 若 (I) 线性无关, 则 (II) 线性无关
B. 若 (II) 线性相关, 则 (I) 线性相关
C. 若 (II) 线性无关, 则 (I) 线性无关
D. (I) 与 (II) 具有相同的线性相关性

(2) 设三维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 记 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A_{3 \times 3}$, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)B_{3 \times 3}$, 则().

- A. 存在矩阵 $A_{3 \times 3}$, 使得 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关
B. 不存在矩阵 $A_{3 \times 3}$, 使得 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关
C. 存在矩阵 $B_{3 \times 3}$, 使得 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 线性无关
D. 不存在矩阵 $B_{3 \times 3}$, 使得 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 线性相关

(3) 设向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 满足 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$, k_1, k_2, k_3 为常数, 且 $k_1 k_3 \neq 0$, 则().

- A. α_1 与 α_3 等价
B. α_1, α_2 与 α_1, α_3 等价
C. α_1, α_2 与 α_2, α_3 等价
D. α_1, α_3 与 α_2, α_3 等价

(4) 设 n 维向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ ($k < n$) 线性无关, 则 n 维向量组 (II) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 也线性无关的充分必要条件是().

- A. $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 线性表示
B. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 线性表示
C. 向量组 (I) 与向量组 (II) 等价
D. 矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ 与 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ 等价

(5) 设 4 维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, β_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 为非零列向量, 且 β_i 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均正交, 则 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) =$ ().

- A. 1
B. 2
C. 3
D. 4

(6) 设 A, B 均是 $m \times n$ 矩阵, 则 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解的充分必要条件是().

- A. A, B 的列向量组等价
B. A, B 的行向量组等价
C. A, B 是等价矩阵
D. $A^T x = 0$ 与 $B^T x = 0$ 同解

(7) 设 A, B 为 n 阶矩阵, P, Q 为 n 阶可逆矩阵, 下列选项错误的是().

- A. 若 $A = BQ$, 则 B 的列向量组与 A 的列向量组等价
B. 若 $A = PB$, 则 B 的行向量组与 A 的行向量组等价
C. 若 $A = PBQ$, 则矩阵 A 与 B 等价
D. 若 $A = PBQ$, 则 B 的行(列)向量组与 A 的行(列)向量组等价

(8) 设 A, B 分别为 $m \times n$ 与 $n \times s$ 矩阵, 且 $r(A) = n$, 则正确的是().

- A. AB 的列向量组与 B 的列向量组等价
B. AB 的行向量组与 B 的行向量组等价
C. AB 的列向量组与 A 的列向量组等价
D. AB 的行向量组与 A 的行向量组等价

二、填空题

设向量组 $\alpha_1 = (1, k+2, 3)^T, \alpha_2 = (2, -1, 1)^T, \alpha_3 = (k-1, 1, -1)^T$ 线性相关, 但任意两个向量线性无关, 则 $k =$ _____.

三、解答题

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 求:

(I) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组;

(II) 可逆矩阵 $P_{3 \times 3}, Q_{4 \times 4}$, 使得 $PAQ = B$.

(2) 设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T, \beta_2 = (1, 2, 3)^T, \beta_3 = (3, 4, a)^T$ 线性表示, 求 a 的值, 并将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

(3) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 其中 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (1, 1, 2)^T, \alpha_3 = (1, 2, a)^T, B = (\beta_1, \beta_2)$, 其中 $\beta_1 = (-1, 2, 1)^T, \beta_2 = (1, 0, b)^T$. 问:

(I) 当 a, b 为何值时, β_1, β_2 不能同时由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示?

(II) 当 a, b 为何值时, β_1, β_2 可同时由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示? 并求表达式.

(4) 设 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k (k < n)$ 线性无关, 且 $\alpha_{k+1} = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_k \alpha_k, \lambda_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, k$, 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$ 中任何 k 个向量都线性无关.

(5) 设矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \alpha_i$ 为 n 维列向量, $i = 1, 2, \dots, m$, 且 $m \leq n$, 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关的充分必要条件是 $|A^T A| \neq 0$.

(6) 设 A 是 3 阶方阵, A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, 对应的特征向量分别为 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (1, 2, 4)^T, \alpha_3 = (1, 3, 9)^T$, 另一向量 $\beta = (1, 1, 3)^T$.

(I) 将 β 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示;

(II) 求 $A^n \beta (n \text{ 为正整数})$.

(7) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, α_1 与 α_2 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个不同解.

(I) 证明: $\alpha_1, \alpha_1 - \alpha_2$ 线性无关;

(II) 若 β 是 $Ax = 0$ 的一个非零解向量, $r(A) = n - 1$, 证明: $\beta, \alpha_1, \alpha_2$ 线性相关.

(8) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是方程组 $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 7x_1 - 2x_3 = -1 \end{cases}$ 的解向量, 证明: $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$ 线性相关.

(9) 设 A 是 3 阶矩阵, $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$ 是 3 维非零列向量, 且 $A\alpha_i = i\alpha_i (i = 1, 2, 3), \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 证明: $\alpha, A\alpha, A^2\alpha$ 线性无关.

(10) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & a & 2 & 5a \end{pmatrix}$ 的秩为 2.

(I) 求 a 的值;

(II) 求 A 的列向量组的一个极大线性无关组 α_1, α_2 , 并求矩阵 H , 使得 $A = GH$, 其中 $G = (\alpha_1, \alpha_2)$.

拓展题

解答题

(1) 设向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 2)^T, \alpha_2 = (3, a+4, 2a+5, a+7)^T, \alpha_3 = (4, 6, 8, 10)^T, \alpha_4 = (2, 3, 2a+3, 5)^T, \alpha = (0, 1, 3, b)^T$.

(I) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩及其一个极大线性无关组;

(II) 若 α 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示, 求 a, b 的取值.

(2) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \alpha_1 = (0, 3, c)^T, \alpha_2 = (a, 2, 1)^T, \alpha_3 = (b, 1, 0)^T, B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \beta_1 = (1, 2, -3)^T, \beta_2 = (3, 0, 1)^T, \beta_3 = (9, 6, -7)^T$, 且 $r(A) = r(B), \alpha_2, \alpha_3$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示.

(I) 求 a, b, c 的值;

(II) 若 $BX = A$, 求矩阵 X .

第十章 线性方程组

基础题

一、选择题

(1) 已知 η_1, η_2 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个不同解, ξ_1, ξ_2 是对应齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, k_1, k_2 为任意常数, 则 $Ax = b$ 的通解为().

- A. $k_1\xi_1 + k_2(\xi_1 + \xi_2) + \frac{\eta_1 - \eta_2}{2}$ B. $k_1\xi_1 + k_2(\xi_1 - \xi_2) + \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}$
C. $k_1\xi_1 + k_2(\eta_1 + \eta_2) + \frac{\eta_1 - \eta_2}{2}$ D. $k_1\xi_1 + k_2(\eta_1 - \eta_2) + \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}$

(2) 设 A 是 $n(n \geq 3)$ 阶矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 线性方程组 $AX = 0$ 有两个线性无关的解, 则().

- A. $AX = 0$ 与 $A^*X = 0$ 同解 B. $A^*X = 0$ 的解均是 $AX = 0$ 的解
C. $AX = 0$ 的解均是 $A^*X = 0$ 的解 D. $AX = 0$ 与 $A^*X = 0$ 没有非零公共解

(3) 设 A 是 n 阶矩阵, 对方程组 (I) $Ax = 0$ 和 (II) $A^T Ax = 0$, 必有().

- A. (II) 的解是 (I) 的解, (I) 的解也是 (II) 的解
B. (II) 的解是 (I) 的解, 但 (I) 的解不是 (II) 的解
C. (I) 的解不是 (II) 的解, (II) 的解也不是 (I) 的解
D. (I) 的解是 (II) 的解, 但 (II) 的解不是 (I) 的解

(4) 设 A 是 n 阶矩阵, 若对任意的 n 维列向量 α , 有 $A^*\alpha = 0$, 则 $Ax = 0$ 的基础解系所含解向量的个数 k 满足().

- A. $k = 0$ B. $k = 1$ C. $k > 1$ D. $k = n$

(5) 设方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + \lambda^2 x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$ 的系数矩阵为 A , 若存在 3 阶矩阵 $B \neq O$, 使得 $AB = O$, 则必有

().

- A. $\lambda = -2$ 且 $|B| = 0$ B. $\lambda = -2$ 且 $|B| \neq 0$
C. $\lambda = 1$ 且 $|B| = 0$ D. $\lambda = 1$ 且 $|B| \neq 0$

(6) 设方程组 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = b_1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = b_2, \\ 2x_1 + kx_2 + 3x_3 = b_3 \end{cases}$ 有解, 则().

- A. 当 $k \neq -5$ 时, $(b_1, b_2, b_3)^T$ 为任意非零列向量 B. 当 $k = -5$ 时, $(b_1, b_2, b_3)^T$ 为任意列向量

C. 当 $k = -5$ 时, $b_1 + b_3 = 4b_2$ D. 当 $k \neq -5$ 时, $b_1 + b_3 = 4b_2$ (7) 设矩阵 $A_{m \times n}, B_{n \times m}$, 则().A. 当 $m > n$ 时, AB 必可逆B. 当 $m > n$ 时, 必有 $|AB| = 0$ C. 当 $n > m$ 时, 必有 $r(AB) < m$ D. 当 $n > m$ 时, $ABx = 0$ 必有唯一解(8) 设矩阵 $A_{m \times n}, B_{n \times m}$ 满足 $AB = E$, 其中 E 是单位矩阵, α 与 β 为非零列向量, 则正确的是().A. 方程组 $AX = \alpha$ 有唯一解, 方程组 $BX = \beta$ 有唯一解B. 方程组 $AX = \alpha$ 有无穷多解, 方程组 $BX = \beta$ 有无穷多解C. 方程组 $AX = 0$ 仅有零解, 方程组 $BX = \beta$ 有解D. 方程组 $AX = \alpha$ 有解, 方程组 $BX = 0$ 仅有零解

二、填空题

(1) 设方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + (k+4)x_2 - 5x_3 = 6, \\ -x_1 - 2x_2 + kx_3 = -3, \end{cases}$$
 有无穷多解, 则 $k =$ _____.(2) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}$, $\beta_1 = (1, 3, 4)^T$, $\beta_2 = (0, 1, 2)^T$, 若方程组 $AX = \beta_1$ 有解, 且 $AX = \beta_2$ 无解, 则 $a =$ _____.(3) 设 4 阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 其中 α_1, α_2 线性无关, 若 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3$, $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4$, $\beta = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4$, 则方程组 $AX = \beta$ 的通解为 _____.

三、解答题

(1) 求方程组
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -4, \\ x_1 + x_3 - x_4 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 7x_1 + 7x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$$
 的通解.(2) 设方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1, \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1, \end{cases}$$
 问: 当 λ 为何值时, 方程组无解、有唯一解、有无穷多解? 当有

无穷多解时, 求其通解.

(3) 设有方程组 ① $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$ 与 ② $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$ 求:

(I) 方程组 ① 与 ② 的基础解系;

(II) 方程组 ① 与 ② 的非零公共解.

(4) 设有方程组 (I) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \end{cases}$ (II) $Ax = 0$, 其中 (II) 的基础解系为

$$\alpha_1 = (-1, 2, 2, 1)^T, \alpha_2 = (0, -1, -1, 0)^T,$$

求方程组(I)与(II)的非零公共解.

(5) 设有方程组:

$$\textcircled{1} \begin{cases} x_1 - x_4 = -2, \\ x_2 - x_4 = -4, \\ -4x_2 - x_3 + 6x_4 = 21, \end{cases} \quad \textcircled{2} \begin{cases} x_1 + ax_2 - x_3 - x_4 = -5, \\ bx_2 - x_3 - 2x_4 = -11, \\ x_3 - 2x_4 = -c + 1. \end{cases}$$

(I) 求方程组①的通解;

(II) 当 a, b, c 为何值时, 方程组①与②同解?

(6) 设 n 阶矩阵 A 满足 $|A| = 0$, A_{ij} 为 $|A|$ 的元素 a_{ij} 对应的代数余子式, 且 $A_{11} \neq 0$, 求方程组 $A^*x = 0$ 的基础解系和通解.

(7) 已知 4×3 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解为 $(1, 2, -1)^T + k(1, -2, 3)^T$, k 为任意常数, 令 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta + \alpha_3)$, 求方程组 $By = \alpha_1 - \alpha_2$ 的通解.

(8) 设 A 是 5×4 矩阵, $r(A) = 2$, 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的三个解向量, 且 $\alpha_1 + \alpha_2 = (4, 6, -8, 4)^T$, $\alpha_3 = (1, 2, -1, 1)^T$, 又 $(0, 1, -3, 0)^T$ 是 $Ax = 0$ 的解, 求 $Ax = b$ 的通解.

(9) 设 A, B 均为 3 阶矩阵, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $r(B) = 2$, $r(AB) = 1$. 求 a 的值, 并求方程组 $Ax = 0$ 的

通解.

综合题

一、选择题

(1) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, $m < n$, 且 A 的行向量组线性无关, b_1, b_2 分别为 m 维、 n 维非零列向量, 则下列选项错误的是().

- A. $A^T x = 0$ 只有零解
B. $A^T A x = 0$ 必有非零解
C. $Ax = b_1$ 必有无穷多个解
D. $A^T = b_2$ 必有唯一解

(2) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解的充分必要条件是().

- A. $r(A \vdots b) < n$
B. $Ax = 0$ 有非零解
C. $Ax = b$ 有两个不同解
D. A 的列向量组线性相关

(3) 设 $A^T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$ 是 $n \times (n-1)$ 矩阵, $r(A^T) = n-1$, β_1, β_2 是与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ 都正交的两个不同的 n 维列向量, k 是任意常数, 则方程组 $Ax = 0$ 的通解为().

- A. $k(\beta_1 - \beta_2)$
B. $k(\beta_1 + \beta_2)$
C. $k\beta_1$
D. $k\beta_2$

(4) 设向量组 $\alpha_1 = (1, 1, a)^T$, $\alpha_2 = (1, -2, b)^T$, $\alpha_3 = (-2, 1, c)^T$ 的秩为 a , 若 $\beta = (1, 2, 0)^T$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表示法不唯一, 则().

- A. $a = 2, b = 8, c = -10$
B. $a = 2, b = 8, c = 10$

C. $a = 1, b = -8, c = 10$

D. $a = 1, b = -8, c = -10$

(5) 设 n 维实列向量 α 满足 $\alpha^T \alpha = 2$, A, B 均为 n 阶矩阵, E 为 n 阶单位矩阵, 且 $A(E - 2\alpha\alpha^T) = B$, 则().

A. 方程组 $BX = 0$ 与方程组 $(E - 2\alpha\alpha^T)X = 0$ 同解

B. 方程组 $B^T X = 0$ 与方程组 $(E - 2\alpha\alpha^T)X = 0$ 同解

C. 方程组 $BX = 0$ 与方程组 $AX = 0$ 同解

D. 方程组 $B^T X = 0$ 与方程组 $A^T X = 0$ 同解

(6) 设 A 为 n 阶矩阵, 下列命题中正确的是().

① $A^n X = 0$ 与 $A^{n-1} X = 0$ 同解;

② $A^{n-1} X = 0$ 的解不一定是 $A^n X = 0$ 的解;

③ $A^n X = 0$ 与 $(A^T)^n A^n X = 0$ 同解;

④ $(A^T)^n A^n X = 0$ 的解不一定是 $A^n X = 0$ 的解.

A. ①②

B. ①③

C. ②④

D. ③④

(7) 设 n 阶非零实矩阵 A 满足 $A^T + A = O$, X 为 n 维实列向量, 则下列选项正确的是().

A. 方程组 $AX = X$ 有无穷多解

B. 方程组 $AX = -X$ 有无穷多解

C. 方程组 $AX = X$ 只有零解

D. 方程组 $AX = -X$ 无解

(8) 设 A 是 n 阶实对称矩阵, B 是 n 阶实矩阵, 若对任意 n 维非零列向量 α , 都有 $\alpha^T (AB + B^T A) \alpha > 0$, 则下列选项正确的是().

A. 方程组 $ABX = \alpha$ 有无穷多解

B. 方程组 $ABX = \alpha$ 无解

C. 方程组 $AX = \alpha$ 有唯一解

D. 方程组 $AX = \alpha$ 无解

二、填空题

(1) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 均为三维列向量, $A = (\beta - \alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 则方程组 $Ax = \beta$ 的一个特解为_____.

(2) 设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 为实矩阵, 且 $A_{ij} = a_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$, 其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, $a_{33} = 1$,

$|A| = 1$, 则方程组 $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的解为_____.

(3) 设 A 是 2 阶矩阵, 线性方程组 $AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ 的通解为 $k(-2, 1)^T + (3, -4)^T$. 若 $\beta = (5, -10)^T$, 则 $\beta^T A \beta =$ _____.

(4) 设 A 为 3 阶矩阵, α 为 3 维非零列向量, 向量组 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha$ 线性无关, 且 $A^3\alpha + 2A^2\alpha - 3A\alpha = 0$, 则 $\text{tr } A =$ _____.

三、解答题

(1) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, $r(A) = n - 2$, 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的 3 个解向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 满足 $\alpha_1 +$

$\alpha_2 = (1, 2, 3, 4)^T, \alpha_2 + 2\alpha_3 = (-2, 1, 5, 3)^T, 2\alpha_3 + 3\alpha_1 = (11, 5, -6, 7)^T$, 求方程组 $Ax = b$ 的通解.

(2) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4 阶矩阵, 非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解为 $(1, 2, 2, 1)^T + k(1, -2, 4, 0)^T$, k 为任意常数, 记 $B = (\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta - \alpha_4)$.

(I) 证明: $r(B) = 2$;

(II) 求方程组 $Bx = \alpha_1 - \alpha_2$ 的通解.

(3) 设 A 为 3×4 矩阵, $r(A) = 1$, 若向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 0, 2)^T, \alpha_2 = (-1, -1, 1, a)^T, \alpha_3 = (1, -1, a, 5)^T, \alpha_4 = (2, a, -3, -5)^T$ 与方程组 $Ax = 0$ 的基础解系等价, 求 $Ax = 0$ 的通解.

(4) 设 A 是 3 阶方阵, $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 且 $a_{ij} = A_{ij}, i, j = 1, 2, 3$, 其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, $a_{33} \neq 0$, $b = (a_{13}, a_{23}, a_{33})^T$, 求非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解.

(5) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, b 为 m 维列向量, 证明: 线性方程组 $A^T Ax = A^T b$ 必有解.

(6) 设 A 是 3 阶矩阵, 向量 $\beta = (3, 3, 3)^T$, 非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解为 $k_1(1, 2, -2)^T + k_2(2, 1, 2)^T + (1, 1, 1)^T$, k_1, k_2 为任意常数.

(I) 证明: 任意 3 维列向量 α 可由 A 的三个特征向量线性表示;

(II) 若 $\alpha = (1, 2, -1)^T$, 求 $A\alpha$.

(7) 设 n 阶方阵 A 的行列式 $|A| = 0$, A 有一个代数余子式 $A_{ij} \neq 0$, 证明: $Ax = 0$ 的通解为 $k(A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in})^T$, k 为任意常数.

(8) 设 4 维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, B = (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1 + k\alpha_2 + \alpha_3)$, 方程组 $Bx = \alpha_4$ 有无穷多解, 求:

(I) k 的值;

(II) 方程组的通解.

(9) 设 $A = \begin{pmatrix} a-3 & -1 & 2 \\ -1 & a-3 & 2 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$, 且 $r(E - A) = 1$.

(I) 求 a 的值;

(II) 若非零列向量 α, β 满足 $(A - E)\alpha = \beta, (A^2 - E)\alpha = 2\beta$, 求 α, β .

(10) 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}$.

(I) 若方程组 $AX = 0$ 的解均是 $B^T X = 0$ 的解, 但这两个方程组不同解, 求 a, b 的值;

(II) 若方程组 $AX = 0$ 与 $B^T X = 0$ 有非零公共解, 求 a, b 的值, 并求全部非零公共解.

(11) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & a-1 & a-3 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(I) 证明: 方程组 $AX = \alpha$ 的解均是方程组 $BX = \beta$ 的解;

(II) 若方程组 $AX = \alpha$ 与方程组 $BX = \beta$ 不同解, 求 a 的值.

(12) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ 不可逆, $\beta = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 已知方程组 $A^T X = 0$ 的解均是 $\beta^T X = 0$ 的解.

(I) 求 a, b 的值;

(II) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

拓展题

解答题

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 有特征向量 $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T, \alpha_2 = (-1, 1, 1)^T, \alpha_3 = (-1, 3, 2)^T$, 求方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 3, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 2 \end{cases} \text{的通解.}$$

(2) 设 $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2a & 1 \\ -1 & \sqrt{2} & 2b \\ \sqrt{2} & 2c & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

(I) 若 A 是正交矩阵, 求 a, b, c 的值;

(II) 当 A 为正交矩阵时, 求方程组 $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的解.

第十一章 相似矩阵

基础题

一、选择题

(1) 设 $\lambda = 2$ 是矩阵 A 的一个特征值, 且 $|A| \neq 0$, 则 $\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$ 有一个特征值为().

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

(2) 设 4 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $0, 1, 2, 3$, 则 $r(A) = ()$.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

(3) 设 $C = \text{diag}(1, 2, 2)$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则().

- A. A 与 C 相似, B 与 C 不相似 B. A 与 C 相似, B 与 C 相似
C. A 与 C 不相似, B 与 C 相似 D. A 与 C 不相似, B 与 C 不相似

(4) 下列矩阵中, 不能相似于对角矩阵的是().

- A. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ B. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ C. $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ D. $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(5) 设矩阵 A 与 B 相似, 则必有().

- A. 矩阵 $\lambda E - A$ 与 $\lambda E - B$ 相等 B. A, B 同时可逆或不可逆
C. A 和 B 有相同的特征向量 D. A 和 B 均与同一个对角矩阵相似

(6) 设 A 为 3 阶方阵, A 的三个特征值为 $1, 1, 2$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 分别为对应的三个特征向量, 则().

- A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必为 $2E - A$ 的特征向量
B. $\alpha_1 + \alpha_3$ 必为 $2E - A$ 的特征向量
C. $\alpha_1 - \alpha_2$ 必为 $2E - A$ 的特征向量
D. α_1, α_2 必为 $2E - A$ 的特征向量, α_3 不是 $2E - A$ 的特征向量

(7) 设 3 阶实矩阵 A 有三重特征值 1, $f(x) = |xE - A| - |A^{-1}|$, 其中 E 是 3 阶单位矩阵, $x \in \mathbf{R}$, 则至少存在一点 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线().

- A. 平行于直线 $y = 1$ B. 垂直于直线 $y = 1$
C. 平行于直线 $y = x$ D. 垂直于直线 $y = x$

(8) 设 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, α_1 是 A 的特征值 $\lambda_1 = 1$ 对应的特征向量, α_2 与 α_3 是 A 的特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$

对应的特征向量, 则下列选项中关于矩阵 P 的可能取值错误的是().

A. $P = (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2)$

B. $P = (\alpha_1, -2\alpha_2, 3\alpha_3)$

C. $P = (\alpha_1, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_2 + 2\alpha_3)$

D. $P = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_3)$

二、填空题

(1) 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ 相似, 则 $a =$ _____.

(2) 设 n 阶方阵 $B = AA^*$, 则 B 的特征值为_____.

(3) 设方阵 A 满足 $A^2 + 2A + E = O$, 则 A 有特征值_____.

(4) 设 A 是 3 阶实对称矩阵, A 的特征值为 $1, 1, -2$, 且 $\lambda_3 = -2$ 对应的特征向量为 $\xi_3 = (1, 1, -1)^T$, 则 $A =$ _____.

(5) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & b \end{pmatrix}$ 相似, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

(6) 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}$ 有一个特征向量 $\alpha_1 = (1, -2, 3)^T$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

三、解答题

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求:

(I) A 的全部特征值和特征向量;

(II) 可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$;

(III) 正交矩阵 Q , 使 $Q^{-1}AQ = \Lambda$.

(2) 判别下列矩阵 A 与 B 是否相似. 若相似, 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$.

(I) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(II) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$.

(3) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 有特征向量 $\alpha = (1, 1, -1)^T$.

(I) 确定参数 a, b 及 α 对应的特征值 λ ;

(II) 问 A 能否相似于对角矩阵? 说明理由.

(4) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $A \sim \Lambda$, 且 $\lambda = 2$ 是 A 的二重特征值, 求 x, y 的值及可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

(5) 设 A 是 3 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的 3 维列向量, 且 $A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $A\alpha_2 = 2\alpha_2 + \alpha_3$, $A\alpha_3 = 2\alpha_2 + 3\alpha_3$. 求:

(I) A 的全部特征值;

(II) 可逆矩阵 P 及 Λ , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$, 并计算 $|A - 2E|$.

(6) 设实矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量, 求:

(I) a 的值;

(II) 可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

(7) 设 A 是 3 阶实对称矩阵, $A \sim B$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, A 的二重特征值对应的特征向量为 $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T$,

$\alpha_2 = (0, 2, 1)^T$. 求:

(I) A 的特征值与特征向量;

(II) 可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

(8) 已知 $A \sim B$, $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 12 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$, 求 a, b, c 的值.

(9) 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$, $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (2, 2, 1)^T$ 是 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 对应的特征向量. 求:

(I) A 的属于 $\lambda_3 = -1$ 的特征向量;

(II) 矩阵 A .

(10) (I) 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 且 $A^2 = A$, $r(A) = r (r < n)$, 计算 $|3E - A|$;

(II) 设 A 是 n 阶矩阵, 且 $A^2 = A$, $r(A) = r (r < n)$, 计算 $|3E - A|$.

(11) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 相似, 求:

(I) a, b 的值;

(II) 一个正交矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

(12) (I) 设 A 与 B 是 n 阶方阵, A 可逆, 且 $A \sim B$, 证明: $A^{-1} \sim B^{-1}$;

(II) 若 $A \sim B$, 证明: 存在可逆矩阵 P (非数量矩阵), 使得 $AP \sim BP$.

(13) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 有 3 个特征向量 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (1, 0, 0)^T$.

(I) 求 A ;

(II) 求一个可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = A^T$.

(14) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-1 & 1 & a+1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(I) 求可逆矩阵 P 及 Λ , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$;

(II) 求可逆矩阵 Q , 使得 $AQ = B$.

(15) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, 方程组 $AX = b$ 有无穷多解.

(I) 求 a 的值及 $AX = b$ 的通解;

(II) 求正交矩阵 Q 及对角矩阵 Λ , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$.

综合题

一、选择题

(1) 设 A, B 是 n 阶可逆矩阵, 且 $A^{-1} \sim B^{-1}$, 则下列结果

$$\textcircled{1} AB \sim BA; \textcircled{2} A \sim B; \textcircled{3} A^2 \sim B^2; \textcircled{4} A^T \sim B^T$$

中正确的个数为().

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

(2) 设矩阵 B 相似于 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $r_1 = r(B), r_2 = r(B-E), r_3 = r(B-2E)$ 满足().

A. $r_1 < r_2 < r_3$

B. $r_2 < r_3 < r_1$

C. $r_3 < r_1 < r_2$

D. $r_1 < r_3 < r_2$

(3) 与 $A = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ 既相似又合同的矩阵是().

A. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

B. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

C. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

D. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(4) 下列矩阵中,与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似的是().

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(5) 设 n 阶矩阵 A 有特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$, 对应的特征向量为 α_1, α_2 , k 为任意常数, 则下列选项中正确的是().

A. $k\alpha_1$ 必是 A 的特征向量

B. $\alpha_1 - \alpha_2$ 必是 A 的特征向量

C. $\alpha_1 + \alpha_2$ 必是 A 的特征向量

D. $\alpha_1 + \alpha_2$ 必是 A^2 的特征向量

(6) 设 A 是 3 阶实对称矩阵, $\alpha = (-1, 1, 1)^T$ 满足 $(A - 2E)\alpha = 0$, 且 $r(A) = 1$, k_1, k_2 为任意常数, 则方程组 $AX = 0$ 的通解为().

A. $k_1(1, 1, 0)^T + k_2(1, -1, 0)^T$

B. $k_1(1, 1, 0)^T + k_2(1, 0, 1)^T$

C. $k_1(1, 1, 0)^T + k_2(1, 1, 1)^T$

D. $k_1(1, 1, 0)^T + k_2(1, 0, -1)^T$

(7) 设 3 维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 满足 $A\alpha_1 = \alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_3$, A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式, 则 $A_{11} + A_{22} + A_{33} =$ ().

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

二、填空题

(1) 设 A 是 3 阶方阵, α 为 3 维列向量, $P = (\alpha, A\alpha, A^2\alpha)$ 为可逆矩阵, $B = P^{-1}AP$, 且 $A^3\alpha + 2A^2\alpha = 3A\alpha$, 则 $|A + E| =$ _____.

(2) 设 $A_{3 \times 3}$ 是秩为 1 的实对称矩阵, $\lambda_1 = 2$ 是 A 的一个特征值, 对应的特征向量为 $\alpha_1 = (-1, 1, 1)^T$, 则方程组 $Ax = 0$ 的基础解系为 _____.

(3) 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 0, 1, 2, $B = A^3 - 2A^2$, 则 $r(B) =$ _____.

(4) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k (k > 1)$ 是 n 维正交单位实列向量组, $A = \sum_{i=1}^k \alpha_i \alpha_i^T$, E 是 n 阶单位矩阵, 则行列式

$$|(A+E)^*| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

三、解答题

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & k \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$ 有一个特征值为 0, 求 k 的值, 并求一个正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$.

(2) 已知 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 是 3 阶可逆矩阵, B 是 3 阶矩阵, 且 $BA = (\alpha_1, -4\alpha_3, -\alpha_2)$. 求:

(I) B 的全部特征值;

(II) 可逆矩阵 P 和对角矩阵 Λ , 使得 $P^{-1}BP = \Lambda$.

(3) 设 A 是 $n (n \geq 2)$ 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 n 维列向量, 且 $A\alpha_1 = \alpha_2, A\alpha_2 = \alpha_3, \dots, A\alpha_{n-1} = \alpha_n, A\alpha_n = 0, \alpha_n \neq 0$.

(I) 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关;

(II) 求可逆矩阵 P 及三角矩阵 B , 使得 $P^{-1}AP = B$.

(4) 设 $A_{3 \times 3}$ 有三个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 它们对应的特征向量分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 令 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

(I) 证明: $\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关;

(II) 若 $A^3\beta = A\beta$, 求 $r(A - E)$.

(5) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 有四个线性无关的特征向量, 求:

(I) 可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$;

(II) $(2E - A^2)^{-1}$.

(6) 设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ 均为非零列向量, $A = \alpha\beta^T$.

(I) 求 A 的全部特征值;

(II) 当 $\alpha^T\beta$ 满足什么条件时, A 可以相似于对角矩阵 Λ ? 并求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = \Lambda$.

(7) 设 $n (n \geq 2)$ 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix}$. 求:

(I) 可逆矩阵 P 及对角矩阵 Λ , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$;

(II) $r(A^*)$.

(8) 设 A 是 3 阶实对称矩阵, 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \text{diag}(1, 2, -1)$, 且 $\alpha_1 = (1, k+1, 2)^T$, $\alpha_2 = (k-1, -k, 1)^T$ 分别为 A 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ 的特征向量, A^* 的特征值 λ_0 对应的特征向量 $\beta = (2, -5k, 2k+1)^T$, 求:

(I) λ_0 与 k 的值;

(II) 矩阵 $(A^{-1})^*$.

(9) 设 α, β 为 3 维单位列向量, 且 $\alpha^T \beta = 0$, 记 $A = \alpha\beta^T + \beta\alpha^T$.

(I) 证明: A 相似于对角矩阵;

(II) 若存在 3 维列向量 $\gamma \neq 0$, 使得 $A\gamma = 0$, 记 $P = (\gamma, 2(\alpha + \beta), \beta - \alpha)$, 求 $P^{-1}AP$.

(10) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 可逆, B 是 3 阶实对称矩阵, 且满足 $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 1 & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 1 & 2a_{32} & 2a_{33} \end{pmatrix}$, 求:

(I) B 的特征值和对应的特征向量;

(II) 正交矩阵 Q , 使得 $Q^T BQ = \Lambda$.

(11) 设向量组 (i) $\alpha_1 = (-a, 0, 1)^T, \alpha_2 = (1-a, a, 1-a)^T, \alpha_3 = (1, 0, -a)^T$, (ii) $\beta_1 = (-1, 0, a)^T, \beta_2 = (-1, 1, a)^T, \beta_3 = (1, -1, -a)^T (a \neq 0)$, 向量组 (i) 与 (ii) 等价.

(I) 求 a 的值;

(II) 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 当 a 为何值时, 存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^{-1}AQ = \Lambda$, 并求 Q 及 Λ .

(12) 设 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & -a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, a \neq 0$. 若方程组 $AX = \beta$ 有无穷多解.

(I) 求 a 的值, 并求方程组 $AX = \beta$ 的全部解;

(II) 当 a 为何值时, 存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^{-1}AQ = B$? 并求正交矩阵 Q .

(13) 设 A, B 均是 n 阶矩阵.

(I) 证明: AB 与 BA 有相同的特征值;

(II) 若 $AB = BA$, 且 A 有 n 个不同的特征值, 证明: B 相似于对角矩阵.

(14) 设 A 是 n 阶实对称矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 A 的 n 个单位正交特征向量, 对应的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 证明: $A = \lambda_1 \alpha_1 \alpha_1^T + \lambda_2 \alpha_2 \alpha_2^T + \dots + \lambda_n \alpha_n \alpha_n^T$.

(15) 设 A, B 均是 3 阶方阵, $AB = A - B$, A 有三个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 证明:

(I) $\lambda_i \neq -1 (i = 1, 2, 3)$;

(II) 存在可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP, P^{-1}BP$ 同时为对角矩阵.

(16) 设 A 是 2 阶矩阵, α 是非零向量, 且 α 不是 A 的特征向量.

(I) 证明: $\alpha, A\alpha$ 线性无关;

(II) 记 $P = (\alpha, A\alpha)$, 若 $A^2\alpha - 2A\alpha = 8\alpha$, 证明: A 相似于对角矩阵, 并求 $P^{-1}AP$.

(17) 设向量 $\beta = (b, 1, 1)^T$ 可由 $\alpha_1 = (a, 0, 1)^T, \alpha_2 = (1, a-1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 0, a)^T$ 线性表示, 且表

示法不唯一,记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 求:

(I) a, b 的值,并写出 β 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 表示的线性表达式.

(II) 一个可逆矩阵 P ,使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ (Λ 为对角矩阵).

(18) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ 相似.

(I) 求 a, b, c 的值;

(II) 求可逆矩阵 P ,使得 $P^{-1}AP = B$;

(III) 记 A 的伴随矩阵为 A^* ,求方程组 $(3E - A^*)X = 0$ 的通解.

(19) 设 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & k \\ -1 & 1 & 1-k \end{pmatrix}$ 不可逆,且满足 $AB = B, B^*(A^T + E) = O$,其中 A 是 3 阶矩阵, E 是

3 阶单位矩阵, B^* 是 B 的伴随矩阵.

(I) 求 $r(B^*)$;

(II) 证明: A 相似于对角矩阵,并求 A^2 .

拓展题

解答题

(1) 设 A 是 3 阶实对称矩阵,且 $A^2 - 2A = O, r(A) = 1$. 方程组 $Ax = 0$ 的通解为

$$k_1(1, 1, 0)^T + k_2(1, 0, 1)^T \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数}).$$

(I) 求可逆矩阵 P 及对角矩阵 Λ ,使得 $P^{-1}AP = \Lambda$;

(II) 求矩阵 A .

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} k & -2 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ -15 & 8 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, 且 $A \sim B$, 求 k 的值及可逆矩阵 P ,使得 $P^{-1}AP = B$.

(3) 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $a_0 = 1, b_0 = -1$, 且 $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}, \\ b_n = -a_{n-1} + 4b_{n-1}, \end{cases}$ 记 $\alpha_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, 矩阵 A 满足 $A\alpha_{n-1} =$

α_n , 求 A^n 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$.

第十二章 二次型

基础题

一、选择题

(1) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$ 的矩阵为().

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(2) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2$ 的标准形为().

A. $f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ B. $f = 2y_1^2 + \frac{3}{2}y_2^2$
C. $f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ D. $f = 2y_1^2 + \frac{3}{2}y_2^2 + y_3^2$

(3) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ 合同, 则合同变换矩阵 $P = ()$.

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) 设 A 是 n 阶方阵, 将 A 的第 i 列与第 j 列互换, 再交换第 i 行与第 j 行得到 B , 则().

- A. A 与 B 等价、相似且合同 B. A 与 B 相似、合同但不等价
C. A 与 B 相似但不合同 D. A 与 B 等价但不相似

(5) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 的规范形为().

A. $f = z_1^2$ B. $f = z_1^2 - z_2^2$
C. $f = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ D. $f = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$

(6) 设 A, B, Λ 均为 n 阶实方阵, 则下列命题正确的是().

- A. 若 A 是实对称矩阵, 则存在唯一可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$
B. 若 A 是实对称矩阵, 则存在唯一正交矩阵 Q , 使得 $Q^{-1}AQ = \Lambda$
C. 若 B 是实对称矩阵, 则存在唯一实对称矩阵 A , 使得 $A^2 = B$
D. 若 B 是正定矩阵, 则存在唯一正定矩阵 A , 使得 $A^2 = B$

(7) 设 A, B 均为 n 阶实对称矩阵, 则 A 与 B 合同的充分必要条件是().

A. A 与 B 有相同的特征值

B. A 与 B 有相同的特征向量

C. A 与 B 有相同的行列式

D. A 与 B 有相同的秩且有相同的正惯性指数

(8) 设 E 是 n 阶单位矩阵, 则 n 阶实对称矩阵 A 正定的充分必要条件是().

A. 存在 n 阶矩阵 C , 使得 $A = C^T C$

B. 二次型 $X^T A X$ 的负惯性指数为 0

C. 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1} A P = E$

D. A 的伴随矩阵 A^* 与 E 合同

(9) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, 若存在可逆矩阵 C , 使得 $C^T A C = \Lambda$, 则 C 可能为().

A. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

二、填空题

(1) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 正定, 则 a 的取值范围为_____.

(2) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X (A^T = A)$ 在正交变换下的标准形为 $-2y_1^2 + 8y_2^2$, 且 $E + B = AB$, 其中 B 为 3 阶矩阵, 则迹 $\text{tr}(B^{-1} + 2E) =$ _____.

三、解答题

(1) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.

(I) 求一个正交变换 $x = Qy$, 将 f 化为标准形;

(II) 利用配方法, 将 f 化为标准形.

(2) 已知二次型 $f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2x_3 (a > 0)$, 经过正交变换化成标准形 $y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$, 求参数 a 及所用的正交变换.

(3) 证明: n 阶矩阵 A 正定的充分必要条件是存在可逆矩阵 P , 使得 $A = P^T P$.

(4) 设 3 阶实对称矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $r(A) = 2$, 且满足 $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = (3, 6, 3)^T$, $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = (-1, 1, -1)^T$.

(I) 求 A ;

(II) 若 $X = (x_1, x_2, x_3)^T$, 求方程 $X^T(A+E)X = 0$ 的全部解.

(5) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$.

(I) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解;

(II) 当 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 有非零解时, 求正交变换 $X = QY$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形;

(III) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.

(6) 设 3 阶实对称矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 有二重特征值 1, 且 $\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0$, A^* 是 A 的伴随矩阵.

(I) 求正交变换 $X = QY$ 将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^TAX$ 化为标准形;

(II) 求方程组 $A^*X = 0$ 的通解.

(7) 设 A 是 3 阶实对称矩阵, $\alpha = (-1, 1, 1)^T$ 满足 $(A - 2E)\alpha = 0$, 且 $r(A) = 1$.

(I) 求方程组 $AX = 0$ 的通解;

(II) 求 A ;

(III) 若 $X = (x_1, x_2, x_3)^T$, 求方程 $X^TAX = 0$ 的全部解.

(8) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 合同.

(I) 求 a 的值及 b 的取值范围;

(II) 若存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q = B$, 求 b 及 Q .

综合题

一、选择题

(1) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3$ 的正、负惯性指数分别为().

A. $p = 1, q = 1$ B. $p = 1, q = 2$ C. $p = 1, q = 0$ D. $p = 0, q = 2$

(2) A 是 n 阶实对称矩阵, B 是 n 阶矩阵, 则 A 合同于矩阵 B 的充分必要条件是().

① $r(A) = r(B)$; ② A 与 B 的正惯性指数相等;

③ A 与 B 均正定矩阵; ④ B 是实对称矩阵.

A. ① 成立 B. ④ 成立

C. ①②④ 均成立 D. ③ 成立

(3) 设 n 元二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + a_1x_2)^2 + (x_2 + a_2x_3)^2 + \dots + (x_n + a_nx_1)^2$, 其中 $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 均为实数, 若二次型正定, 则().

A. $1 + (-1)^{n-1}a_1a_2 \cdots a_n \neq 0$ B. $1 + (-1)^{n-1}a_1a_2 \cdots a_n = 0$

C. $1 - (-1)^{n+1}a_1a_2 \cdots a_n \neq 0$ D. $1 - (-1)^{n+1}a_1a_2 \cdots a_n = 0$

(4) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则正确的是().

A. A 与 B 相似, B 与 C 合同

B. A 与 D 相似, B 与 D 合同

C. A 与 D 合同, B 与 C 相似D. B 与 D 相似, C 与 D 合同

(5) 设 A 是 3 阶实对称矩阵, 且 $|A| = 2, A^* = A - E$, 其中 A^* 是 A 的伴随矩阵, 则二次型 $x^T A x$ 的规范形为().

A. $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

B. $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

C. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

D. $-y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$

(6) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则正确的是().

A. 必存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^{-1} A Q = B$ B. 必存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1} A P = B$ C. 必存在可逆矩阵 P , 使得 $P^T A P = B$ D. 必存在可逆矩阵 P , 使得 $A = P^T P$

(7) 设 3 阶实矩阵 A 的特征向量为 $\alpha_1 = (-1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 1, 1)^T, \alpha_3 = (-1, -1, 2)^T$, 则 A 必为().

A. 可逆矩阵

B. 正交矩阵

C. 对称矩阵

D. 正定矩阵

(8) 设实矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & a-1 \\ a-1 & a-1 \end{pmatrix}$, 若对任意的二维非零实列向量 X , 都有 $|X^T A X| < |X^T X|$, 则 a

的取值范围为().

A. $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

B. $(-1, 1)$

C. $(-1, 0]$

D. $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$

(9) 设 $\alpha_1 = (1, 2)^T, \alpha_2 = (a, 1)^T, X = (x_1, x_2)^T$, 若二次型 $f(x_1, x_2) = (\alpha_1, X)^2 + (\alpha_2, X)^2$ 经可逆线性变换 $X = PY$ 化为 $g(y_1, y_2) = by_1^2 + by_2^2 + 2by_1y_2 (b \neq 0)$, 则().

A. $a = \frac{1}{2}, b > 0$

B. $a = -\frac{1}{2}, b > 0$

C. $a = \frac{1}{2}, b > -1$

D. $a = -\frac{1}{2}, b > -1$

(10) 设 α 是 3 维实列向量, 且满足 $\alpha^T \alpha = 1, A = E - \alpha \alpha^T, A^*$ 是 A 的伴随矩阵, 则二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T A^* X$ 在正交变换 $X = QY$ 下的标准形为().

A. $y_1^2 + y_2^2$

B. $-y_1^2$

C. $-y_1^2 - y_3^2$

D. y_1^2

(11) 设 A 是 2 阶实对称矩阵, 若对任意的 2 维非零列向量 X , 都有 $|X^T A X| < |X^T X|, X_1, X_2$ 均为 2 维列向量, 则二次型 $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A+E & O \\ O & E-A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ 的规范形为().

A. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$

B. $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2$

C. $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$

D. $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$

(12) 设 A 是 3 阶实矩阵, $|A| = 3$, 且 $A^* = -A + 4E$, 其中 A^* 是 A 的伴随矩阵, E 是 3 阶单位矩阵, 则二次型 $X^T (2E - A)^T (2E - A) X$ 的规范形为().

A. $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

B. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

C. $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

D. $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

二、填空题

(1) 若 3 阶实对称矩阵 A 与 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 合同, 则二次型 $x^T A x$ 的规范形为_____.

(2) 设 A 是 n 阶矩阵, 方程组 $Ax = b$ 有唯一解, 则二次型 $x^T (A^T A) x$ 的正惯性指数为_____.

(3) 设 A 是 3 阶实对称矩阵, 二次型 $x^T A x$ 经过正交变换 $x = Qy$ 后的标准形为 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则二次型 $x^T A^* x$ 的规范形为_____.

(4) 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 2, 3, 4, A^* 是 A 的伴随矩阵. 若对任意 3 维实列向量 X , 都有 $|X^T A^* X - X^T A X| \leq a X^T X$, 则 a 的最小取值为_____.

三、解答题

(1) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x = x_1^2 + ax_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2ax_1x_3 - 2x_2x_3$ 的正负惯性指数都是 1. 求:

(I) a 的值;

(II) 可逆线性变换 $x = By$, 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形.

(2) 设 3 阶实对称矩阵 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 有特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, 且 $\sum_{i=1}^3 a_{ii} = 1$, $\alpha = (1, 0, -2)^T$ 是方程组 $A^* x = 4\alpha$ 的解向量. 求:

(I) 矩阵 A ;

(II) 正交变换 $x = Qy$, 将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x$ 化为标准形.

(3) 设二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = nx_1^2 + nx_2^2 + \dots + nx_n^2 - (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$. 求:

(I) 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x$ 的秩;

(II) 可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$, 并求二次型的正惯性指数.

(4) 设方程组 $\begin{cases} (k+3)x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2kx_1 + (k-1)x_2 + x_3 = 0, \\ (k-3)x_1 - 3x_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解, 且 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & k & -2 \\ 2 & -2 & 9 \end{pmatrix}$ 是正定矩阵.

(I) 求 k 的值;

(II) 设 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, 求当 $x^T x = 1$ 时, $x^T A x$ 的最大值.

(5) 设 n 阶实对称矩阵 A 只有两个不同的特征值 $\lambda_1 = 1$ 和 λ_2 , 且 A 属于 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量仅有 $k(1, 0, \dots, 0, 1)^T$, 其中 $k \neq 0$.

(I) 求矩阵 A ;

(II) 当 λ_2 满足什么条件时, A 是正定矩阵?

(6) 设 A 是实对称矩阵, 证明: A 可逆的充要条件是存在方阵 B , 使得 $AB + B^T A$ 为正定矩阵.

(7) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 - ax_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_3$ 与 $g(y_1, y_2, y_3) = -y_1^2 - y_2^2 + a^2y_3^2 + 2y_1y_2$ 的秩相等($a \neq 0$).

(I) 当 a 为何值时, 存在可逆(非正交) 线性变换 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$, 可将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为 $g(y_1, y_2, y_3)$? 求一个可逆矩阵 $\mathbf{P}$.

(II) 当 a 为何值时, 存在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$, 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为 $g(y_1, y_2, y_3)$? 说明理由.

(8) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ (a 为常数, $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$).

(I) 求一个正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形;

(II) 设 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, 求方程 $\mathbf{x}^T (a\mathbf{E} - \mathbf{A})^2 \mathbf{x} = 0$ 的全部解.

(9) 设二次型 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2bx_1x_3 + 2x_2x_3$, 在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2$, 其中 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

(I) 求 a, b 的值及正交矩阵 $\mathbf{Q}$;

(II) 若正定矩阵 $\mathbf{B}$ 满足 $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A} + \mathbf{A}^*$, 其中 $\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵, 求 $\mathbf{B}$.

(10) 设 $\mathbf{A}$ 是 3 阶矩阵, 方程组 $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b}$ 的通解为 $k_1(-1, 1, 0)^T + k_2(2, 0, 1)^T + (1, 1, -2)^T$. 其中 $\mathbf{b} = (6, 6, -12)^T$, k_1, k_2 为任意常数.

(I) 求 $\mathbf{A}$;

(II) 若 $\mathbf{A}$ 的列向量组的极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}$, 求一个 3 维行向量 $\boldsymbol{\beta}$, 使得 $\mathbf{A}^2 = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}$;

(III) 记 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)^T$, 求方程 $\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = 0$ 的全部解.

(11) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2ax_2x_3$ ($a > 0$) 在正交变换 $\mathbf{X} = \mathbf{Q}\mathbf{Y}$ 下化为 $g(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + by_2^2 + 2y_3^2 - 2y_1y_3$.

(I) 求 a, b 的值;

(II) 求正交矩阵 $\mathbf{Q}$.

(12) 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{E}$ 是 3 阶单位矩阵.

(I) 求可逆矩阵 $\mathbf{C}$, 使得 $\mathbf{C}^T \mathbf{B} \mathbf{C} = \mathbf{E}$;

(II) 求一个可逆矩阵 $\mathbf{P}$, 使得 $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \text{diag}(0, 1, 1)$, 且 $\mathbf{P}^T \mathbf{B} \mathbf{P} = \mathbf{E}$.

(13) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_3$ 经过可逆线性变换 $\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{Y}$ 化为 $y_1^2 + y_3^2$.

(I) 求 a 的值及可逆矩阵 $\mathbf{P}$;

(II) 设 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)^T$, 当 $\mathbf{X}^T \mathbf{X} = 1$ 时, 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的最大值, 并求满足 $x_1 = x_2 > 0$ 的最大值点.

(14) 设 3 阶矩阵 $\mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, 且满足 $(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3, -\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(I) 若 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)^T$, 证明: $\mathbf{X}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{X}$ 为正定二次型;

(II) 求可逆矩阵 $\mathbf{P}$, 使得 $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{A}^T$.

(15) 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ -1 & a \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$, 已知方程组 $\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{X} = \mathbf{0}$ 与 $\mathbf{B} \mathbf{X} = \mathbf{0}$ 同解.

(I) 求 a 的取值范围;

(II) 当 $\mathbf{A} \mathbf{B}$ 为实对称矩阵时, 求正交变换 $\mathbf{X} = \mathbf{Q} \mathbf{Y}$, 将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{X}$ 化为标准形.

拓展题

解答题

(1) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 3x_2x_3 + 4x_1x_3$, 求可逆线性变换 $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{z}$, 使得 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形, 并求二次型的秩及正、负惯性指数.

(2) 设 $\mathbf{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$ 下的标准形为 $-y_1^2 + 2y_2^2 + ay_3^2$, 其中 $\mathbf{Q}$ 的第 1 列为 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$, 且 $|\mathbf{A}| = -4$.

(I) 求 a 的值;

(II) 求正交矩阵 $\mathbf{Q}$.

(3) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} (\mathbf{A}^T = \mathbf{A})$ 经正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$ 化为 $by_2^2 + cy_3^2$, 其中

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (b > 0, c > 0).$$

(I) 求 a, b, c 的值及矩阵 $\mathbf{A}$;

(II) 求可逆矩阵 $\mathbf{P}$, 使得 $\mathbf{A} + \mathbf{E} = \mathbf{P}^T \mathbf{P}$.

(4) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} (\mathbf{A}^T = \mathbf{A})$ 经过正交变换 $\mathbf{X} = \mathbf{Q} \mathbf{Y}$ 化为标准形 $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, 又 $\mathbf{A}^* \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 1, -1)^T$, $\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵.

(I) 求正交矩阵 $\mathbf{Q}$ 及实对称矩阵 $\mathbf{A}$;

(II) 若正定矩阵 $\mathbf{B}$ 满足 $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A} + 2\mathbf{E}$, 求 $\mathbf{B}$.

(5) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2ax_1x_3 + 2ax_2x_3$ 经过可逆线性变换 $\mathbf{X} = \mathbf{P} \mathbf{Y}$ 化为 $g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 3y_3^2 + 2y_1y_2$.

(I) 求 a 的值;

(II) 求可逆矩阵 $\mathbf{P}$.

(6) 设 $A = \begin{pmatrix} a & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & a & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & a \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (b \neq 0)$ 合同.

(I) 求 a 的值;

(II) 若存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q = B$, 求 b 的值及 Q ;

(III) 对于(II)中的 Q , 若 $Q^T (A + A^*) Q = \Lambda$, 其中 A^* 是 A 的伴随矩阵, 求对角矩阵 Λ .



扫描二维码, 获取更多免费资料